Esercizi di Calcolo delle Probabilità. 2010-2011

David Barbato

A chi è rivolto questo eserciziario.

Questa è una raccolta di esercizi tratti dai testi d'esame dei corsi di "Istituzioni di Probabilità" e "Calcolo delle probabilità" tenuti presso la Facoltà di Scienze Statistiche dell'Università degli Studi di Padova nel periodo 2007-2010. L'eserciziario è stato scritto ad uso degli studenti del corso di "Calcolo delle Probabilità" per la Laurea Magistrale in Scienze Statistiche. Il testo non vuole essere esaustivo e si concentra solo su alcuni degli aspetti del Calcolo delle Probabilità.

Organizzazione dei capitoli

Gli esercizi sono stati suddivisi in cinque gruppi. Il primo gruppo comprende i problemi con ambientazione, in questo tipo di esercizi un ruolo principale lo svolge la capacità di formulare il giusto modello probabilistico in cui leggere il problema. Il secondo gruppo di esercizi comprende i problemi inerenti le distribuzioni discrete e continue, i concetti di indipendenza, condizionamento e valore medio. Il terzo gruppo di esercizi riguarda i vettori aleatori continui in dimensioni 2 o più. Il quarto gruppo raccoglie gli esercizi sulle successioni di variabili aleatorie e i vari tipi di convergenze. Il quinto capitolo raccoglie le prove dell'anno 2009-2010.

Suggerimenti e commenti.

Per eventuali commenti, suggerimenti, critiche e correzioni potete contattarmi all'indirizzo: <barbato@math.unipd.it>.

Chapter 1

Esercizio 1 *Vengono lanciati due dadi regolari a 6 facce.*
(a) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia 9?
(b) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia maggiore di 9?
(c) Calcolare la probabilità che almeno uno dei due dadi abbia dato un risultato maggiore di 4?
(d) Calcolare la probabilità che la somma dei risultati dei due dati sia maggiore di 9 sapendo che c'è almeno un dado con risultato maggiore di 4.

Esercizio 2 *È noto che la probabilità che un uomo sia daltonico è del* 7%, *mentre la probabilità che una donna sia daltonica è solo dello* 0.5%. *Considerato un gruppo di 30 persone costituito da 10 uomini e 20 donne scelti a caso:*
(a) Qual è la probabilità che nel gruppo non ci siano persone daltoniche?
(b) Qual è la probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica?
(c) Indichiamo con Z il numero totale di persone daltoniche del gruppo. Qual è il valor medio di Z?
(d) Scelta a caso una persona nel gruppo, qual è la probabilità che sia un uomo sapendo che si tratta di una persona daltonica?

Esercizio 3 *Una mensa universitaria offre 5 diversi primi, 4 diversi secondi e 3 diverse bibite. Supponiamo che ciascuno studente scelga in maniera casuale e indipendente un primo, un secondo ed una bibita.*
(a) Scelti due studenti, qual è la probabilità che abbiano fatto la stessa ordinazione (stesso primo, stesso secondo e stessa bibita)?
(b) In un tavolo di dieci persone, qual è la probabilità che ci siano almeno due persone che hanno fatto la stessa ordinazione?

(c) Per festeggiare l'inizio dell'anno accademico viene offerto agli studenti un bicchiere di vino rosso o bianco a scelta. Da una statistica risulta che tra coloro che hanno scelto un secondo di carne il 70% sceglie il vino rosso e il 30% il vino bianco, viceversa tra coloro che hanno scelto il secondo di pesce il 70% sceglie il vino bianco e il 30% sceglie quello rosso. Sapendo che ci sono tre secondi di carne e uno di pesce e supponendo che ciascuno studente sceglie il proprio secondo in maniere casuale tra i 4 piatti possibili qual è la probabilità che uno studente che beve vino rosso abbia scelto il secondo di carne?

Esercizio 4 *Una nota concessionaria automobilistica vende 3 diversi modelli di autovetture, disponibili in 5 colori e 3 possibili cilindrate (1900 cc ,2000 cc e 2200 cc). Supponendo che ciascuna combinazione di modello, colore e cilindrata abbia la stessa probabilità di essere scelta da un cliente, calcolare:*
(a) quante sono le possibili combinazioni di modello, colore e cilindrata?
(b) qual è la probabilità che due diversi clienti abbiano ordinato la stessa autovettura (stesso modello, colore e cilindrata)?
(c) Se in una settimana sono state vendute 6 autovetture, qual è la probabilità che siano state vendute almeno due autovetture uguali (stesso modello, colore e cilindrata)?
Da una statistica risulta che il 60% dei clienti che acquistano un'autovettura di cilindrata massima (2200 cc) sceglie di avere il climatizzatore automatico, mentre questa percentuale scende al 45% per le auto di cilindrata inferiore (1900 cc e 2000 cc).
(d) Se in un anno sono state vendute 100 autovetture qual è il valore atteso di autovetture vendute dotate di climatizzatore automatico?
(e) Qual è la probabilità che sia stata venduta un'autovettura con cilindrata massima sapendo che è dotata di climatizzatore automatico?

Esercizio 5 *Una nota società assicurativa ha* $N = 250000$ *assicurati, di cui* 150000 *uomini e* 100000 *donne. Da una statistica risulta che la probabilità di un uomo di avere un incidente grave in un anno è del* 3% *mentre questa probabilità scende a* 1.5% *per le donne.*
(a) Calcolare la probabilità che una persona assicurata (scelta a caso) abbia un incidente grave nel prossimo anno?
(b) Sapendo che una persona assicurata ha avuto un incidente grave qual è la probabilità che si tratti di un uomo?
(c) Calcolare la media e la varianza del numero complessivo di assicurati che

hanno un incidente grave in un anno?
La società assicuratrice ha stimato che se il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno supera 6200 *allora la società andrà in perdita.*
(d) Stimare (utilizzando l'approssimazione gaussiana) la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno superi 6200.

Esercizio 6 *Nel comune di Padova sono presenti* 2500 *lampioni, di cui* 1000 *nel centro storico e 1500 fuori dal centro storico. Ciascun lampione è provvisto di una lampadina che ha una probabilità* $p = \frac{1}{1000}$ *di fulminarsi durante una notte. Supponiamo che tale probabilità sia indipendente dallo stato di usura della lampadina e inoltre che ogni mattina avvenga la sostituzione di tutte le lampadine che si sono fulminate durante la notte.*
(a) Qual è la probabilità che durante la notte non si fulmini nessuna lampadina? (Scrivere la formula.)
(b) Sapendo che durante la notte si è fulminata una sola lampadina, qual è la probabilità che sia una lampadina del centro storico?
(c) Qual è il numero medio e la varianza del numero totale di lampadine fulminate in un anno (365 giorni)?
(d) La ditta che ha avuto l'appalto per la sostituzione delle lampadine nel 2009 ha acquistato 950 lampadine per le sostituzioni. Calcolare la probabilità che siano sufficienti. (Utilizzare l'approssimazione normale.)

Esercizio 7 *Un docente ha* 70 *studenti. Ogni volta che il docente fa ricevimento ciascuno studente può andarci o no, con probabilità* p *e* $1 - p$ *rispettivamente. Supponiamo* $p = 0.01$ *e assumiamo che ciascuno studente scelga di andare o no a ricevimento in maniera indipendente dagli altri.*
(a) Indicare qual è la distribuzione del numero di studenti che si presentano ad ogni ricevimento e calcolarne la media.
(b) Qual è la probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno studente?
(c) Nel corso dell'anno vi sono 50 ricevimenti. Sia T *il numero di ricevimenti in cui non si presenta nessuno. Calcolare il valore medio e la varianza di* T*.*
(d) Stimare la probabilità che vi siano 30 *o più ricevimenti in cui non si presenti nessuno. (Utilizzare l'approssimazione normale.)*

Esercizio 8 *La pizzeria "Da Gigi" vende pizze da asporto e bibite. Il numero di pizze vendute in un giorno di apertura è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro* $\lambda_1 = 40$*, mentre il numero di bibite vendute in un giorno si distribuisce come una variabile di Poisson di parametro* $\lambda_2 = 0.5$*. Consideriamo inoltre il numero di bibite e pizze vendute in giorni diversi come variabili aleatorie indipendenti.*
(a) Calcolare la probabilità che in un giorno scelto a caso (tra quelli in cui la pizzeria è aperta) venga venduta una sola bibita.
(b) In una settimana lavorativa di 6 giorni, qual è la probabilità che vengano vendute almeno 3 bibite?
(c) Il prossimo anno la pizzeria "Da Gigi" rimarra aperta 255 *giorni, calcolare la media e la varianza del numero totale di pizze vendute in un anno.*
(d) Gigi, che è un pizzaiolo parsimonioso, ha deciso che per il prossimo anno metterà da parte 50 *centesimi per ogni pizza venduta. Stimare la probabilità che in un anno (*255 *giorni lavorativi) Gigi riesca a mettere da parte più di* 5000 *euro.*

Esercizio 9 *Nel gioco del superenalotto, giocando una sestina qualsiasi la probabilità di fare* 3 *è circa* $p_3 = 0.0031$.
(a) Se Alfredo gioca due sestine (la giocata minima) ogni concorso (ci sono due concorsi a settimana) per 6 *anni, quante volte farà* 3 *in media?*
(b) Stimare la probabilità che in 6 *anni non realizzi mai* 3.
(c) La probabilità di fare 6 *è circa una su* 623 *milioni. Stimare, utilizzando l'approssimazione Poissoniana, la probabilità che Alfredo realizzi almeno un* 6.
(d) Supponiamo che in un concorso vengano giocate 5 *milioni di sestine (indipendenti e scelte in maniera casuale). Calcolare la media e la varianza del numero di* 3 *realizzati.*
(e) Stimare la probabiltà che giocando 6 *milioni di sestine si realizzino più di* 19000 *tre. (Utilizzare l'approssimazione gaussiana.)*

Esercizio 10 *Una società assicurativa ha assicurato* 200.000 *autovetture:* 140.000 *di grossa cilindrata e* 60.000 *di piccola cilindrata. Da una statistica interna condotta dalla società risulta che una macchina di grossa cilindrata ha una probabilità* $p_1 = \frac{1}{70}$ *di avere un incidente grave entro un anno, mentre per le auto di piccola cilindrata questa probabilità è* $p_2 = \frac{1}{150}$. *Supponiamo infine che gli incidenti siano indipendenti tra di loro.*
(a) Qual è il valore medio e la varianza del numero totale di assicurati che

avranno un incidente grave il prossimo anno?
(b) Se un'autovettura assicurata ha un incidente grave qual è la probabilità che si tratti di un auto di grossa cilindrata?
La società assicuratrice ha stimato che se il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno supera 2.500 *allora la società andrà in perdita.*
(c) Stimare (utilizzando l'approssimazione gaussiana) la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno superi 2.500.
(d) Supponendo che nei prossimi dieci anni il numero di assicurati rimanga costante e che anche le probabilità di avere incidenti rimangano costanti e siano ancora indipendenti.
Calcolare la media e la varianza del numero di incidenti complessivi provocati dagli assicurati nei prossimi 10 anni? Qual è la probabilità che tale numero superi 25.000.

