

**Esercizi di Statistica della 2<sup>a</sup> settimana (Corso di Laurea in Biologia, Università degli Studi di Padova).**

**Esercizio 1.** Una compagnia di assicurazioni garantisce che verrà pagata una cifra  $a$  in caso si verifichi un evento  $E$  entro l'anno. Se la compagnia stima che questo evento accadrà entro l'anno con probabilità  $p$ , quanto deve far pagare la polizza al cliente per avere un guadagno il cui valore atteso sia il 10% di  $a$ ?

**Esercizio 2.** Un'amministratrice di ospedale vuole costruire una speciale nursery per bambini nati sottopeso ( $\leq 2500$  g) e vuole avere un'idea del numero di letti da avere. L'amministratrice suppone che il periodo di ricovero di ogni neonato sia esattamente 4 giorni e quindi è interessata al numero atteso di nascite premature in questo periodo.

1. Se il numero  $X$  di nascite premature in un periodo di 4 giorni è distribuito secondo una legge binomiale di parametri  $n = 15$  e  $p = 0.1$ , trovare la probabilità di avere 0, 1, 2, 3, 4, 5 nascite premature su questo periodo.
2. Definita la **funzione di ripartizione**  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  come

$$F_X(t) := \mathbb{P}\{X \leq t\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

calcolare i seguenti valori della funzione di ripartizione di  $X$ :  $F_X(0)$ ,  $F_X(1)$ ,  $F_X(2)$ ,  $F_X(3)$ ,  $F_X(4)$ ,  $F_X(5)$ .

3. L'amministratrice vuole allestire  $x$  letti in modo che la probabilità di avere più di  $x$  parti prematuri su un periodo di 4 giorni sia meno di  $\alpha = 5\%$ . Qual è il più piccolo valore  $x$  che soddisfa questo criterio?
4. Rispondere al punto 3 con  $\alpha = 1\%$ .

**Esercizio 3.**

1. Sia  $X \sim B(n, p)$ , con  $n \geq 1$ ,  $p \in (0, 1)$ . Dimostrare che per ogni  $k = 0, \dots, n - 1$

$$\mathbb{P}\{X = k + 1\} = \frac{n - k}{k + 1} \cdot \frac{p}{1 - p} \cdot \mathbb{P}\{X = k\}$$

2. Sia ora  $X \sim Po(\lambda)$ , con  $\lambda > 0$ . Dimostrare che per ogni  $k \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}\{X = k + 1\} = \frac{\lambda}{k + 1} \cdot \mathbb{P}\{X = k\}$$

**Esercizio 4.** Due giocatori disputano una serie di partite che termina solo quando uno dei due arriva a vincerne  $n$ . Supponiamo che ogni partita venga vinta, indipendentemente dalle altre, dal primo giocatore con probabilità  $p$  e dal secondo giocatore con probabilità  $1 - p$ . Chiamiamo  $N$  la variabile aleatoria corrispondente al numero di partite disputate.

1. Che valori può assumere  $N$ ?
2. Trova la legge e il valor medio di  $N$  nel caso  $n = 2$ .
3. Dimostra che questo valore è massimo per  $p = 1/2$ .

**Esercizio 5.** Si dispone delle seguenti osservazioni circa i soldati dell'antico esercito prussiano uccisi da un calcio di cavallo, in un anno, nei diversi battaglioni:

n. di morti in un anno in un battaglione	0	1	2	3	4	Totale
n. di battaglioni in cui si è verificato questo	109	65	22	3	1	200

Vogliamo vedere se è ragionevole ritenere che il numero di morti in un anno in un battaglione segua una legge di Poisson.

