

# TOPOLOGIA 1 e Topologia per Fisica – 22/6/2009

**1. Esercizio.** Se  $X$  è spazio topologico e  $Y$  è un insieme, una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è detta localmente costante se per ogni  $p \in X$  esiste un intorno  $U$  di  $p$  in  $X$  tale che la restrizione  $f|_U$  è costante.

Dimostrare che se  $X$  è connesso, allora ogni  $f : X \rightarrow Y$  che sia localmente costante è costante.

Dimostrare che se  $Y$  è uno spazio topologico ogni funzione localmente costante è continua. Mostrare che se  $Y$  ha la topologia discreta, allora ogni funzione continua è localmente costante.

**2. Esercizio.** Sia  $X = C([a, b], \mathbb{R})$  e siano  $E$  e  $G$  i sottoinsiemi di  $X$  così definiti:

$$E = \{f \in X : f(t) \geq 0 \forall t \in [a, b]\}$$

$$G = \{f \in X : \int_a^b f(t) dt \geq 0\}$$

i) Dimostrare che  $E$  è un sottoinsieme proprio di  $G$ .

ii) Su  $X$  si consideri la norma della convergenza in media:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

È vero che  $G$  è chiuso?

È vero che  $E$  è chiuso.

Motivare le risposte.

**3. Esercizio.** Dimostrare che in uno spazio normato di dimensione infinita la palla unitaria non è compatta.