Esercizio 11 *Un'azienda produce componenti per autovetture. Da una statistica risulta che lo* 0.2% *dei componenti presenta un difetto di livello 1 e lo* 0.1% *presenta un difetto di livello 2, mentre il restante* 99.7% *non presenta difetti. Sappiamo inoltre che durante la fase di rodaggio un componente con un difetto di livello 1 ha una probabilità di rompersi del* 65% *mentre questa stessa probabilità sale al* 90% *per i difetti di livello 2.*
(a) Qual è la probabilità che un componente scelto a caso si rompa durante la fase di rodaggio?
(b) Se un componente si rompe durante la fase di rodaggio, qual è la probabilità che abbia un difetto di livello 1?
(c) L'azienda nel mese di Dicembre ha prodotto 60000 *componenti. Qual è la media e la varianza del numero di questi componenti che si romperà durante la fase di rodaggio?*
(d) Stimare la probabilità che durante il rodaggio (dei 60000 *componenti) ci siano più di 150 rotture.*

Esercizio 12 *In uno dei suoi celebri esperimenti, Mendel esaminò il colore di 580 piante di piselli. Supponiamo che ciascuna pianta di piselli abbia una probabilità* $p = \frac{1}{4}$ *di avere i frutti gialli, e che tali probabilità siano indipendenti.*
(a) Calcolare la media e la varianza del numero totale di piante di piselli gialle.

(b) Stimare, utilizzando l'approssimazione normale, la probabilità che il numero totale di piante dai frutti gialli sia (strettamente) compreso tra 120 *e* 180*.*
(c) Mendel osservò 152 piante dai frutti gialli. Calcolare la probabilità che il numero totale di piante dai piselli gialli sia 152*. Dapprima utilizzare la distribuzione binomiale (scrivere solo la formula) e poi stimare tale probabilità utilizzando l'approssimazione normale.*
(d) Supponendo che la probabilità di avere frutti gialli fosse stata invece $p = \frac{1}{2}$ *quale sarebbe stata la probabilità di osservare un numero di piante dai frutti gialli compreso tra* 120 *e* 180*?*

Esercizio 13 *In un'agenzia di vendite porta a porta, lavorano 5 rivenditori, di cui 2 sono esperti e 3 sono neoassunti. Ogni dipendente visita 20 clienti al giorno. Un rivenditore esperto, ogni volta che visita un cliente ha una probabilità di vendita* $p_1 = \frac{1}{20}$*, mentre questa probabilità scende a* $p_2 = \frac{1}{40}$ *per i neoassunti.*
(a) Sia X *il numero di vendite effettuate da un rivenditore esperto in un giorno, indicare la media, la varianza e la distribuzione di* X*.*
(b) Qual è la media e la varianza del numero di vendite effettuate dai 5 rivenditori in un giorno lavorativo? Qual è la media e la varianza del numero di vendite effettuate dai 5 rivenditori in un mese di 20 giorno lavorativi?
(c) Stimare qual è la probabilità che il numero totale di vendite nel mese di Marzo (20 giorni lavorativi) superi 80.
(d) Se oggi è stata effettuata una sola vendita qual è la probabilità che sia stata effettuata da un neoassunto.

Esercizio 14 *Vengono lanciati due dadi a 6 facce regolari. Calcolare le seguenti probabilità.*

(a) Qual è la probabilità che siano entrambi pari?
(b) Qual è la probabilità che ci sia almeno un 5?
(c) Calcolare la probabilità che la somma sia 5.
(d) Calcolare la probabilità che la somma sia minore o uguale a 8.
(e) Calcolare la probabilità che siano entrambi minori di 6.
(f) Sapendo che la somma è uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.
(g) Sapendo che la somma è minore o uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.

Esercizio 15 *Viene lanciata 8 volte una moneta regolare. Calcolare le seguenti probabilità.*
(a) Qual è la probabilità che i primi due lanci siano testa?
(b) Qual è la probabilità che il terzo lancio sia croce?
(c) Qual è la probabilità che i primi 4 lanci siano testa?
(d) Qual è la probabilità che nei primi 3 lanci ci sia almeno una testa e almeno una croce?
(e) Qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci diano lo stesso esito?
(f) Sapendo che i primi 3 lanci hanno dato testa, qual è probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
(g) Sapendo che il terzo lancio ha dato croce, qual è probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
(h) Qual è la probabilità che nei primi 5 lanci ci siano 2 teste e 3 croci (in qualsiasi ordine)?
(i) Sapendo che tra i primi 2 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che tra i primi 2 lanci vi è almeno una croce?
(l) Sapendo che nei primi 3 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che il primo lancio abbia dato testa?

Esercizio 16 *Viene lanciato un dado regolare (a 6 facce) e poi viene lanciata una moneta regolare tante volte quanto il risultato del lancio del dado. Calcolare le seguenti probabilità.*
(a) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata 3 volte.(esattamente 3 volte)
(b) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata almeno 3 volte.
(c) Qual è la probabilità che il primo lancio dia "testa"?
(d) Qual è la probabilità che l'ultimo lancio dia "croce"?
(e) Se supponiamo di sapere che il risultato del dado sia "3", qual è la probabilità che sia uscita "testa" 3 volte?
(f) Qual è la probabilità che il dado abbia dato "3" e sia uscita "testa" 3 volte?
(g) Se supponiamo di sapere che il dado ha dato "4", qual è la probabilità che si sia uscita due volte "testa" e due volte "croce"?
(h) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa"?
(i) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa", sapendo che il dado ha dato un esito minore di 3?
(l) Qual'è la probabilità che il numero di "teste" sia maggiore del numero di "croci"?

Esercizio 17 *Un contadino si affida alla previsioni metereologiche secondo le quali vi è una probabilità dell'* 70% *che la prossima settimana piova. Lui sa che se concimerà il suo campo, allora ci saranno un* 60% *di piante che seccheranno in caso che non piova mentre tale probabilità scende al* 10% *in caso di pioggia. Se invece decide di non concimare il suo campo ci saranno un* 30% *di piante che seccheranno nel caso che non piova e un* 20% *in caso di pioggia.*
(a) Se decide di concimare il suo terreno, qual è la percentuale media di piantine che sopravviveranno?
(b) Cosa gli conviene fare se vuole massimizzare il numero medio di piantine che non seccheranno?

Esercizio 18 *Nel 2008, in Veneto, sono stati celebrati 30000 matrimoni. Assumiamo che ciascun coniuge sia nato in un giorno a caso tra i 365 dell'anno (stiamo supponendo che nessuno sia nato il 29 febbraio). E supponiamo inoltre che tali eventi siano indipendenti.*
(a) Calcolare il numero medio di coppie in cui entrambi i coniugi sono nati il 25 dicembre.
(b) Calcolare il numero medie di coppie che festeggiano il compleanno lo stesso giorno.
(c) Stimare la probabilità che il numero di coppie che festeggia il compleanno lo stesso giorno sia superiore a 100.

Esercizio 19 *Una macchina per il confezionamento del latte riempe i cartoni con una quantità di latte casuale, rappresentata da una v.a.* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. *Il valore di riempimento ideale sarebbe* 1000 *ml, ma vi è una certa tolleranza: una confezione è considerata accettabile se contiene tra* 975 *e* 1025 *ml di latte, e difettosa altrimenti.*
(a) Se $\mu = 1000$ *e* $\sigma = 10$. *Qualè la probabilità che una confezione sia difettosa.*
(b) Supponiamo ancora che $\mu = 1000$, *per quali valori di* σ *la probabilità che una confezione sia difettosa è minore del* 5%*?*

Esercizio 20 *Fiore e Fortunata giocano con una monetina (regolare). Fiore effettua 2 lanci e Fortunata effettua 3 lanci. Indichiamo con* X_1 *e* X_2 *il numero di croci realizzate da Fiore rispettivamente Fortunata.*
(a) Quali sono le distribuzioni di X_1 *e* X_2*?*
(b) Quanto valgono $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}[X_2]$ *e* $\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2]$

(c) Fortunata vince se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Qual è la probabilità che Fiore vinca la sfida?
(d) Sia n un intero maggiore di 0. Supponiamo ora che Fiore effettui n lanci (invece di 2) e Fortunata effettui $n+1$ lanci (invece di 3). Fortunata vince la sfida se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Per quali valori di n la probabilità di vincere di Fortunata è maggiore di quella di Fiore? Per quali valori di n le due probabilità sono uguali?

Esercizio 21 *Ruggero e Lorenzo giocano a freccette. Supponiamo che per ogni lancio abbiano entrambi il* 60% *di probabilità di colpire il bersaglio: Ruggero ha il* 20% *di probabilità di fare 100 punti, il* 20% *di fare 50 punti e il* 20% *di fare 25 punti; mentre Lorenzo ha il* 10% *di probabilità di fare 100 punti, il* 20% *di fare 50 punti e il* 30% *di fare 25 punti. Entrambi lanciano due freccette e poi sommano i punti. Indichiamo con X_1, X_2 e X (risp. Y_1, Y_2, Y) il risultato del primo, del secondo e della somma dei lanci effettuati da Ruggero (risp. Lorenzo).*
(a) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale zero punti?
(b) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 75 punti?
(c) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 100 punti?
(d) Quale è la distribuzione di X? (Verificare che la somma delle probabilità sia effettivamente 1.)
(e) Quale è la distribuzione di Y?

