

Esercizi di Statistica della 2^a settimana (Corso di Laurea in Biologia, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Una compagnia di assicurazioni garantisce che verrà pagata una cifra a in caso si verifichi un evento E entro l'anno. Se la compagnia stima che questo evento accadrà entro l'anno con probabilità p , quanto deve far pagare la polizza al cliente per avere un guadagno il cui valore atteso sia il 10% di a ?

Esercizio 2. Un'amministratrice di ospedale vuole costruire una speciale nursery per bambini nati sottopeso (≤ 2500 g) e vuole avere un'idea del numero di letti da avere. L'amministratrice suppone che il periodo di ricovero di ogni neonato sia esattamente 4 giorni e quindi è interessata al numero atteso di nascite premature in questo periodo.

1. Se il numero X di nascite premature in un periodo di 4 giorni è distribuito secondo una legge binomiale di parametri $n = 15$ e $p = 0.1$, trovare la probabilità di avere 0, 1, 2, 3, 4, 5 nascite premature su questo periodo.
2. Definita la **funzione di ripartizione** $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ come

$$F_X(t) := \mathbb{P}\{X \leq t\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

calcolare i seguenti valori della funzione di ripartizione di X : $F_X(0)$, $F_X(1)$, $F_X(2)$, $F_X(3)$, $F_X(4)$, $F_X(5)$.

3. L'amministratrice vuole allestire x letti in modo che la probabilità di avere più di x parti prematuri su un periodo di 4 giorni sia meno di $\alpha = 5\%$. Qual è il più piccolo valore x che soddisfa questo criterio?
4. Rispondere al punto 3 con $\alpha = 1\%$.

Esercizio 3.

1. Sia $X \sim B(n, p)$, con $n \geq 1$, $p \in (0, 1)$. Dimostrare che per ogni $k = 0, \dots, n - 1$

$$\mathbb{P}\{X = k + 1\} = \frac{n - k}{k + 1} \cdot \frac{p}{1 - p} \cdot \mathbb{P}\{X = k\}$$

2. Sia ora $X \sim Po(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Dimostrare che per ogni $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}\{X = k + 1\} = \frac{\lambda}{k + 1} \cdot \mathbb{P}\{X = k\}$$

Esercizio 4. Due giocatori disputano una serie di partite che termina solo quando uno dei due arriva a vincerne n . Supponiamo che ogni partita venga vinta, indipendentemente dalle altre, dal primo giocatore con probabilità p e dal secondo giocatore con probabilità $1 - p$. Chiamiamo N la variabile aleatoria corrispondente al numero di partite disputate.

1. Che valori può assumere N ?
2. Trova la legge e il valor medio di N nel caso $n = 2$.
3. Dimostra che questo valore è massimo per $p = 1/2$.

Esercizio 5. Si dispone delle seguenti osservazioni circa i soldati dell'antico esercito prussiano uccisi da un calcio di cavallo, in un anno, nei diversi battaglioni:

n. di morti in un anno in un battaglione	0	1	2	3	4	Totale
n. di battaglioni in cui si è verificato questo	109	65	22	3	1	200

Vogliamo vedere se è ragionevole ritenere che il numero di morti in un anno in un battaglione segua una legge di Poisson.

1. Sia $X \sim Po(\lambda)$, con $\lambda = 0.65$; calcolare $\mathbb{P}\{X = 0\}$, $\mathbb{P}\{X = 1\}$, $\mathbb{P}\{X = 2\}$, $\mathbb{P}\{X \geq 3\}$.
2. Estraiamo ora un battaglione a caso dai precedenti 200, e sia Y la variabile aleatoria "numero di morti per un calcio di cavallo". Calcolare $\mathbb{P}\{Y = 0\}$, $\mathbb{P}\{Y = 1\}$, $\mathbb{P}\{Y = 2\}$, $\mathbb{P}\{Y \geq 3\}$.
3. Possiamo ritenere che X e Y abbiano distribuzioni simili?

Esercizio 6. Il numero di uova deposte da un particolare insetto su una foglia è dato da una variabile aleatoria X di legge $Po(1)$. Tuttavia, questa variabile può essere osservata solo se è positiva, poichè se vale 0 non possiamo sapere se l'insetto studiato fosse effettivamente presente su quella foglia. Se denotiamo con Y il numero osservato di uova, allora abbiamo che

$$\mathbb{P}\{Y = k\} = \mathbb{P}\{X = k | X > 0\}$$

1. Si calcoli $\mathbb{P}\{Y = 0\}$.
2. Si calcoli $\mathbb{P}\{Y = k\}$, per $k = 1, 2, 3$.
3. Si calcoli $\mathbb{P}\{Y = k\}$ per un generico $k \geq 0$.