1. Sia  $X \sim Po(\lambda)$ , con  $\lambda = 0.65$ ; calcolare  $\mathbb{P}\{X = 0\}$ ,  $\mathbb{P}\{X = 1\}$ ,  $\mathbb{P}\{X = 2\}$ ,  $\mathbb{P}\{X \geq 3\}$ .
2. Estraiamo ora un battaglione a caso dai precedenti 200, e sia  $Y$  la variabile aleatoria "numero di morti per un calcio di cavallo". Calcolare  $\mathbb{P}\{Y = 0\}$ ,  $\mathbb{P}\{Y = 1\}$ ,  $\mathbb{P}\{Y = 2\}$ ,  $\mathbb{P}\{Y \geq 3\}$ .
3. Possiamo ritenere che  $X$  e  $Y$  abbiano distribuzioni simili?

**Esercizio 6.** Il numero di uova deposte da un particolare insetto su una foglia è dato da una variabile aleatoria  $X$  di legge  $Po(1)$ . Tuttavia, questa variabile può essere osservata solo se è positiva, poichè se vale 0 non possiamo sapere se l'insetto studiato fosse effettivamente presente su quella foglia. Se denotiamo con  $Y$  il numero osservato di uova, allora abbiamo che

$$\mathbb{P}\{Y = k\} = \mathbb{P}\{X = k | X > 0\}$$

1. Si calcoli  $\mathbb{P}\{Y = 0\}$ .
2. Si calcoli  $\mathbb{P}\{Y = k\}$ , per  $k = 1, 2, 3$ .
3. Si calcoli  $\mathbb{P}\{Y = k\}$  per un generico  $k \geq 0$ .

## Soluzioni

**Esercizio 1.** Chiamiamo  $y$  il premio cercato, e  $X$  il guadagno della compagnia, che sarà uguale a  $y$  se non si verifica l'evento  $E$ , e a  $y - a$  se si verifica  $E$ ; allora  $X$  è una variabile aleatoria discreta, che assume i valori  $y - a$  con probabilità  $\mathbb{P}(E) = p$  e  $y$  con probabilità  $\mathbb{P}(E^c) = 1 - p$ . Abbiamo

$$0.1a = \mathbb{E}[X] = (y - a)\mathbb{P}(E) + y\mathbb{P}(E^c) = (y - a)p + y(1 - p) = y - ap$$

quindi  $y = (0.1 + p)a$ .

### Esercizio 2.

1. Usando la formula ricorsiva della binomiale, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X = 0\} &= (1 - p)^n = (1 - 0.1)^{15} = 0.2058 \\ \mathbb{P}\{X = 1\} &= \mathbb{P}\{X = 0\} \times \frac{p}{1 - p} \times \frac{15}{1} = 0.3431 \\ \mathbb{P}\{X = 2\} &= \mathbb{P}\{X = 1\} \times \frac{p}{1 - p} \times \frac{14}{2} = 0.2668 \\ \mathbb{P}\{X = 3\} &= \mathbb{P}\{X = 2\} \times \frac{p}{1 - p} \times \frac{13}{3} = 0.1285 \\ \mathbb{P}\{X = 4\} &= \mathbb{P}\{X = 3\} \times \frac{p}{1 - p} \times \frac{12}{4} = 0.0428 \\ \mathbb{P}\{X = 5\} &= \mathbb{P}\{X = 4\} \times \frac{p}{1 - p} \times \frac{11}{5} = 0.0104\end{aligned}$$

2. Poichè  $X$  ha legge discreta e a valori interi, abbiamo

$$F_X(n) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}\{X = i\} = F_X(n - 1) + \mathbb{P}\{X = n\}$$

quindi

$$\begin{aligned}F_X(0) &= \mathbb{P}\{X = 0\} = 0.2058 \\ F_X(1) &= F_X(0) + \mathbb{P}\{X = 1\} = 0.2058 + 0.3431 = 0.5490 \\ F_X(2) &= F_X(1) + \mathbb{P}\{X = 2\} = 0.5490 + 0.2668 = 0.8159 \\ F_X(3) &= F_X(2) + \mathbb{P}\{X = 3\} = 0.8159 + 0.1285 = 0.9444 \\ F_X(4) &= F_X(3) + \mathbb{P}\{X = 4\} = 0.9444 + 0.0428 = 0.9872 \\ F_X(5) &= F_X(4) + \mathbb{P}\{X = 5\} = 0.9872 + 0.0104 = 0.9977\end{aligned}$$

