

Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 4^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Trovare la legge condizionale di Y rispetto a X quando il vettore (X, Y) ha densità congiunta data da:

1. $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}$, $0 \leq x \leq y < +\infty$
2. $f(x, y) = x e^{-x(y+1)}$, $x, y \geq 0$.

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria reale di legge μ , e Y una variabile aleatoria reale di legge condizionale $(\nu_x)_{x \in D}$ rispetto a X , su un opportuno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Supponiamo inoltre che μ ammetta una densità f ed ogni ν_x ammetta una densità g_x per ogni $x \in D$ (le densità si intendono tutte rispetto alla misura di Lebesgue).

1. Detta G la funzione di ripartizione di Y "non condizionale", dimostrare che

$$G(u) = \int_D \nu_x((-\infty, u]) f(x) dx$$

2. Dimostrare che

$$g(u) := \int_D g_x(u) f(x) dx$$

è la densità di Y "non condizionale".

3. Supponiamo ora che (X, Y) sia un vettore aleatorio con densità congiunta $h(x, y)$ rispetto alla misura di Lebesgue su \mathbb{R}^2 . Calcolare le densità marginali f_X , f_Y , la densità condizionale $f_{Y|X}$ e verificare che la formula del punto 2. è vera anche in questo caso.

Esercizio 3. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti, rispettivamente di legge $Po(\lambda)$ e $Po(\mu)$, con $\lambda, \mu > 0$. Calcolare la legge condizionale di X rispetto a $X + Y$.

Esercizio 4. Siano $(X_n)_n$ indipendenti e tali che $X_n \sim Exp(n + 1)$, e N indipendente dalle $(X_n)_n$ e di legge $Po(\mu)$, con $\mu > 0$. Trovare la funzione di ripartizione e la densità della variabile aleatoria X_N .

Suggerimento: considerare la legge condizionale di X_N rispetto a N .

Esercizio 5. Siano $N, (X_i)_{i \geq 1}$ variabili aleatorie indipendenti con $N \sim Ge(p)$ e $X_i \sim Exp(\lambda)$ per ogni $i \geq 1$, con $p \in (0, 1)$, $\lambda > 0$. Definiamo poi

$$Y := \min(X_1, \dots, X_N)$$

1. Si calcoli la legge condizionale di Y rispetto a N .
2. Si calcoli la funzione di ripartizione di Y .
3. Si calcoli $\mathbb{E}[Y]$.

Suggerimento: ricordarsi che, se $Y \in L^+$, allora $\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{Y > t\} dt$.

Soluzioni su <http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/>

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Una versione della densità marginale di X è data da

$$f_X(x) = \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} dy = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

quindi una versione della legge condizionale di Y rispetto a X è data dalla famiglia $(\nu_x)_{x \geq 0}$, dove ν_x ha densità

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y}}{\lambda e^{-\lambda x}} \mathbf{1}_{[x, +\infty)}(y) = \lambda e^{-\lambda(y-x)} \mathbf{1}_{[x, +\infty)}(y)$$

rispetto alla misura di Lebesgue.

2. Una versione della densità marginale di X è data da

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-x(y+1)} dy = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

quindi una versione della legge condizionale di Y rispetto a X è data dalla famiglia $(\nu_x)_{x \geq 0}$, dove ν_x ha densità

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{x e^{-x(y+1)}}{e^{-x}} \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(y) = x e^{-xy} \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(y)$$

rispetto alla misura di Lebesgue. Quindi ν_x è una legge esponenziale di parametro x .

Esercizio 2.

1. Abbiamo che per ogni $u \in \mathbb{R}$,

$$G(u) = \mathbb{P}\{Y \leq u\} = \int_D \nu_x((-\infty, u]) d\mu(x) = \int_D \nu_x((-\infty, u]) f(x) dx$$

2. Per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, utilizzando il teorema di Tonelli si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y \in A\} &= \int_D \nu_x(A) d\mu(x) = \int_D \nu_x(A) f(x) dx = \int_D \int_A g_x(u) du f(x) dx = \\ &= \int_A \left(\int_D g_x(u) f(x) dx \right) du = \int_A g(u) du \end{aligned}$$

che è equivalente alla tesi.

3. Sappiamo che

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx, \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{h(x, y)}{f_X(x)} \mathbf{1}_{\{0 < f_X(x) < +\infty\}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_{Y|X}(u|x) f_X(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{h(x, y)}{f_X(x)} \mathbf{1}_{\{0 < f_X(x) < +\infty\}} f_X(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x, y) \mathbf{1}_{\{0 < f_X(x) < +\infty\}} dx = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx = f_Y(y) \end{aligned}$$

che conferma il risultato del punto 2.