1.1 Soluzioni

Esercizio 1

Ci sono 6 esiti possibili per il primo dado e 6 esiti possibili per il secondo dado. Quindi per il principio fondamentale del calcolo combinatorio per la coppia di risultati dei due dadi ci sono $6 \cdot 6 = 36$ esiti possibili. Infine l'ipotesi "dadi regolari" ci assicura che tutti e 36 gli esiti sono equiprobabili.
Se consideriamo le somme abbiamo il seguente schema:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Per rispondere alle domande (a), (b), (c) e (d) è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

(a) Evidenziando in rosso i casi favorevoli si ricava:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{somma dei dadi uguale a 9}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

(b)

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{somma dei dadi maggiore di 9}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(c)

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di 4}) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

(d)

				6	7
				7	8
				8	9
				9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

P(Somma dei dadi maggiore di 9|Almeno uno dei due dadi è maggiore di 4) $=$ $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Esercizio 2

Siano X_1, ... ,X_{20} variabili aleatorie associate alle 20 donne con $X_i = 1$ se la i-esima donna è daltonica e $X_i = 0$ se la i-esima donna non è daltonica. Siano Y_1, ... ,Y_{10} variabili aleatorie con $Y_i = 1$ se l'i-esimo uomo è daltonico e $Y_i = 0$ se l'i-esimo uomo non è daltonico.
Le X_i e Y_i costituiscono una famiglia di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione bernoulliana, le X_i sono bernoulliane di parametro $p_1 = 0.005$ mentre le Y_i sono bernoulliane di parametro $p_2 = 0.07$
(a)

$$\begin{aligned}
&P(\text{"non ci sono persone daltoniche nel gruppo"}) = \\
&= P(X_1 = 0, ..., X_{20} = 0, Y_1 = 0, ..., Y_{10} = 0) = \\
&= P(X_1 = 0) \cdot ... \cdot P(X_{20} = 0) \cdot P(Y_1 = 0) \cdot ... \cdot P(Y_{10} = 0) = \\
&= (1 - 0.005)^{20} \cdot (1 - 0.07)^{10} \simeq 0.4378
\end{aligned}$$

(b) Indichiamo con X e Y rispettivamente il numero totale di donne e uomini daltonici del gruppo, cioè $X = X_1 + ... + X_{20}$ e $Y = Y_1 + ... + Y_{10}$. Le variabili X, Y quali somme di variabili aleatorie bernoulliane sono variabili aleatorie con distribuzion binomiale, $X \sim Bin(0.005, 20)$ e $Y \sim Bin(0.07, 10)$
La probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica è $P(X = 0, Y = 1)$.

$$\begin{aligned}
&P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0) \cdot P(Y = 1) \\
&P(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot (1 - 0.005)^{20} = 0.9046 \\
&P(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot (1 - 0.07)^{9} \cdot 0.07^{1} = 0.3643 \\
&P(X = 0, Y = 1) \simeq 0.33
\end{aligned}$$

(c) $E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 20 * 0.005 + 10 * 0.07 = 0.8$

(d) Denotiamo con F (risp. M) l'evento la persona scelta a caso è una donna (risp. un uomo), denotiamo con D l'evento si tratta di una persona daltonica. Dalle ipotesi si ha: $P(F) = \frac{2}{3}$, $P(M) = \frac{1}{3}$, $P(D|F) = 0.005$, $P(D|M) = 0.07$
Per calcolare $P(M|D)$ utilizziamo la formula di Bayes.

$$P(M|D) = \frac{P(D|M) \cdot P(M)}{P(D|M) \cdot P(M) + P(D|F) \cdot P(F)} = \frac{0.07 \cdot \frac{1}{3}}{0.07 \cdot \frac{1}{3} + 0.005 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{7}{8}$$

Esercizio 3

(a) Le combinazioni possibili di primo, secondo e bibita sono $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Per la casualità e l'indipendenza delle scelte si ha che ciascuna delle possibili combinazioni di primo, secondo e bibita ha probabilità $1/60$.
Indichiamo con i numeri da 1 a 60 le possibili ordinazioni e chiamiamo X_1 e X_2 le ordinazioni del primo e del secondo studente. Bisogna calcolare $P(X_1 = X_2)$.

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \cdots + P(X_1 = 60, X_2 = 60)$$

$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{3600} + \frac{1}{3600} + \cdots + \frac{1}{3600}$$

$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{60}$$

Dunque la probabilità che due persone abbiano ordinato le stesse cose è $1/60$.
(b) Consideriamo l'evento $A :=$ "ci sono almeno due persone con la stessa ordinazione e l'evento $B := A^c =$ "tutte e dieci le persone hanno fatto ordinazioni diverse". Allora si ha $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Per calcolare $\mathbb{P}(B)$ è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.
"Casi favorevoli"$= 60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51$
"Casi possibili"$= 60^{10}$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51}{60^{10}}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51}{60^{10}}$$

(c) Denotiamo con A_1 A_2 ed E gli eventi:
$A_1 :=$ "È stato scelto un secondo di carne"
$A_2 :=$ "È stato scelto un secondo di pesce"

$E :=$ "È stato scelto del vino rosso".
Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{3}{4} \qquad P(A_2) = \frac{1}{4} \qquad P(E|A_1) = 0.7 \qquad P(E|A_2) = 0.3$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{7}{8} = 87.5\%$$

Esercizio 4 (a) Utilizzando il principio fondamentale del calcolo combinatorio si ha che le combinazioni possibili di modello, colore e cilindrata sono $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$.
(b) Indicando con i numeri da 1 a 45 le 45 scelte possibili e denotando con X_1 e X_2 le autovetture scelte dal primo e secondo cliente, la probabilità cercata è $P(X_1 = X_2)$.

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \cdots + P(X_1 = 45, X_2 = 45)$$

$$P(X_1 = X_2) = \overbrace{\frac{1}{45 \cdot 45} + \frac{1}{45 \cdot 45} + \cdots + \frac{1}{45 \cdot 45}}^{45 \text{ volte}} = \frac{1}{45}$$

(c) Consideriamo l'evento $A :=$ "ci sono almeno due clienti che hanno comprato la stessa autovettura e l'evento $B := A^c =$ "tutti e 6 i clienti hanno scelto autovetture diverse". Allora si ha $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Per calcolare $\mathbb{P}(B)$ è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.
"Casi favorevoli"$= 45 \cdot 44 \cdot \ldots \cdot 40$
"Casi possibili"$= 45^6$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{45 \cdot 44 \cdot \ldots \cdot 40}{45^6}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{45 \cdot 44 \cdot \ldots \cdot 40}{45^6} \cong 0.294 = 29.4\%$$

(d) Denotiamo con $(Y_i)_{i\in\{1,2,\dots,100\}}$ le variabili aleatorie così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesima autovettura ha il climatizzatore automatico.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}$ denota il numero totale di autovetture con climatizzatore automatico vendute. Il valore atteso di autovetture vendute è dato da $E[Y] = E[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}] = E[Y_1] + E[Y_2] + \cdots + E[Y_{100}]$

$$E[Y_i] = P(Y_i = 1) = \frac{1}{3} \cdot 0.60 + \frac{2}{3} \cdot 0.45 = 0.5$$

dunque

$$E[Y] = E[Y_i] \cdot 100 = 0.5 \cdot 100 = 50$$

(e) Consideriamo gli eventi:
A_1 := "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 2200cc"
A_2 := "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 1900cc oppure 2000 cc"
E := "È stato scelto il climatizzatore automatico".
Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{1}{3} \qquad P(A_2) = \frac{2}{3} \qquad P(E|A_1) = 0.60 \qquad P(E|A_2) = 0.45$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{2}{5} = 40\%$$

Esercizio 5

Sia U l'evento l'assicurato è un uomo
D l'evento l'assicurato è un donna
I l'evento l'assicurato avrà un incidente nel prossimo anno.
Per ipotesi $P(U) = 150000/250000 = 0.60 = 60\%$,
$P(D) = 100000/250000 = 0.40 = 40\%$,
$P(I|U) = 3\% = 0.03$ e $P(I|D) = 1.5\% = 0.015$

(a) $P(I) = P(I \cap U) + P(I \cap D) = P(I|U) \cdot P(U) + P(I|D) \cdot P(D) = 0.03 \cdot 0.60 + 0.015 \cdot 0.40 = 0.024$
(b) Utilizziamo la formula di Bayes:

$$P(U|I) = \frac{P(I|U) \cdot P(U)}{P(I|U) \cdot P(U) + P(I|D) \cdot P(D)} = \frac{0.018}{0.024} = \frac{3}{4} = 75\%$$

(c) Siano $(X_i)_{i \in \{1,2,...100000\}}$ e $(Y_i)_{i \in \{1,2,...150000\}}$ le seguenti variabili:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesima donna assicurata avrà un incidente il prossimo anno} \\ 0 & \text{l'iesima donna assicurata non avrà un incidente il prossimo anno} \end{cases}$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesimo uomo assicurato avrà un incidente il prossimo anno} \\ 0 & \text{l'iesimo uomo assicurato non avrà un incidente il prossimo anno} \end{cases}$$

$(X_i)_{i \in \{1,2,...100000\}}$ famiglia di variabili aleatorie indipendenti bernoulliane di parametro 0.015
$(Y_i)_{i \in \{1,2,...100000\}}$ famiglia di variabili aleatorie indipendenti bernoulliane di parametro 0.03
Il numero totale di incidenti del prossimo anno sarà

$$T = \sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i$$

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_{100000}] + \mathbb{E}[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{150000}] =$$

$$= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_{100000}] + \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] + \cdots + \mathbb{E}[Y_{150000}] =$$

$$= \overbrace{0.015 + 0.015 + \cdots + 0.015}^{100000 \text{ volte}} + \overbrace{0.03 + 0.03 + \cdots + 0.03}^{150000 \text{ volte}} =$$

$$= 100000 \cdot 0.015 + 150000 \cdot 0.03 = 6000$$

$$\mathrm{VAR}[T] = \mathrm{VAR}[\sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i] =$$

$$= \mathrm{VAR}[X_1 + X_2 + \cdots + X_{100000}] + \mathrm{VAR}[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{150000}] =$$

$$= \mathrm{VAR}[X_1] + \mathrm{VAR}[X_2] + \cdots + \mathrm{VAR}[X_{100000}] + \mathrm{VAR}[Y_1] + \mathrm{VAR}[Y_2] + \cdots + \mathrm{VAR}[Y_{150000}] =$$

$$= \overbrace{0.015 \cdot (1-0.015) + 0.015 \cdot (1-0.015) + \cdots + 0.015 \cdot (1-0.015)}^{100000 \text{ volte}} +$$

$$+ \overbrace{0.03 \cdot (1-0.03) + 0.03 \cdot (1-0.03) + \cdots + 0.03 \cdot (1-0.03)}^{150000 \text{ volte}} =$$

$$= 100000 \cdot 0.015 \cdot (1-0.015) + 150000 \cdot 0.03 \cdot (1-0.03) = 5842.5$$

