

SULL'UNIFORME LIMITATEZZA

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata – Padova

Gli spazi lineari topologici sono assunti di Hausdorff.

Il seguente teorema è una piccola generalizzazione del teorema III.9.1 di [TL].

Teorema 1 *Siano X uno spazio normato, Γ una collezione di funzionali lineari continui su X . Sia E l'insieme di tutti gli $x \in X$ la cui orbita*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

è limitata (in \mathbb{R} o in \mathbb{C}). Se E è di seconda categoria in X , allora $E = X$ ed esiste un maggiorante uniforme $M > 0$ tale che $\|\Lambda\| \leq M$ per ogni $\Lambda \in \Gamma$.

Il teorema di Baire assicura che l'ipotesi su E è soddisfatta se X è di Banach ed $E = X$.

Dimostrazione. Per dimostrare che l'insieme delle norme è uniformemente limitato basta fare una *carbon copy* della dimostrazione del teorema III.9.1 di [TL]; per vedere che i funzionali sono uniformemente limitati su una palla aperta si usa il teorema 2.41-D di [T] (invece del teorema di Baire).

Detto M il maggiorante uniforme, poiché $|\Lambda x| \leq M\|x\|$ per ogni $\Lambda \in \Gamma$, si ottiene che $\Gamma(x)$ è puntualmente limitata su tutto X .

Il precedente teorema ha la seguente versione più generale nel caso degli operatori lineari (cfr. [R], teorema 2.5, [K] ex. U, pag. 215). La dimostrazione fornisce una dimostrazione anche del precedente.

Teorema 2 (Banach-Steinhaus) *Siano X uno spazio lineare topologico e Y uno spazio normato. Sia Γ una collezione di operatori lineari continui da X a Y e sia E l'insieme di tutti gli $x \in X$ la cui orbita*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

è limitata¹ in Y . Se E è di seconda categoria in X , allora $E = X$ ed esistono un intorno U di 0 in X e un maggiorante $C > 0$ uniforme su U , cioè tale che

$$\|\Lambda x\| \leq C \quad \forall x \in U, \forall \Lambda \in \Gamma.$$

Se X è normato si ottiene che esiste $M > 0$ tale che $\|\Lambda\| \leq M$ per ogni $\Lambda \in \Gamma$.

Il teorema di Baire assicura che l'ipotesi su E è soddisfatta se X è di Banach ed $E = X$.

Dimostrazione. Per ogni numero naturale n sia

$$E_n = \{x \in X : \|\Lambda x\| \leq n \forall \Lambda \in \Gamma\}$$

¹Si noti che E è un sottospazio lineare.

Dalla continuità degli operatori segue che E_n è chiuso perché intersezione di chiusi. Poiché $E \subseteq \bigcup_n E_n$ e per ipotesi E è di seconda categoria, deve esistere $\bar{n} \in \mathbb{N}$ per cui $\text{Int } E_{\bar{n}} \neq \emptyset$. Esistono pertanto $x_0 \in E_{\bar{n}}$ e un intorno U di 0 in X per cui $\|\Lambda y\| \leq \bar{n}$ per ogni $y \in x_0 + U$ e per ogni $\Lambda \in \Gamma$. Quindi per ogni $x \in U$ e per ogni $\Lambda \in \Gamma$ si ha

$$\|\Lambda x_0 + \Lambda x\| = \|\Lambda(x_0 + x)\| \leq \bar{n},$$

da cui

$$\|\Lambda x\| - \|\Lambda x_0\| \leq \|\Lambda x_0 + \Lambda x\| \leq \bar{n}.$$

In conclusione, posto $C = \|\Lambda x_0\| + \bar{n}$, si ottiene

$$\|\Lambda x\| \leq C \quad \forall x \in U, \forall \Lambda \in \Gamma.$$

Per dimostrare che $E = X$, si scelga un intorno bilanciato V di 0, con $V \subseteq U$. Allora per ogni $z \in X$ esiste $\delta > 0$ tale che $\delta z \in V$. Di conseguenza $\|\Lambda(\delta z)\| \leq C$, per ogni $\Lambda \in \Gamma$; dunque $\|\Lambda z\| \leq \frac{C}{\delta}$ per ogni $\Lambda \in \Gamma$. Pertanto $z \in E$.

