TEOREMA DI WEIERSTRASS
E TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

1 Weierstrass

Il teorema di Weierstrass afferma l'esistenza degli estremi assoluti per una funzione continua a valori reali con dominio un insieme chiuso e limitato della retta reale. Per riuscire a dimostrarlo, abbiamo bisogno di alcuni prerequisiti che hanno anche un interesse intrinseco.

Teorema 1 *Ogni successione di numeri reali ammette una sottosuccessione monotona.*

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei valori della successione.

- Se E è finito, allora esiste $N \subseteq \mathbb{N}$, N infinito, tale che $x_n = c$ per ogni $n \in N$, cioè c'è un valore della successione che si ripete infinite volte. Siano $n_0 = \min N$, $n_1 = \min(N \setminus \{n_0\})$, $n_2 = \min(N \setminus \{n_0, n_1\})$,..., $n_{j+1} = \min(N \setminus \{n_0, \dots, n_j\})$,...

  Siccome $j \to n_j$ è crescente, la successione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione della successione di partenza e, essendo costante ($= c$), essa è monotona.

- Se E è infinito, distinguiamo due casi.

  1. Supponiamo che esista un sottoinsieme F di E, con F infinito e privo di minimo. Sia $a = \inf F$ (qui l'estremo inferiore è fatto in $\tilde{\mathbb{R}}$). Siccome $a \notin F$, si ha $a < F$. Per la seconda proprietà dell'estremo inferiore, abbiamo:

     $$\forall\, b > a\ \exists\, y \in F \text{ tale che } a < y < b \tag{1}$$

     Useremo ripetutamente la (1), scegliendo come b i valori di una opportuna sottosuccessione decrescente.
     Scegliamo anzitutto un elemento $x_{n_1} \in F$; ovviamente si ha $a < x_{n_1}$. Sia ora:

     $$b_1 = \min\{x_n :\ n \le n_1\ \&\ x_n \in F\}$$

     (tale minimo esiste perché l'insieme tra graffe è finito, fare un disegno).
     Sempre per la (1), esiste $x_{n_2} \in F$ tale che $a < x_{n_2} < b_1$; per la scelta di b_1 si ha che $n_2 > n_1$. Sia ora:

     $$b_2 = \min\{x_n :\ n \le n_2\ \&\ x_n \in F\}$$

     Analogamente a prima, troviamo $x_{n_3} \in F$ tale che $a < x_{n_3} < b_2$ e, per la scelta di b_2, si ha $n_3 > n_2$.
     Per induzione, definito

     $$b_j = \min\{x_n :\ n \le n_j\ \&\ x_n \in F\}$$

     troviamo un elemento $x_{n_{j+1}} \in F$ tale che $a < x_{n_{j+1}} < b_j$ e, per la scelta di b_j, abbiamo $n_{j+1} > n_j$. Poiché $j \to n_j$ è crescente, la successione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, siccome $x_{n_j} < b_{j-1} \le x_{n_{j-1}}$, si ottiene che $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

2. Supponiamo invece che ogni sottoinsieme non vuoto di E abbia minimo. Definiremo per induzione una sottosuccessione crescente della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $x_{n_1} = \min E$. Poiché $\{x_n : n \leq n_1\}$ è finito, allora $E \setminus \{x_n : n \leq n_1\}$ è non vuoto. Sia $x_{n_2} = \min(E \setminus \{x_n : n \leq n_1\})$. Ovviamente $n_2 > n_1$ e $x_{n_2} > x_{n_1}$.
   Per induzione, se abbiamo definito
   $$x_{n_1} < x_{n_2} < \ldots < x_{n_j} \quad \text{con} \quad n_1 < n_2 < \ldots < n_j$$
   definendo
   $$x_{n_{j+1}} = \min(E \setminus \{x_n : n \leq n_j\})$$
   si ha $x_{n_{j+1}} > x_{n_j}$ e $n_{j+1} > n_j$.
   Di conseguenza la successione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione strettamente crescente della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Come conseguenza del teorema 2, otteniamo il:

Teorema 2 *Ogni successione limitata di numeri reali ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Basta usare il teor. 1 e il fatto che ogni successione monotona e limitata è convergente.