Un altro approccio possibile per la risoluzione del punto (c) poteva essere quello di considerare le variabili aleatorie X e Y, $X := \sum_{i=1}^{100000} X_i$ e $Y := \sum_{i=1}^{150000} Y_i$. X e Y sono variabili aleatorie binomiali indipendenti, la X di parametri 100000 e 0.015 e la Y di parametri 150000 e 0.03. Dunque $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ e $\mathrm{VAR}[T] = \mathrm{VAR}[X] + \mathrm{VAR}[Y]$.
(d) Sia $\mu = \mathbb{E}[T] = 6000$ e sia $\sigma = \sqrt{\mathrm{VAR}[T]} = 76.436$. Approssimare T con una variabile aleatoria gaussiana vuol dire scegliere una variabile aleatoria gaussiana W con la stessa media e varianza di T cioè $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \sim \mathcal{N}(6000, 5842.5)$. Utilizzando l'approssimazione di continuità la probabilità cercata diventa:

$$P(T > 6200) \approx P(W > 6200.5)$$

per ricondursi ad una normale standard si utilizza l'approccio usuale di sottrarre la media e dividere per la deviazione standard.

$$P(W > 6200.5) = P(\frac{W-\mu}{\sigma} > \frac{6200.5-\mu}{\sigma})$$

Sia $Z := \frac{W-\mu}{\sigma}$, Z è una normale standard e svolgendo i calcoli a destra risulta:

$$P(W > 6200.5) = P(Z > 2.623)$$

Dunque

$$P(W > 6200.5) = 1 - \phi(2.623) = 0.0044 = 0.44\%$$

Esercizio 6

(a) Vi sono in totale $n = 2500$ lampadine e ciascuna ha una probabilità $p = \frac{1}{1000}$ di fulminarsi. Denotiamo con X il numero totale di lampadine fulminate nella notte. X ha una distribuzione Binomiale di parametri $n = 2500$ e $p = \frac{1}{1000}$ dunque

$$P(X = 0) = \binom{n}{0}(1-p)^n p^0 = (0.999)^{2500} \simeq 0.082$$

Una altra possibile risoluzione del quesito (a). La probabilità di una lampadina di non fulminarsi è $1-p = 0.999$ dunque per l'indipendenza la probabilità per 2500 lampadine di non fulminarsi durante la notte è:

$$\overbrace{0.999 \cdot 0.999 \cdot \ldots \cdot 0.999}^{2500 \text{ volte}} = 0.999^{2500} \simeq 0.082$$

(b) Tutte le lampadine hanno uguale probabilità di fulminarsi, nel centro storico vi sono 1000 lampadine su un totale di 2500. Possiamo calcolare la probabilità cercata come rapporto tra casi FAVOREVOLI e casi POSSIBILI.

$$P(\text{La lampadina fulminata è nel centro storico}) = \frac{1000}{2500} = 0.4 = 40\%$$

(c) Indichiamo con Y il numero di lampadine fulminate in un anno. Sia $X_{i,j}$ con $i \in \{1, 2, \ldots, 2500\ \}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, 365\ \}$ una variabile bernoulliana con:

$$X_{i,j} =$$

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Se la } i\text{-esima lampadina il giorno } j\text{-esimo si è fulminata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $Y = \sum_{i,j} X_{i,j}$, Y è somma di $2500 \cdot 365$ variabili bernoulliane di paramentro $p = \frac{1}{1000}$. Dunque Y è una variabile aleatoria binomiale di parametri $p = \frac{1}{1000}$ e $N = 2500 \cdot 365 = 912500$.

$$\mathbb{E}[Y] = Np = 912.5$$

$$\text{VAR}[Y] = Np(1-p) \simeq 911.59$$

(d) Approssiamo Y con una variabile aleatoria normale W con media e varianza uguali a media e varianza di Y.

$$W \sim \mathcal{N}(912.5, 911.6)$$

applicando la correzione di continuità si ha

$$P(Y \leq 950) \simeq P(W < 950.5) = P\left(\frac{W - 912.5}{30.19} < \frac{950.5 - 912.5}{30.19}\right)$$

Sia $Z = \frac{W-912.5}{30.19}$ dunque $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$P(W < 950.5) = P(Z < 1.26) = \Phi(1.26) = 0.89617$$

Esercizio 7

(a) Sia $n = 70$ il numero degli studenti e sia $p = 0.01$ la probabilità che uno studente vada a ricevimento un certo giorno. Fissato un giorno di ricevimento, sia X la variabile aleatoria che indica il numero totale di studenti presenti al ricevimento. Siano $Y_1, \ldots, Y_{70}$ le variabili aleatorie a valori in $\{0, 1\}$ così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{Se l'}i\text{-esimo studente è andato a ricevimento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora Y_i sono 70 v.a. indipendenti Bernoulliane di parametro $p = 0.01$ e $X = \sum_{i=1}^{70} Y_i$ ha distribuzione binomiale $X \sim Bin(n = 70, p = 0.01)$ e la sua media è data da $\mathbb{E}[X] = np = 0.7$.
(b) La probabilà cercata è

$$P(X = 0) = \binom{70}{0}^0 \cdot p \cdot (1-p)^{70} = (0.99)^{70} \simeq 0.4948$$

Se avessimo deciso di stimare $P(X = 0)$ approssimando la X con una v.a. Y di Poisson avremmo avuto $Y \sim Poisson(0.7)$ e
$P(Y = 0) = e^{-0.7} \cdot \frac{0.7^0}{0!} \simeq 0.4965$.
(c) La probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno è $p_2 = 0.4948$ (calcolata nel punto (b)). Poiché vi sono in tutto 50 ricevimenti allora la v.a. T ha distribuzione binomiale $T \sim Bin(50, 0.4948)$.

$$\mathbb{E}[T] = 50 \cdot p_2 \simeq 24.74$$

$$Var[T] = 50 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2) \simeq 12.50$$

(d) Sia $\mu = E[T]$ e sia $\sigma^2 = Var[T]$. Sia W una variabile aletoria normale di media μ e varianza σ^2. Utilizzando la correzione di continuità possiamo stimare la probabilità cercata $P(T \geq 30)$ con $P(W > 29.5)$.

$$P(W > 29.5) = 1 - P(W < 29.5) = 1 - P\left(\frac{W-\mu}{\sigma} < \frac{29.5-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{29.5-\mu}{\sigma}\right) \simeq 1 - \phi(1.35) \simeq 0.09$$

Esercizio 8

(a) Indichiamo con X il numero di bibete vendute, X è una variabile di Poisson di parametro 0.5 dunque ha distribuzione:

$$P(X=k)=\frac{0.5^k}{k!}e^{-0.5} \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

Dunque per $k=1$ si ha:

$$P(X=1)=\frac{0.5}{1}e^{-0.5}\simeq 0.303$$

(b) Siano $X_1, X_2, \ldots, X_6$ le variabili aleatorie che indicano le bibite vendute nei sei giorni lavorativi della settimana, sia $X_s := X_1 + X_2 + \ldots + X_6$ il numero di bibite vendute in una settimana di sei giorni lavorativi. Poiché X_s è somma di variabili di Poisson indipendenti allora anche X_s sarà di Poisson e la sua media sarà la somma delle medie cioè $X_s \sim Poisson(3)$. Dove $3 = 6\cdot 0.5$.

$$P(X_s\geq 3)=1-P(X_s<3)=1-(P(X_s=0)+P(X_s=1)+P(X_s=2))=$$
$$=1-\left(\frac{3^0}{0!}e^{-3}+\frac{3^1}{1!}e^{-3}+\frac{3^2}{2!}e^{-3}\right)=1-\frac{17}{2}e^{-3}\simeq 0.5768=57.68\%$$

(c) Denotiamo con $Y_1, Y_2, \ldots Y_{255}$ il numero di bibite vendute nei 255 giorni di apertura della pizzeria e sia $Y := Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{255}$ il numero di pizze vendute in un anno.

Metodo di risoluzione 1: $\mathbb{E}[Y_i] = 40$, $VAR[Y_i] = 40$ e dunque per l'indipendenza delle Y_i si ha $\mathbb{E}[Y] = 255*40 = 10200$ e $VAR[Y] = 255\cdot VAR[Y_i] = 10200$.

Metodo di risoluzione 2: poiché Y è somma di variabili aleatorie di Poisson indipendenti si ha $Y \sim Poisson(260*40 = 10200)$ e dunque $\mathbb{E}[Y] = 10200$ e $VAR[Y] = 10200$.

(d) Denotiamo ancora con Y le pizze vendute in un anno di 255 giorni lavoratori e con $Z := Y\cdot 0.50$ i soldi in euro messi da parte. Il problema si riduce a stimare la probabilità che $Y > 10000$ oppure che $Z > 5000$. Dal punto (c) sappiamo che $\mathbb{E}[Y] = 10200$ e $VAR[Y] = 10200$.