3. Cerchiamo il minimo  $x$  (ovviamente intero) tale che  $\mathbb{P}\{X > x\} < \alpha = 0.05$ , cioè  $\mathbb{P}\{X \leq x\} = F_X(x) > 1 - \alpha = 0.95$ . Poichè  $F_X(3) = 0.9444 < 0.95 < 0.9872 = F_X(4)$ , il minimo  $x$  per cui è verificata l'uguaglianza è  $x = 4$ .

4. Cerchiamo il minimo  $x$  tale che  $\mathbb{P}\{X \leq x\} = F_X(x) > 1 - \alpha = 0.99$ . Poichè  $F_X(4) = 0.9872 < 0.99 < 0.9977 = F_X(5)$ , il minimo  $x$  per cui è verificata l'uguaglianza stavolta è  $x = 5$ .

### Esercizio 3.

1. Se  $X \sim B(n, p)$ , allora per ogni  $k = 0, \dots, n-1$  si ha che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X = k+1\} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} = \\ &= \frac{n!}{k!(k+1) \frac{(n-k)!}{n-k}} p \cdot p^k \frac{(1-p)^{n-k}}{1-p} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} = \mathbb{P}\{X = k\} \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}\end{aligned}$$

2. Se  $X \sim Po(\lambda)$ , allora per ogni  $k \geq 0$  si ha che

$$\mathbb{P}\{X = k+1\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k \cdot \lambda}{k! \cdot (k+1)} = \mathbb{P}\{X = k\} \cdot \frac{\lambda}{k+1}$$

**Esercizio 4.** Possiamo rappresentare i risultati delle partite come variabili aleatorie di Bernoulli  $(X_i)_i$  indipendenti di parametro  $p$ , col significato che

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se nell}'i\text{-esima partita vince il giocatore 1,} \\ 0 & \text{se nell}'i\text{-esima partita vince il giocatore 2,} \end{cases}$$

Allora il numero delle partite vinte dal giocatore 1 fino alla partita  $k$  è uguale a  $\sum_{i=1}^k X_i$ , mentre il numero delle partite vinte dal giocatore 2 fino alla partita  $k$  è uguale a  $k - \sum_{i=1}^k X_i$ . Se vogliamo definire formalmente  $N$ , un modo (anche se poco operativo) è

$$N := \min\left\{k \mid \sum_{i=1}^k X_i = n \text{ oppure } k - \sum_{i=1}^k X_i = n\right\}$$

1. Ovviamente viene disputato un numero intero di partite, compreso tra  $n$  e  $2n-1$ . Quindi  $N$  può assumere tutti i valori interi compresi tra  $n$  e  $2n-1$ .

2. Per  $n=2$ ,  $N$  può assumere solo i valori 2 e 3. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{N = 2\} &= \mathbb{P}\{N = 2, \text{ vince il primo}\} + \mathbb{P}\{N = 2, \text{ vince il secondo}\} = \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = X_2 = 1\} + \mathbb{P}\{X_1 = X_2 = 0\} = p^2 + (1-p)^2 \\ \mathbb{P}\{N = 3\} &= \mathbb{P}\{N = 3, \text{ vince il primo}\} + \mathbb{P}\{N = 3, \text{ vince il secondo}\} = \\ &= 2p^2(1-p) + 2(1-p)^2p = 2p(1-p)\end{aligned}$$

oppure

$$\mathbb{P}\{N = 3\} = 1 - \mathbb{P}\{N = 2\} = 1 - p^2 + (1-p)^2 = 2p(1-p)$$

e infine

$$\mathbb{E}[N] = 2(p^2 + (1-p)^2) + 3 \cdot 2p(1-p) = 2 + 2p(1-p)$$

3. Derivando  $\mathbb{E}[N]$  rispetto a  $p$ , si ha:

$$\frac{d}{dp} \mathbb{E}[N] = 2 - 4p > 0 \iff p < \frac{1}{2}$$

quindi si ha la tesi.