Se X è normato, con palla unitaria B , scelto $\delta > 0$ tale che $\delta B \subseteq U$, si ha che $\frac{\delta}{\|x\|}x \in U$ per ogni elemento non nullo $x \in X$. Dunque:

$$\|\Lambda(\frac{\delta}{\|x\|}x)\| \leq C \quad \forall x \in X, \forall \Lambda \in \Gamma.$$

Usando la linearità degli operatori Λ si ottiene:

$$\|\Lambda x\| \leq \frac{C}{\delta} \|x\|.$$

Posto $M = \frac{C}{\delta}$ si ha $\|\Lambda\| \leq M$ per ogni $\Lambda \in \Gamma$.

Per la dimostrazione del seguente teorema si ricordino i seguenti fatti. (Per l'enunciato cfr [R], teorema 2.7.)

Fatto 3 Sia $\{\Lambda_n\}$ una successione di operatori lineari fra uno spazio normato X e uno spazio normato Y . Sia E l'insieme di tutti gli $x \in X$ per cui $\lim_n \Lambda_n x$ esiste in Y . Allora E è un sottospazio lineare di X e la posizione $\Lambda x = \lim_n \Lambda_n x$ definisce un operatore lineare da E a Y (non necessariamente continuo).

Fatto 4 La chiusura di un sottospazio lineare di uno spazio normato o ha interno vuoto o è tutto lo spazio (se non ha interno vuoto contiene una pallina, che genera tutto lo spazio).

Teorema 5 Siano X e Y spazi normati, con Y di Banach, e $\{\Lambda_n\}$ una successione di operatori lineari continui da X a Y . Sia E l'insieme di tutti gli $x \in X$ per cui $\Lambda x = \lim_n \Lambda_n x$ esiste in Y . Se E è di seconda categoria in X , allora $E = X$ e Λ è continuo.

Dimostrazione. Sia $\Gamma = \{\Lambda_n\}$. Per ogni punto $x \in E$, l'orbita $\Gamma(x)$ è limitata perché si tratta dell'orbita di una successione convergente. Per il teorema di Banach-Steinhaus esiste una costante $M > 0$ tale che $\|\Lambda_n\| \leq M$ per ogni n . Poiché E è di seconda categoria, la sua chiusura non può avere interno vuoto, e quindi E è denso in X . Fissati $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, sia $x_0 \in E$ tale che $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$. Per ogni m, n si ha:

$$\begin{aligned} \|\Lambda_n x - \Lambda_m x\| &= \|\Lambda_n(x - x_0) + \Lambda_n x_0 - \Lambda_m x_0 + \Lambda_m(x_0 - x)\| \leq \\ &\leq \|\Lambda_n\| \|x - x_0\| + \|\Lambda_n x_0 - \Lambda_m x_0\| + \|\Lambda_m\| \|x_0 - x\| \leq \\ &\leq 2M\varepsilon + \|\Lambda_n x_0 - \Lambda_m x_0\| \end{aligned}$$

Poiché $\Lambda_n x_0$ è una successione convergente, e dunque di Cauchy, una piccola meditazione mostra che anche $\Lambda_n x$ è di Cauchy. Poiché Y è di Banach, si conclude che Λx esiste per ogni $x \in X$.

Siccome $\|\Lambda_n x\| \leq M\|x\|$ per ogni $x \in X$, passando al limite si ottiene $\|\Lambda x\| \leq M\|x\|$ per ogni $x \in X$ e quindi Λ è continuo.

Utilizzando il fatto che se una varietà lineare è di seconda categoria allora è densa, dal precedente teorema si deduce immediatamente:

Corollario 6 *Siano X e Y spazi normati, con Y di Banach, e $\{\Lambda_n\}$ una successione di operatori lineari continui da X a Y . Sia E l'insieme di tutti gli $x \in X$ per cui $\lim_n \Lambda_n x = 0$. Se E è di seconda categoria in X , allora $E = X$.*

BIBLIOGRAFIA

- [K] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, New York (1970).
- [R] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York (1973).
- [T] A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley&Sons Inc., New York (1964).
- [TL] A. Taylor, D. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley&Sons (1980).