Metodo 1: Per stimare $P(Y > 10000)$ possiamo approssimare Y con una variabile aleatoria gaussiana T di media $\mu = 10200$ e varianza $\sigma^2 = 10200$. Allora utilizzando la correzione di continuità si ha:

$$P(Y>10000)\simeq P(T>10000.5)=1-P(T\leq 10000.5)=$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{10000.5 - \mu}{\sigma}\right) \simeq 1 - \phi(-1.98) = \phi(1.98) \simeq 97.6\%$$

Metodo 2: Supponiamo invece di voler stimare $P(Z > 5000)$, allora prima di tutto dobbiamo calcolare speranza e varianza di Z. Poiché $Z = Y \cdot 0.5$ si ha $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Y] \cdot 0.5 = 5100$ e

$$VAR[Z] = VAR[Y] \cdot (0.5)^2 = 2550.$$

(La variabile aleatoria Z non è di Poisson!). La variabile aleatoria Z non è a valori interi quindi non è possibile applicare la correzione di continuità. Senza usare la correzione di continuità si ottiene il seguente risultato:

$$P(Z > 5000) \simeq P(S > 5000) = 1 - P(S \leq 5000) =$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{5000 - 5100}{\sqrt{2550}}\right) \simeq 1 - \phi(-1.98) = \phi(1.98) \simeq 97.6\%$$

Esercizio 9

(a) 3.9

(b) 2%

(c) circa $2 \cdot 10^{-6}$ ovvero $\frac{1}{500000}$

(d) 15500, 15452

(e) 0.0016

Esercizio 10

(a) 2400, 2368.76

(b) $\frac{5}{6}$

(c) $1 - \phi(2.06) = 0.0197$

(d) 24000, 23687.6, $1 - \phi(6.5) \simeq 0$

Esercizio 11

(a) 0.22%

(b) $\frac{13}{22}$

(c) 132, 131.7

(d) $1 - \phi(1.61) = 0.0537$

Esercizio 12

(a) $145, \; 108.75$

(b) $\phi(3.31) - \phi(-2.35) = 0.99014$

(c) $\binom{580}{152} \cdot (\frac{1}{4})^{152} \cdot (\frac{3}{4})^{428}, \quad \phi(0.72) - \phi(0.62) = 0.03187$

(d) $\phi(-9.18) - \phi(-14.08) \simeq 0$

Esercizio 13

(a) $1, \; \frac{19}{20}, \; \mathrm{Bin}(20, \frac{1}{20})$

(b) $3.5 \;\; \frac{269}{80}, \; 70, \; \frac{269}{4}$

(c) $1 - \phi(1.28) = 0.10027$

(d) $\frac{19}{45}$

Chapter 2

Esercizio 22 *Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X abbia una distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{2}$ e che Y abbia invece una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$. Sia infine $Z = X + Y$ e $T = X \cdot Y$.*
(a) Calcolare il valore atteso di Z e di T.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione di Z.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione di T.
(d) Calcolare $P(Z > 2T)$.

Esercizio 23 *Siano X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X_1 abbia una distribuzione binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 2$ che X_2 abbia una distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ di parametri $\mu = 1$ e $\sigma = 1$ e che X_3 abbia invece una distribuzione di Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ di parametro $\lambda = 1$. Siano infine $T = X_1 + X_2 + X_3$, $Z = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ e $W = \max(X_1, X_2, X_3)$.*
(a) Calcolare il valore atteso e varianza di T.
(b) Calcolare il valore atteso e varianza di Z (utilizzare la formula $VAR(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2$).
(c) Calcolare $P(W < \frac{1}{2})$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[(X_1 + X_2) \cdot (X_2 + X_3)]$.

Esercizio 24 *Siano X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X_1 abbia una distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{3}$ che X_2 abbia una distribuzione binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 3$ che X_3 abbia una distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ di parametri $\mu = 1$ e $\sigma = 2$. Siano infine $T = X_1 + 2X_2 + 3X_3$, $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$.*
(a) Calcolare il valore atteso e la varianza di T.
(b) Calcolare $P(X_3 < X_1)$.

(c) Calcolare $P(Z > \frac{1}{2})$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[\frac{1}{1+X_2}]$.

Esercizio 25 *Sia* $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $p = \frac{1}{2}$ *e* $\lambda = \frac{1}{2}$. *Siano* X_1, X_2 *e* X_3 *tre variabili aleotorie indipendenti. Sia* X_1 *v.a. con distribuzione binomiale di parametri* $(3, p)$. *Sia* X_2 *v.a. con* $P(X_2 = x_1) = p_1$ *e* $P(X_2 = x_2) = 1 - p$. *Sia* X_3 *v.a. con distribuzione esponenziale di parametro* λ. *Siano infine* $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ *e* $Z = X_2 + X_3$.
(a) Calcolare media e varianza di T.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}]$.
(c) Calcolare $P(Z \le 1)$, $P(Z \le 3)$ *e* $P(Z \le 5)$.
(d) Calcolare F_Z.

Esercizio 26 *Siano* X_1, X_2 *e* X_3 *tre variabili aleatorie indipendenti.*
Sia X_1 *v.a. con distribuzione bernoulliana di parametro* $p = \frac{1}{4}$.
Sia X_2 *v.a. con distribuzione normale* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *di parametri* $\mu = 5$ *e* $\sigma = 3$.
Sia X_3 *una variabile aleatoria discreta a valori in* $\{4, 7\}$ *con* $P(X_3 = 4) = \frac{1}{3}$ *e* $P(X_3 = 7) = \frac{2}{3}$.
Siano infine $T = 2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ *e* $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$.
(a) Calcolare media, varianza e momento del secondo ordine di X_3.
(b) Calcolare media e varianza di T.
(c) Calcolare $P(Z > 6)$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[(X_1 - X_2) \cdot (X_1 + X_2)]$.

Esercizio 27 *Siano* X_1, X_2 *e* X_3 *tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che* X_1 *abbia una distribuzione bernoulliana di parametro* $p = \frac{1}{4}$ *che* X_2 *abbia una distribuzione esponenziale di parametro* $\lambda_1 = 2$ *e che* X_3 *abbia una distribuzione di Poisson di parametro* $\lambda_2 = 3$. *Siano infine* $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$, $Z = X_1 + X_2 + X_3$ *e* $W = \min\{X_1, X_2\}$.
(a) Calcolare il valore atteso e la varianza di T.
(b) Calcolare $P(Z < \frac{1}{2})$.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione di W.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X_2}]$.

Esercizio 28 *Sia* X_1, X_2 *e* X_3 *tre variabili aleotorie indipendenti. Sia* X_1 *v.a. con distribuzione uniforme su* $(0, 4)$. *Sia* X_2 *v.a. normale di media* $\mu = 3$ *e varianza* $\sigma^2 = 4$. *Sia* X_3 *v.a. con distribuzione bernoulliana di parametro* $p = \frac{1}{2}$. *Siano infine* $Z = X_1 + X_2 + 7 \cdot X_3$ *e* $W = max(X_1, X_3)$.

(a) Calcolare media e varianza di Z.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}[X_2^2]$. $\mathbb{E}[X_3^3]$.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[X_3 \cdot (X_3+1) \cdot (X_3+X_2)]$.
(d) Calcolare $P(X_3 > X_1)$.
(e) Calcolare F_W.

Esercizio 29 *Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti e sia $Z := \min\{X, Y\}$. Supponiamo inoltre che X sia discreta con $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{1}{3}$ e $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ mentre Y sia una variabile aleatoria continua con densità f_Y:*

$$f_Y(y) := \begin{cases} \frac{2\cos(y)+5\sin(y)}{7} & y \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & y \notin (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[X^2]$.

(c) Calcolare $VAR[X]$.

(d) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

(e) Calcolare $\mathbb{E}[Y^2]$.

(f) Calcolare $VAR[Y]$.

(g) Calcolare F_X. Scrivere tutti i passaggi.
(h) Calcolare F_Y. Scrivere tutti i passaggi.
(i) Calcolare $P(X < Y)$. Scrivere tutti i passaggi.
(l) Calcolare F_Z. Scrivere tutti i passaggi.

Esercizio 30 *Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia Poissoniana di parametro $\lambda = 3$, Y sia Binomiale di parametri $n = 2$ e $p = \frac{1}{2}$, mentre Z ha distribuzione normale di media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$.*

(a) Calcolare $\mathbb{E}[X + Y - Z]$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[XYZ]$.

(c) Calcolare $\mathbb{E}[X^2 + Y^2 + Z^2]$.

(d) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Y)^2]$.

(e) Calcolare $P(X + Y = 0)$.

(f) Calcolare $P(X \cdot Y = 0)$.

(g) Calcolare $P(Y \cdot W = 0)$.

(h) Calcolare $P(Y \cdot W > 0)$.

(i) Calcolare $\mathbb{E}[Y^6]$. *Scrivere tutti i passaggi.*
(l) Calcolare $P[X = Y]$. *Scrivere tutti i passaggi.*
(m) Calcolare $P(Z > Y)$. *Scrivere tutti i passaggi. (Utilizzare* $\phi(0) = 0.5$, $\phi(1) = 0.84134$ *e* $\phi(2) = 0.97725$*)*

Esercizio 31 *Siano* X, Y *e* Z *tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che* X *sia esponenziale di parametro* $\lambda = 2$, Y *sia uniforme sull'intervallo* $(0, 10)$, *mentre* Z *ha distribuzione discreta con* $P(Z = -1) = \frac{1}{4}$, $P(Z = 0) = \frac{1}{2}$ *e* $P(Z = +1) = \frac{1}{4}$.
(a) Calcolare $\mathbb{E}[X + Y + Z]$.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[XYZ]$.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[Z^2]$.
(d) Calcolare $VAR[Z]$.
(e) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Z)^2]$.
(f) Calcolare $\mathbb{E}[e^Z]$.
(g) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X+Z}]$.
(h) Calcolare $P(Y < Z)$.
(i) Calcolare $\mathbb{E}[\cos(\pi Z)]$.
(l) Calcolare $P(YZ > 2)$.

2.1 Soluzioni

Esercizio 22
(a) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = p + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = p \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
Dove la seconda uguaglianza segue dall'indipendenza di X e Y.
(b)

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \le z) = P(Z \le z, X = 0) + P(Z \le z, X = 1) \\
&= P(X + Y \le z, X = 0) + P(X + Y \le z, X = 1) \\
&= P(Y \le z, X = 0) + P(1 + Y \le z, X = 1) \\
&= P(Y \le z, X = 0) + P(Y \le z - 1, X = 1) \\
&= P(Y \le z) \cdot P(X = 0) + P(Y \le z - 1) \cdot P(X = 1) \\
&= F_Y(z) \cdot 0.5 + F_Y(z - 1) \cdot 0.5
\end{aligned}$$

Sapendo che Y è esponenziale di parametro 3, si ha

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - e^{-3y} & y > 0 \end{cases}$$

e dunque considerando i tre casi, $z < 0$, $0 \le z < 1$ e $z \ge 1$.

