

FORMULA DI TAYLOR

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata – Padova

Resto in forma integrale.

Teorema. Sia I un intervallo di \mathbb{R} , $c \in I$ e $f \in C^m(I)$.

Per ogni $x \in I$ si ha:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(c)}{(m-1)!}(x-c)^{m-1} + \int_c^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(t) dt$$

Dimostrazione. Poiché f è una primitiva di f' , il teorema fondamentale del calcolo assicura che:

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) dt \quad (\star)$$

Si osservi che (\star) è la versione del teorema per $m = 1$.

Calcoliamo ora per parti l'integrale in (\star) , osservando che $(t-x)$ è una primitiva del fattore differenziale $1 dt$:

$$f(x) = f(c) + \left| (t-x)f'(t) \right|_{t=c}^{t=x} + \int_c^x (x-t)f^{(2)}(t) dt$$

da cui:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{1}{1!} \int_c^x (x-t)f^{(2)}(t) dt$$

Si osservi che quest'ultima formula è la versione del teorema per $m = 2$.

Poiché una primitiva del fattore differenziale $(x-t) dt$ è $-\frac{(x-t)^2}{2!}$, e poi ancora una primitiva di $\frac{(x-t)^2}{2!} dt$ è $-\frac{(x-t)^3}{3!}$, ... si capisce come si può dedurre passo passo la formula del teorema. Per completezza la dimostriamo per induzione supponendola vera per m e dimostrandola per $m+1$.

Se nella formula

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(c)}{(m-1)!}(x-c)^{m-1} + \int_c^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(t) dt$$

integriamo per parti prendendo $-\frac{(x-t)^m}{m!}$ come primitiva del fattore differenziale $\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_c^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(t) dt &= \left| -\frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m)}(t) \right|_{t=c}^{t=x} + \int_c^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt = \\ &= \frac{f^{(m)}(c)}{m!} (x-c)^m + \int_c^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt \end{aligned}$$

da cui si deduce immediatamente la formula del teorema per $m+1$.

Per quanto riguarda la formulazione del resto integrale con gli estremi fissi, nonché la serie di Taylor, il criterio di sviluppabilità in serie di Taylor e la formula di Taylor con il resto di Lagrange, v. [DM, pp. 440–444] e [S, pp. 483–503].

Poiché le derivate successive di $\sin x$, $\cos x$, e^x si mantengono limitate in ogni intervallo compatto, dal criterio 17.9.3 consegue che le serie trigonometriche e la serie esponenziale convergono alle rispettive funzioni su tutto l'asse reale.

Per dimostrare la sviluppabilità in serie di Taylor di $\log(1+x)$, con $-1 < x \leq 1$, usiamo un resto diverso, partendo dall'identità

$$\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} + \frac{w^n}{1-w}$$

valida per $w \neq 1$, come si vede moltiplicando per il denominatore. Ponendo $w = -t$, si ottiene per $t \neq -1$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

Fissando ora $x \in]-1, 1]$ e integrando da 0 a x si ottiene:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

cioè:

$$\log(1+x) = s_n(x) + R_n(x)$$

ove $s_n(x)$ è il polinomio di Taylor di grado n di $\log(1+x)$, ovvero la ridotta n -esima della serie di Taylor di $\log(1+x)$, mentre:

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

Se dimostriamo che $\lim_n R_n(x) = 0$, possiamo concludere che:

$$\log(1+x) = \lim_n s_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Se $0 < x \leq 1$ abbiamo:

$$|R_n(x)| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

che ovviamente tende a 0 per n tendente a ∞ .

Se $-1 < x < 0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \int_x^0 (-1)^n \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_x^0 (-1)^n \frac{t^n}{1+x} dt = \\ &= \frac{1}{1+x} (-1)^n \left| \frac{t^{n+1}}{n+1} \right|_{t=x}^{t=0} = (-1)^n (-1) \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

che ovviamente tende a 0 per n tendente a ∞ .

Si osservi che in particolare abbiamo ottenuto che la somma della serie armonica a termini di segno alterno vale $\log 2$.

BIBLIOGRAFIA

[DM] G. De Marco, *Analisi Uno*, Decibel-Zanichelli.

[S] G.F. Simmons, *Calculus with Analytic Geometry*, McGraw-Hill, New York (1996).