Dal precedente teorema consegue il:

Teorema 3 (Teorema di Bolzano) *Ogni sottoinsieme infinito e limitato G di $\mathbb{R}$ ammette un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Si scelga un punto $x_1 \in G$,
poi $x_2 \in G \setminus \{x_1\}, \ldots, x_{n+1} \in G \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è iniettiva; poiché è limitata, ammette una sottosuccessione convergente. La conclusione si ottiene osservando che il limite di una successione convergente e iniettiva è punto di accumulazione per l'insieme dei valori della successione.

Definizione 4 *Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}$ si dice sequenzialmente compatto se ogni successione di punti di K ammette una sottosuccessione convergente a un punto di K.*

Teorema 5 *Un sottoinsieme $K \subseteq \mathbb{R}$ è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. *Necessità.* Dimostriamo che se K è sequenzialmente compatto allora esso è chiuso e limitato.
Supponiamo per assurdo che K non sia limitato, ad esempio che non sia superiormente limitato. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste allora $x_n \in K$ tale che $x_n > n$. Per il teorema del confronto, la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ e quindi non può ammettere sottosuccessioni convergenti a un punto di K, in contrasto con l'ipotesi. L'insieme K deve essere pertanto limitato.
Supponiamo, sempre per assurdo, che K non sia chiuso. Allora $\mathbb{R} \setminus K$ non è aperto e quindi esiste un punto $p \notin K$ tale che per ogni intorno V di p si ha $V \cap K \neq \emptyset$. Per ogni intero $n > 1$ esiste allora $x_n \in K$ tale che $x_n \in]p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}[$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, formata da tali punti, è allora una successione di punti di K che converge al punto $p \notin K$, e quindi tutte le sue sottosuccessioni convergono a $p \notin K$, in contraddizione con l'ipotesi di compattezza sequenziale. Dunque K risulta chiuso.

Sufficienza. Dimostriamo che se K è chiuso e limitato allora esso è sequenzialmente compatto.
Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti di K. Poiché K è limitato, per il teorema 2 esiste una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto $p \in \mathbb{R}$. Il punto p appartiene a K perché K è chiuso e quindi contiene i limiti delle sue successioni convergenti [testo, 10.4.2].

Teorema 6 (Weierstrass) *Sia $K \subseteq \mathbb{R}$, con K chiuso e limitato e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f(K)$ è chiuso e limitato, in particolare esso ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. Per il teorema 5 basta dimostrare che $f(K)$ è sequenzialmente compatto.
Sia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti con $y_n \in f(K)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dobbiamo dimostrare che essa ammette una sottosuccessione $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a un elemento di $f(K)$, cioè a un valore della funzione f.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $x_n \in K$ tale che $f(x_n) = y_n$. Consideriamo la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, che consiste di punti di K. Siccome K è sequenzialmente compatto (teorema 5), essa ammette una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{j\to+\infty} x_{n_j} = p \in K$. Per la continuità di f, si ha allora:

$$\lim_{j\to+\infty} y_{n_j} = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(p)$$

che è quanto voluto.
L'insieme $f(K)$ ammette estremi assoluti perché è chiuso e limitato, e ogni insieme chiuso e limitato ammette massimo e minimo [testo, 6.4.1].

2 Zeri

Lo scopo ora è di dimostrare il teorema di tutti i valori, il quale asserisce che ogni funzione reale continua con dominio un intervallo di $\mathbb{R}$ ha per immagine ancora un intervallo.
Dimostriamo anzitutto la seguente proposizione, che in sostanza è equivalente al teorema della permanenza del segno.

Proposizione 7 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione e sia:*

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \; f(x) \geq 0\}$$

Se la funzione f è continua su tutto $[a, b]$, allora l'insieme E è chiuso.