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 0.5 \cdot (1 - e^{-3z}) & 0 \le z < 1 \\ 0.5 \cdot (1 - e^{-3z}) + 0.5 \cdot (1 - e^{-3(z-1)}) & z \ge 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= P(T \le t) = P(T \le t, X = 0) + P(T \le t, X = 1) \\
&= P(X \cdot Y \le z, X = 0) + P(X \cdot Y \le t, X = 1) \\
&= P(0 \le t, X = 0) + P(Y \le t, X = 1) \\
&= P(0 \le t) \cdot P(X = 0) + P(Y \le t) \cdot P(X = 1) \\
&= P(t \ge 0) \cdot 0.5 + F_Y(t) \cdot 0.5
\end{aligned}$$

considerando i due casi, $t < 0$, e $t \ge 0$ si ha:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.5 + 0.5 \cdot (1 - e^{-3t}) & t \ge 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned}
P(Z > 2T) &= P(X + Y > 2X \cdot Y) \\
&= P(X + Y > 2X \cdot Y, X = 0) + P(X + Y > 2X \cdot Y, X = 1) \\
&= P(Y > 0, X = 0) + P(1 + Y > 2Y, X = 1) \\
&= P(Y > 0) \cdot P(X = 0) + P(Y < 1) \cdot P(X = 1) \\
&= 1 \cdot 0.5 + (1 - e^{-3}) \cdot 0.5 \\
&= 1 - 0.5 \cdot e^{-3}
\end{aligned}$$

Esercizio 23

$$\mathbb{E}[X_1] = np = 1 \qquad \mathrm{VAR}(X_1) = np(1-p) = \tfrac{1}{2} \qquad \mathbb{E}[X_1^2] = np(1-p) + n^2p^2 = \tfrac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}[X_2] = \mu = 1 \qquad \mathrm{VAR}(X_2) = \sigma^2 = 1 \qquad \mathbb{E}[X_2^2] = \sigma^2 + \mu^2 = 2$$

$$\mathbb{E}[X_3] = \lambda = 1 \qquad \mathrm{VAR}(X_3) = \lambda = 1 \qquad \mathbb{E}[X_3^2] = \lambda + \lambda^2 = 2$$

Dove $\mathbb{E}[X_i^2]$ può essere ottenuto anche come $\mathbb{E}[X_i^2] = (\mathbb{E}[X_i])^2 + \mathrm{VAR}(X_i)$.
(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{VAR}(T) &= \mathrm{VAR}(X_1 + X_2 + X_3) = \mathrm{VAR}(X_1) + \mathrm{VAR}(X_2) + \mathrm{VAR}(X_3) = \\
&= \tfrac{1}{2} + 1 + 1 = \tfrac{5}{2} = 2.5
\end{aligned}$$

(b)

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] = \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 6$$

$$\mathrm{VAR}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = 6 - 1 = 5$$

(c)

$$P\left(W < \frac{1}{2}\right) = P\left(\max(X_1, X_2, X_3) < \frac{1}{2}\right) = P\left(X_1 < \frac{1}{2},\ X_2 < \frac{1}{2},\ X_3 < \frac{1}{2}\right) =$$

$$= P\left(X_1 < \frac{1}{2}\right) \cdot P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) \cdot P\left(X_3 < \frac{1}{2}\right) = P(X_1 = 0) \cdot P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) \cdot P(X_3 = 0)$$

Utilizzando le definizioni di densità discreta per variabili binomiali e di Poisson si ha :

$$P(X_1 = 0) = (1-p)^n = \frac{1}{4} \qquad P(X_3 = 0) = e^{-\lambda} = e^{-1}$$

Per calcolare $P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right)$ bisogna ricondursi ad una normale standard:

$$P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma} < \frac{\frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma} < -\frac{1}{2}\right)$$

$$P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) = 1 - \phi(\frac{1}{2}) = 0.3085$$

dunque

$$P\left(W < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot 0.3085 \cdot e^{-1} = 0.0284$$

(d) Prima di tutto osserviamo che le variabili $(X_1 + X_2)$ e $(X_2 + X_3)$ **non** sono indipendenti (perché hanno entrambe X_2 come addendo). Sviluppando il prodotto si ha:

$$\mathbb{E}[(X_1 + X_2) \cdot (X_2 + X_3)] = \mathbb{E}[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2^2 + X_2X_3] =$$

$$= \mathbb{E}[X_1X_2] + \mathbb{E}[X_1X_3] + \mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[X_2X_3] =$$

$$= \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_3] + \mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] =$$

$$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 + 1 \cdot 1 = 5$$

Esercizio 24

$$\mathbb{E}[X_1] = \tfrac{1}{3} \qquad \mathrm{VAR}(X_1) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{9}$$

$$\mathbb{E}[X_2] = 3 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \qquad \mathrm{VAR}(X_2) = 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4}$$

$$\mathbb{E}[X_3] = \mu = 1 \qquad \mathrm{VAR}(X_3) = \sigma^2 = 4$$

(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 + 2X_2 + 3X_3] = \mathbb{E}[X_1] + 2\mathbb{E}[X_2] + 3\mathbb{E}[X_3] =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = \frac{1}{3} + 3 + 3 = \frac{19}{3}$$

$$\mathrm{VAR}(T) = \mathrm{VAR}(X_1+2X_2+3X_3) = \mathrm{VAR}(X_1)+4\cdot\mathrm{VAR}(X_2)+9\cdot\mathrm{VAR}(X_3) =$$
$$= \frac{2}{9} + 3 + 36 = \frac{353}{9}$$

(b)

$$P(X_3 < X_1) = P(X_3 < X_1 | X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_3 < X_1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) =$$
$$= P(X_3 < 0 | X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_3 < 1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) =$$
$$= P(X_3 < 0)\frac{2}{3} + P(X_3 < 1)\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} < \frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} < \frac{1-1}{2}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\Phi\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\Phi(0) = \frac{2}{3}\cdot\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{3}\cdot\Phi(0)$$
$$\frac{2}{3}\cdot(0.30854) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = 0.37236$$

(c)

$$P(Z > \frac{1}{2}) = 1 - P(Z \le \frac{1}{2}) =$$
$$1 - P(X_1 \le \frac{1}{2})\cdot P(X_2 \le \frac{1}{2})\cdot P(X_3 \le \frac{1}{2}) =$$
$$1 - P(X_1 = 0)\cdot P(X_2 = 0)\cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} \le \frac{\frac{1}{2} - 1}{2}\right) =$$
$$= 1 - \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Phi\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{12}\cdot\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 0.9666$$

(d)

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X_2}\right] = \sum_{k=0}^{3}\frac{1}{1+k}\cdot P(X_2 = k) =$$
$$1\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} =$$
$$= \frac{12+18+12+3}{12\cdot 8} = \frac{45}{96} = \frac{15}{32}$$

Esercizio 25

$$\mathbb{E}[X_1] = np = \tfrac{3}{2} \qquad \mathrm{VAR}(X_1) = np(1-p) = \tfrac{3}{4} \qquad \mathbb{E}[X_1^2] = 3$$

$$\mathbb{E}[X_2] = 3 \qquad \mathrm{VAR}(X_2) = 1 \qquad \mathbb{E}[X_2^2] = 10$$

$$\mathbb{E}[X_3] = \tfrac{1}{\lambda} = 2 \qquad \mathrm{VAR}(X_3) = \tfrac{1}{\lambda^2} = 4 \qquad \mathbb{E}[X_3^2] = 8$$

Dove $\mathbb{E}[X_2] = 2 \cdot P(X = 2) + 4 \cdot P(X = 4) = 3$.
$\mathbb{E}[X_2^2] = 2^2 \cdot P(X = 2) + 4^2 \cdot P(X = 4) = 10$
$\mathrm{VAR}(X_2) = \mathbb{E}[X_2^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = 1$
Mentre per X_1 e X_2 si può utilizzare la formula $\mathbb{E}[X_i^2] = (\mathbb{E}[X_i])^2 + \mathrm{VAR}(X_i)$.
(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 9$$

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] = \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = 3 \cdot 10 \cdot 8 = 240$$

$$\mathrm{VAR}(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2 = 240 - 81 = 159$$

(b)

$$\mathbb{E}[e^{X_1 + X_2}] = \mathbb{E}[e^{X_1} \cdot e^{X_2}] = \mathbb{E}[e^{X_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{X_2}]$$

Calcoliamo separatamente $\mathbb{E}[e^{X_1}]$ $\mathbb{E}[e^{X_2}]$.

$$\mathbb{E}[e^{X_1}] = \sum_k e^k \cdot P(X_1 = k) =$$

$$= e^0 \cdot P(X_1 = 0) + e^1 \cdot P(X_1 = 1) + e^2 \cdot P(X_1 = 2) + e^3 \cdot P(X_1 = 3) =$$

$$\mathbb{E}[e^{X_1}] = \frac{1 + 3e + 3e^2 + e^3}{8}$$

$$\mathbb{E}[e^{X_2}] = \sum_k e^k \cdot P(X_2 = k) = e^2 \cdot P(X_2 = 2) + e^4 \cdot P(X_2 = 4) =$$

$$\mathbb{E}[e^{X_2}] = \frac{e^2 + e^4}{2}$$

Dunque

$$\mathbb{E}[e^{X_1 + X_2}] = \frac{1 + 3e + 3e^2 + e^3}{8} \cdot \frac{e^2 + e^4}{2}$$

(c) $Z = X_2 + X_3$. Prima di tutto osserviamo che X_2 può assumere solo i valori 2 e 4 mentre X_3 è una v.a. a valori in $(0, +\infty)$ con funaione di ripartizione:

$$F_{X_3}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

$$P(Z \leq 1) = P(X_2 + X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_3 \leq -1) + P(X_2 = 4, X_3 \leq -3) = 0$$