Esercizio 3. Sappiamo che $X + Y \sim Po(\lambda + \mu)$. Poichè $X + Y$ ha legge discreta su \mathbb{N} , l'unica versione della legge condizionale di X rispetto a $X + Y$ ad avere \mathbb{N} come insieme degli indici è $(\nu_z)_{z \in \mathbb{N}}$, dove per ogni $z \in \mathbb{N}$ si ha

$$\nu_z(B) = \mathbb{P}\{X \in B \mid X + Y = z\}$$

Poichè anche X ha legge discreta, per caratterizzare ν_z è sufficiente calcolare le quantità

$$\begin{aligned} \nu_z(\{k\}) &= \mathbb{P}\{X = k \mid X + Y = z\} = \frac{\mathbb{P}\{X = k, X + Y = z\}}{\mathbb{P}\{X + Y = z\}} = \\ &= \frac{\mathbb{P}\{X = k, Y = z - k\}}{\mathbb{P}\{X + Y = z\}} = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{z-k}}{(z-k)!}}{e^{-\lambda-\mu} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}} = \\ &= \frac{z! \lambda^k \mu^{z-k}}{k! (z-k)! (\lambda+\mu)^z} = \binom{z}{k} p^k (1-p)^{z-k} \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $p := \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. Si ha quindi che la legge condizionale di X rispetto a $X + Y$ è una legge binomiale di parametri $X + Y$ e $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Esercizio 4. Possiamo usare la disintegrazione di \mathbb{P} rispetto a N : siccome N ha legge discreta, detta $\mathbb{Q}_n := \mathbb{P}(\cdot \mid \{N = n\})$, possiamo scrivere:

$$F_{X_N}(t) = \mathbb{P}\{X_N \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}_n\{X_N \leq t\} \mathbb{P}\{N = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}_n\{X_n \leq t\} e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}$$

Siccome le $(X_n)_n$ sono indipendenti da N , si ha che $\mathbb{Q}_n\{X_n \leq t\} = \mathbb{P}\{X_n \leq t\} = 1 - e^{-(n+1)t}$, e quindi

$$F_{X_N}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} (1 - e^{-(n+1)t}) = 1 - e^{-\mu-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu e^{-t})^n}{n!} = 1 - e^{-\mu-t} e^{\mu e^{-t}}$$

Si vede quindi che X_N è una variabile aleatoria continua. Per ottenerne la densità, basta derivare F_{X_N} , e si ottiene:

$$F'_{X_N}(t) = (1 + \mu e^{-t}) e^{-\mu-t+\mu e^{-t}}$$

Esercizio 5.

1. Per ogni $t \geq 0$, $n \geq 1$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y > t \mid N = n\} &= \mathbb{P}\{\min(X_1, \dots, X_n) > t \mid N = n\} = \mathbb{P}\{\min(X_1, \dots, X_n) > t\} = \\ &= \mathbb{P}\{X_1 > t, \dots, X_n > t\} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\{X_i > t\} = e^{-\lambda n t} \end{aligned}$$

2. Siccome $Y \geq 0$ q.c., abbiamo che $F_Y(t) = 0$ per ogni $t < 0$, e per ogni $t \geq 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y > t\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Y > t \mid N = n\} \mathbb{P}\{N = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda n t} p (1-p)^{n-1} = \\ &= p e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\lambda t} (1-p))^{n-1} = \frac{p e^{-\lambda t}}{1 - (1-p) e^{-\lambda t}} = \frac{p}{e^{\lambda t} - (1-p)} \end{aligned}$$

e quindi

$$F_Y(t) = 1 - \mathbb{P}\{Y > t\} = \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda t} - (1 - p)} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - (1 - p)e^{-\lambda t}}$$

3. Innanzitutto, siccome $Y \geq 0$ q.c., la sua speranza è ben definita; usando il suggerimento, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{Y > t\} dt = \int_0^{+\infty} \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - (1 - p)e^{-\lambda t}} dt = \\ &= \frac{p}{\lambda(1 - p)} [\log(1 - (1 - p)e^{-\lambda t})]_0^{+\infty} = \frac{-p \log p}{\lambda(1 - p)} \end{aligned}$$

Allo stesso risultato si può giungere applicando la formula della disintegrazione.