Dimostrazione. Si deve dimostrare che $\overline{E} \subseteq E$.
Poiché $[a, b]$ è chiuso, si ha $\overline{E} \subseteq [a, b]$.
Sia $p \in \overline{E}$. Esiste allora una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ formata da punti di E e convergente a p [testo, 10.4.1]. Poiché f è continua, si ottiene:

$$\lim_j f(x_j) = f(p)$$

Siccome il passaggio al limite conserva le disuguaglianze larghe, si ha $f(p) \geq 0$ e dunque $p \in E$.

Passiamo ora al:

Teorema 8 (Teorema degli zeri) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè $f(a)$ e $f(b)$ sono discordi). Allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette soluzioni, cioè esiste ξ, $a < \xi < b$, tale che $f(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Sia:

$$E = \{x \in [a, b] : \ f(x) \geq 0\}$$

Per la prop. 7, il sottoinsieme E è chiuso e, essendo esso non vuoto ($a \in E$) e limitato, ammette massimo. Sia $\xi = \max E$. Poiché $f(b) < 0$, si ha $\xi \neq b$ e quindi $\xi < b$. Pertanto ogni intorno di ξ conterrà punti maggiori di ξ. Se fosse $f(\xi) > 0$, per il teorema della permanenza del segno applicato alla funzione continua f, esisterebbe un intorno completo V di ξ su cui f è positiva. Poiché V contiene punti a destra di ξ, si ottiene una contraddizione con il fatto che ξ è il massimo di E. Di conseguenza deve essere $f(\xi) = 0$, e ξ è lo zero cercato.

Corollario 9 *Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f(I)$ è un intervallo di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $f(I)$ è convesso per l'ordine, cioè che se $y_1 < y_2$ sono punti di $f(I)$, allora $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$. Siano $a, b \in I$ tali che $f(a) = y_2$, $f(b) = y_1$; non è restrittivo supporre $a < b$. Sia ora $d \in]y_1, y_2[$; dobbiamo dimostrare che $d \in f(I)$.
Consideriamo la funzione $f(x) - d$. Poiché $f(a) - d = y_2 - d > 0$ e $f(b) - d = y_1 - d < 0$, per il teorema degli zeri esiste $c \in]a, b[$ tale che $f(c) - d = 0$, cioè $f(c) = d$ e quindi $d \in f([a, b]) \subseteq f(I)$.

Si potrebbe dedurre anche il seguente teorema, che però non dimostriamo (v. [testo, 12.9.1, 12.9.2, 12.10.6]).

Teorema 10 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva, ove I è un intervallo di $\mathbb{R}$. Allora f è monotona. Di conseguenza una funzione tra due intervalli di $\mathbb{R}$ è un omeomorfismo (biiettiva e bicontinua) se e solo se essa è una biiezione monotona.*

Esercizio. Dare un esempio di una biiezione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che non sia monotona.

3 Sottoinsiemi connessi

Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ si dice connesso se non esistono due aperti disgiunti $U, V \subset \mathbb{R}$ tali che $E \subseteq U \cup V$, $E \cap U \neq \emptyset$, $E \cap V \neq \emptyset$. Sconnesso significa non connesso, cioè che esistono due aperti disgiunti...

Teorema 11 *Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è connesso se e solo se E è un intervallo.*

Dimostrazione. Dimostriamo che E non è un intervallo se e solo se E è sconnesso.
Se E non è un intervallo, esistono $x < y < z$ tali che $x, z \in E$ e $y \notin E$. Allora le semirette aperte $(-\infty, y)$ e $(y, +\infty)$ sono gli aperti U e V che sconnettono E.
Se E è sconnesso, siano U e V due aperti con le proprietà della definizione. Si consideri la funzione $f : U \cup V \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1$ se $x \in U$, $f(x) = -1$ se $x \in V$. Questa funzione è continua perché è localmente costante.
Poiché $f(E)$ non è un intervallo, dal corollario 9 consegue che E non può essere un intervallo.

Testo:

Giuseppe De Marco, *Analisi Uno*, Decibel-Zanichelli.