Si procede in maniera analoga per $P(Z \leq 3)$

$$P(Z \leq 3) = P(X_2 + X_3 \leq 3) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 3) =$$
$$= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 3) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, X_3 \leq -1) =$$
$$= P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4) \cdot P(X_3 \leq -1) =$$
$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 1}) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

Calcoliamo infine $P(Z \leq 5)$

$$P(Z \leq 5) = P(X_2 + X_3 \leq 5) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 5) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 5) =$$
$$= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 5) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 5) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4) \cdot P(X_3 \leq 1) =$$
$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{3}{2} \cdot 1}) + \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 1}) = 1 - \frac{e^{-\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

(d) Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il punto (c) si ottiene

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 2 \\ \frac{1 - e^{-\frac{z-2}{2}}}{2} & 2 \leq z < 4 \\ 1 - \frac{e^{-\frac{z-2}{2}} + e^{-\frac{z-4}{2}}}{2} & z \geq 4 \end{cases}$$

Esercizio 26

$\mathbb{E}[X_1] = p = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\mathrm{VAR}(X_1) = p(1-p) = \frac{3}{16}$ $\quad$ $\mathbb{E}[X_1^2] = p = \frac{1}{4}$

$\mathbb{E}[X_2] = \mu = 5$ $\quad$ $\mathrm{VAR}(X_2) = \sigma^2 = 9$ $\quad$ $\mathbb{E}[X_2^2] = \sigma^2 + \mu^2 = 34$

$\mathbb{E}[X_3] = 6$ $\quad$ $\mathrm{VAR}(X_3) = 2$ $\quad$ $\mathbb{E}[X_3^2] = 38$

(a) Dove $\mathbb{E}[X_3]$, $\mathbb{E}[X_3^2]$ e $\mathrm{Var}(X_3)$ sono state ottenute tramite calcolo esplicito:

$$\mathbb{E}[X_3] = \sum_k k \cdot P(X_3 = k) = 4 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{2}{3} = 6$$

$$\mathbb{E}[X_3^2] = \sum_k k^2 \cdot P(X_3 = k) = 16 \cdot \frac{1}{3} + 49 \cdot \frac{2}{3} = 38$$

$$\mathrm{Var}(X_3) = \mathbb{E}[X_3^2] - \mathbb{E}[X_3]^2 = 38 - 6^2 = 2$$

(b) Per l'indipendenza delle variabili aleatorie si ha che la speranza del prodotto è uguale al prodotto delle speranze

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = 2 \cdot \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 6 = 15$$

$$\mathrm{Var}(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2$$

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[(2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)^2] = \mathbb{E}[4 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] =$$

$$= 4 \cdot \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 34 \cdot 38 = 1292$$

$$\mathrm{Var}(T) = 1292 - 15^2 = 1067$$

(c)

$$P(Z > 6) = P(max\{X_1, X_2, X_3\} > 6) = 1 - P(max\{X_1, X_2, X_3\} \leq 6) =$$

$$= 1 - P(X_1 \leq 6, X_2 \leq 6, X_3 \leq 6) = 1 - P(X_1 \leq 6) \cdot P(X_2 \leq 6) \cdot P(X_3 \leq 6) =$$

$$1 - 1 \cdot F_{X_2}(6) \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{\phi(\frac{6-\mu}{\sigma})}{3} = 1 - \frac{\phi(\frac{1}{3})}{3} \simeq 0.79$$

(d)

$$\mathbb{E}[(X_1 - X_2) \cdot (X_1 + X_2)] = \mathbb{E}[(X_1^2 - X_2^2)] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_2^2] = \frac{1}{4} - 34 = -33.75$$

Esercizio 27

(a) $\frac{3}{8}$, $\frac{87}{64}$

(b) $\frac{3}{4}(e^{-3} - e^{-4}) \simeq 0.0236$

(c) $F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1 - \frac{1}{4}(e^{-2w}) & 0 \le w < 1 \\ 1 & w \ge 1 \end{cases}$

(d) 2

Esercizio 28

(a) $\frac{17}{2}$, $\frac{211}{12}$

(b) 2, 13, $\frac{1}{2}$

(c) 4

(d) $\frac{1}{8}$

(e) $F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ \frac{w}{8} & 0 \le w < 1 \\ \frac{w}{4} & 1 \le w < 4 \\ 1 & w \ge 4 \end{cases}$

Chapter 3

Esercizio 32 *Sia* (X,Y) *un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{(x+y+3)^3} & x>0, y>0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e le densità delle variabili marginali X *e* Y.
(c) Calcolare $\mathbb{P}(X>3)$ *e* $\mathbb{P}(X>3|Y>3)$.
(d) Calcolare la funzione di ripartizione del vettore (X,Y).
(e) Sia $Z := min\{X,Y\}$ *calcolare la funzione di ripartizione di* Z.

Esercizio 33 *Sia* (X,Y) *un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(x^2+xy+y^2) & \textit{se } 0<x<2, 0<y<3 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X *e* Y.
(c) Calcolare le medie $\mathbb{E}[X]$ *e* $\mathbb{E}[Y]$.
(d) Calcolare la covarianza $cov(X,Y)$, *(utilizzare la formula* $cov(X,Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$*)*
(e) Calcolare la funzione di ripartizione congiunta $F_{(X,Y)}$.

Esercizio 34 *Sia* (X,Y) *un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(e^x+e^{x+y}) & \textit{se } -1<x<1, 0<y<2 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[e^{-X}]$.
(d) X e Y sono indipendenti?

Esercizio 35 *Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x, y) \begin{cases} \alpha & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y > 0, \ x < 1, \ y < 1 \}$
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione cumulativa delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare $\mathbb{P}(X > 0)$ e $\mathbb{P}(X > 0|Y > 0)$.
(d) Calcolare la coviarinza $Cov[X, Y]$.
(e) Calcolare la funzione di ripartizione cumulativa del vettore (X, Y).
(f) Sia $Z := min\{X, Y\}$ calcolare la funzione d ripartizione di Z.

Esercizio 36 *Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha y & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - 1| < 1, \ |y - 2| < 2 \}$
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare le funzioni di densità e le funzioni di ripartizione delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare $\mathbb{P}(X + Y > 1)$ e $\mathbb{P}(X + Y > 1|Y < 1)$.
(d) Calcolare la funzione di ripartizione del vettore (X, Y).
Sia $S = X + Y$ e $T = Y$.
(e) Calcolare la densità congiunta del vettore (S, T).
(f) Le variabili X e Y sono indipendenti? Le variabili S e T sono indipendenti?

Esercizio 37 *Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x, y) \begin{cases} \alpha(e^x + e^{-y}) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, \ -1 < y < 0 \ \}$
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X *e* Y.
(c) Calcolare $\mathbb{P}(X + Y < 0)$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[e^Y]$.

Esercizio 38 *Sia* (X,Y) *un vettore aleatorio con densità continua* $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3}) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{\pi}{2}, y > 1\}$.
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare le funzioni di ripartizione e le densità delle variabili marginali X *e* Y.
(c) X *e* Y *sono indipendenti?*
(d) Calcolare $P(X < 1)$ *e* $P(X < 1|Y < 2)$.

Esercizio 39 *Sia* (X,Y) *un vettore aleatorio con densità continua* $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(2x^2y + 1) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y - 1| < 1\}$.
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X *e* Y.
(c) Calcolare la covarianza $cov(X,Y)$.
(d) Sia $S = \frac{X}{Y}$ *e sia* $T = Y$. *Calcolare il dominio e la densità del vettore aleatorio* (S,T).

Esercizio 40 *Sia* (X,Y) *un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x^3y^2}) & se\ 1 < x < 2, 1 < y < 3 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X *e* Y.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$.
(d) Calcolare la covarianza $cov(X,Y)$.

Esercizio 41 *Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x,y) \begin{cases} \alpha\,(y+\cos(x)) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| < \pi,\ 1 < y < 2\ \}$
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione congiunta $F_{(X,Y)}(x,y)$.
(d) Sia $T = X + Y^2$ e sia $S = Y^2$ calcolare la densità del vettore aleatorio (S,T).

Esercizio 42 *Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità continua $f_{(X,Y)}$:*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+3y-xy-1) & (x,y) \in Q \\ 0 & (x,y) \notin Q \end{cases}$$

Dove Q è il quadrato definito da: $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-3| < 1$ e $|y-1| < 1\}$.
(a) Calcolare le funzioni di ripartizione e le densità delle variabili marginali X e Y.
(b)Cosa si può dire delle distribuzioni delle variabili aleatorie X e Y? Appartengono a qualche tipo di distribuzione nota? Quanto valgono $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$?
(c) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$ e $COV[X,Y]$.
(d) Calcolare la funzione di ripartizione congiunta $F_{(X,Y)}$.

Esercizio 43 *Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità continua $f_{(X,Y)}$:*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(\frac{e^{-y}}{x^2}) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y > 1\}$.
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[\frac{e^Y}{Y^2X^2} + 1]$.
(d) Le variabili X e Y sono indipendenti? Quanto vale la covarianza $cov[X,Y]$?