### Esercizio 5.

1. Abbiamo:

$$\mathbb{P}\{X = 0\} = e^{-0.65} = 0.522$$

$$\mathbb{P}\{X = 1\} = \mathbb{P}\{X = 0\} \frac{\lambda}{1} = 0.522 \cdot \frac{0.65}{1} = 0.339$$

$$\mathbb{P}\{X = 2\} = \mathbb{P}\{X = 1\} \frac{\lambda}{2} = 0.339 \cdot \frac{0.65}{2} = 0.110$$

$$\mathbb{P}\{X \geq 3\} = 1 - \sum_{k=0}^2 \mathbb{P}\{X = k\} = 1 - 0.522 - 0.339 - 0.110 = 0.029$$

2. In questo caso supponiamo di avere lo spazio campionario  $S$  corrispondente al totale di battaglioni, e l'esperimento aleatorio caratterizzato dal numero di morti per calci di cavallo. Allora  $|S| = 200$ , e siccome la probabilità naturale  $\mathbb{P}$  è quella uniforme, abbiamo

$$\mathbb{P}\{Y = 0\} = \frac{|\{Y = 0\}|}{|S|} = \frac{109}{200} = 0.545$$

$$\mathbb{P}\{Y = 1\} = \frac{|\{Y = 1\}|}{|S|} = \frac{65}{200} = 0.325$$

$$\mathbb{P}\{Y = 2\} = \frac{|\{Y = 2\}|}{|S|} = \frac{22}{200} = 0.110$$

$$\mathbb{P}\{Y \geq 3\} = \frac{|\{Y \geq 3\}|}{|S|} = \frac{3+1}{200} = 0.020$$

3. Le due distribuzioni di  $X$  e  $Y$  sembrano abbastanza simili.

### Esercizio 6.

1. Si ha:

$$\mathbb{P}\{Y = 0\} = \mathbb{P}\{X = 0 | X > 0\} = \frac{\mathbb{P}\{X = 0, X > 0\}}{\mathbb{P}\{X > 0\}} = 0$$

2.

$$\mathbb{P}\{Y = 1\} = \mathbb{P}\{X = 1 | X > 0\} = \frac{\mathbb{P}\{X = 1, X > 0\}}{\mathbb{P}\{X > 0\}} = \frac{\mathbb{P}\{X = 1\}}{1 - \mathbb{P}\{X = 0\}} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = 0.582$$

$$\mathbb{P}\{Y = 2\} = \mathbb{P}\{X = 2 | X > 0\} = \frac{\mathbb{P}\{X = 2, X > 0\}}{\mathbb{P}\{X > 0\}} = \frac{\mathbb{P}\{X = 2\}}{1 - \mathbb{P}\{X = 0\}} = \frac{e^{-1}/2}{1 - e^{-1}} = 0.291$$

$$\mathbb{P}\{Y = 3\} = \mathbb{P}\{X = 3 | X > 0\} = \frac{\mathbb{P}\{X = 3, X > 0\}}{\mathbb{P}\{X > 0\}} = \frac{\mathbb{P}\{X = 3\}}{1 - \mathbb{P}\{X = 0\}} = \frac{e^{-1}/6}{1 - e^{-1}} = 0.097$$

3. In generale per  $k \geq 1$  si ha:

$$\mathbb{P}\{Y = k\} = \mathbb{P}\{X = k | X > 0\} = \frac{\mathbb{P}\{X = k\}}{1 - \mathbb{P}\{X = 0\}} = \frac{e^{-1}/k!}{1 - e^{-1}} = \frac{1/k!}{e - 1}$$

mentre dal punto 1 sappiamo che  $\mathbb{P}\{Y = 0\} = 0$ .