3.1 Soluzioni

Esercizio 32
(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = 1$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \tfrac{\alpha}{(x+y+3)^3}\ dxdy = \\
&= \alpha \int_0^{+\infty} \left| \tfrac{1}{-2(x+y+3)^2} \right|_{x=0}^{x=+\infty} dy = \\
&= \alpha \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{2(y+3)^2} dy = \tfrac{\alpha}{2} \left| \tfrac{1}{-(y+3)} \right|_{y=0}^{y=+\infty} = \tfrac{\alpha}{6}
\end{aligned}$$

Quindi si ha $\alpha = 6$.
(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy$$

Per $x \leq 0$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dy = 0$
Per $x > 0$ invece

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{(x+y+3)^3}\ dy =$$

$$= \left| \frac{6}{-2(x+y+3)^2} \right|_{y=0}^{y=+\infty} = \frac{3}{(3+x)^2}$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{3}{(x+3)^2} & x > 0 \end{cases}$$

si procede in maniera analogo per f_Y ottenendo:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{3}{(y+3)^2} & y > 0 \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds$$

Per $x \leq 0$ si ha $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(X)}(s)\ ds = \int_{-\infty}^{x} 0\ ds = 0$
Per $x > 0$ invece

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds = \int_{0}^{x} \frac{3}{(s+3)^2}\ ds =$$

$$= \left| \frac{3}{-(s+3)} \right|_{s=0}^{s=+x} = 1 - \frac{3}{(3+x)} = \frac{x}{3+x}$$

Dunque

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{3+x} & x > 0 \end{cases}$$

si procede in maniera analogo per F_Y ottenendo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{y}{3+y} & y > 0 \end{cases}$$

(c)

$$P(X > 3) = 1 - F_X(3) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$P(X > 3|Y > 3) = \frac{P(X > 3, Y > 3)}{P(Y > 3)}$$

$P(Y > 3) = 1 - F_Y(3) = \frac{1}{2} = 0.5$

$$P(X > 3, Y > 3) = \int_{3}^{+\infty}\int_{3}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy =$$

$$= \int_{3}^{+\infty}\int_{3}^{+\infty} \frac{6}{(x+y+3)^3}\ dxdy = \int_{3}^{+\infty} \left| \frac{6}{-2(x+y+3)^2} \right|_{x=3}^{x=+\infty} dy =$$

$$= \int_{3}^{+\infty} \frac{3}{(y+6)^2} dy = \left| \frac{3}{-(y+6)} \right|_{y=3}^{y=+\infty} = \frac{1}{3}$$

$$P(X > 3|Y > 3) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

(d)

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(s,t)\ dsdt$$

Se $x \leq 0$ oppure $y \leq 0$ allora
$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} 0 \; dsdt = 0$
Se invece $x > 0$ e $y > 0$ allora:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(s,t) \; dsdt =$$

$$= \int_{0}^{y}\int_{0}^{x} \frac{\alpha}{(3+s+t)^3} \; dsdt = \int_{0}^{y} \left| \frac{6}{-2(3+s+t)^2} \right|_{s=0}^{s=x} dt =$$

$$= \int_{0}^{y} \frac{3}{(3+t)^2} - \frac{3}{(3+x+t)^2} \; dt =$$

$$= \left| \frac{3}{-1(3+t)} - \frac{3}{-1(3+x+t)} \right|_{t=0}^{t=y} = 1 - \frac{3}{3+x} - \frac{3}{3+y} + \frac{3}{3+x+y}$$

Dunque:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{3+x} - \frac{3}{3+y} + \frac{3}{3+x+y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(e) $Z = \min(X,Y)$. Per $z \leq 0$ si ha chiaramente $F_Z(z) = 0$. Per $z > 0$ ci sono due metodi di risoluzione possibili. Primo metodo: per $z > 0$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= F_X(z) + F_Y(z) - F_{(X,Y)}(z,z) = \tfrac{2z}{3+z} - 1 + \tfrac{3}{3+z} + \tfrac{3}{3+z} - \tfrac{3}{3+2z} \\ &= 1 - \tfrac{3}{3+2z} = \tfrac{2z}{3+2z} \end{aligned}$$

Secondo metodo: per $z > 0$

$$F_Z(z) = 1 - \int_{z}^{+\infty}\int_{z}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \; dxdy = 1 - \int_{z}^{+\infty}\int_{z}^{+\infty} \frac{\alpha}{(3+x+y)^3} \; dxdy =$$

$$= 1 - \int_{z}^{+\infty} \left| \frac{6}{-2(3+x+y)^2} \right|_{x=z}^{x=\infty} dy = 1 - \int_{z}^{+\infty} \frac{3}{(3+z+y)^2} \; dy =$$

$$= 1 - \left| \frac{3}{-(3+z+y)} \right|_{y=z}^{y=+\infty} = 1 - \frac{3}{3+2z} = \frac{2z}{3+2z}$$

Esercizio 33
(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = \int_0^2\int_0^3 \alpha(x^2+xy+y^2)\ dydx =$$

$$= \alpha\int_0^3 \left| x^2y + x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\ \right|_{y=0}^{y=3} dx = \alpha\int_0^2 3x^2 + \frac{9}{2}x + 9dy =$$

$$= \alpha\left|3\frac{x^3}{3} + \frac{9}{2}\frac{x^2}{2} + 9x\ \right|_{x=0}^{x=2} = \alpha(8+9+18) = 35\alpha$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{35}$.
(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy$$

Per $x \notin (0,2)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dy = 0$
Per $x \in (0,2)$ invece

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_0^3 \alpha(x^2+xy+y^2)\ dy =$$

$$= \alpha\left|x^2y + x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\ \right|_{y=0}^{y=3} = \alpha\left(3x^2 + \frac{9}{2}x + 9\right)$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,2) \\ \frac{1}{35}\left(3x^2 + \frac{9}{2}x + 9\right) & x \in (0,2) \end{cases}$$

si procede in maniera analogo per f_Y ottenendo:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,3) \\ \frac{1}{35}\left(2y^2 + 2y + \frac{8}{3}\right) & y \in (0,3) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds$$

Per $x \leq 0$ si ha $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(X)}(s)\ ds = \int_{-\infty}^{x} 0\ ds = 0$
Per $x \geq 2$ si ha $F_X(x) = P(X \leq x) = 1$
Per $0 < x < 2$ invece

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds = \int_{0}^{x} \alpha\left(3s^2 + \frac{9}{2}s + 9\right)\ ds =$$

$$= \alpha \left|3\frac{s^3}{3} + \frac{9}{2}\frac{s^2}{2} + 9s\ \right|_{s=0}^{s=+x} = \alpha\left(x^3 + \frac{9}{4}x^2 + 9x\right)$$

Dunque

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{35}\left(x^3 + \frac{9}{4}x^2 + 9x\right) & 0 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

si procede in maniera analogo per F_Y ottenendo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{1}{35}\left(\frac{2}{3}y^3 + y^2 + \frac{8}{3}y\right) & 0 < y < 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

(c)

$$\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x)\ dx = \int_0^2 x\alpha\left(3x^2 + \frac{9}{2}x + 9\right)\ dx =$$

$$= \alpha \int_0^2 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 9x\ dx = \alpha \left|3\frac{x^4}{4} + \frac{9}{2}\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{x=2} =$$

$$= \alpha\,(12 + 12 + 18) = \frac{42}{35} = \frac{6}{5} = 1.2$$

allo stesso modo per Y si ottiene:

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{141}{70} \approx 2.014$$

(d) Utilizziamo la formula $\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = \int_0^2 \int_0^3 xy\alpha(x^2 + xy + y^2)dydx =$$

$$= \alpha \int_0^2 \int_0^3 (x^3y + x^2y^2 + xy^3)dydx = \alpha \int_0^2 \left|(x^3\frac{y^2}{2} + x^2\frac{y^3}{3} + x\frac{y^4}{4})\right|_{y=0}^{y=3} dx =$$

$$= \alpha \int_0^2 \frac{9}{2}x^3 + 9x^2 + \frac{81}{4}x dx = \alpha \left| \frac{9}{2}\frac{x^4}{4} + 9\frac{x^3}{3} + \frac{81}{4}\frac{x^2}{2} \right|_{x=0}^{x=2} =$$

$$= \alpha \left(18 + 24 + \frac{81}{2} \right) = \frac{33}{14}$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{33}{14} - \frac{6}{5} \cdot \frac{141}{70} = -\frac{3}{50} = -0.06$$

(e)

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(s, t)\ dsdt$$

Se $x \leq 0$ oppure $y \leq 0$ allora
$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} 0\ dsdt = 0$
Se $x \geq 2$ allora $F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$
Se $y \geq 3$ allora $F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) = F_X(x)$
Se infine $x \in (0, 2)$ e $y \in (0, 3)$ allora:

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(s, t)\ dsdt =$$

$$= \int_0^y\int_0^x \alpha(s^2 + st + t^2)\ dsdt = \alpha \int_0^y \left| \frac{s^3}{3} + t\frac{s^2}{2} + t^2 s \right|_{s=0}^{s=x} dt =$$

$$= \alpha \int_0^y \frac{x^3}{3} + t\frac{x^2}{2} + t^2 x dt = \alpha \left| \frac{x^3}{3}t + \frac{x^2}{2}\frac{t^2}{2} + x\frac{t^3}{3} \right|_{t=0}^{t=y} =$$

$$= \alpha \left(\frac{yx^3}{3} + \frac{y^2x^2}{4} + \frac{xy^3}{3} \right) = \frac{1}{35} \left(\frac{yx^3}{3} + \frac{y^2x^2}{4} + \frac{xy^3}{3} \right)$$

Dunque:

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ oppure } y \leq 0 \\ \frac{1}{35}\left(\frac{yx^3}{3} + \frac{y^2x^2}{4} + \frac{xy^3}{3} \right) & \text{se } x \in (0, 2), y \in (0, 3) \\ F_Y(y) & \text{se } x \geq 2 \\ F_X(x) & \text{se } y \geq 3 \end{cases}$$

Esercizio 34
(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} \alpha(e^x + e^{x+y})\ dydx =$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} e^x(1+e^y)\ dydx = \alpha \int_{-1}^{1} |e^x(y+e^y)\ |_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1} 2e^x + e^x e^2 - e^x e^0 dx = \alpha \int_{-1}^{1} e^x(e^2+1)dx =$$

$$= \alpha \left| e^x(e^2+1) \right|_{x=-1}^{x=1} = \alpha(e - e^1)(e^2+1)$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{(e-e^{-1})(e^2+1)}$.
(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy$$

Per $x \notin (-1,1)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dy = 0$
Per $x \in (-1,1)$ invece

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{0}^{2} \alpha \cdot e^x(1+e^y)\ dy =$$

$$= \alpha\, |e^x(y+e^y)\ |_{y=0}^{y=2} = \alpha \cdot e^x \left(2 + e^2 - 1\right) = \frac{e^x\,(e^2+1)}{(e-e^1)(e^2+1)} = \frac{e^x}{e-e^{-1}}$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (-1,1) \\ \frac{e^x}{e-e^{-1}} & x \in (-1,1) \end{cases}$$

si procede in maniera analoga per f_Y,
Per $y \notin (0,2)$ si ha $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dx = 0$
Per $y \in (0,2)$ invece

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \int_{-1}^{1} \alpha \cdot e^x(1+e^y)\ dx =$$

$$= \alpha \left| e^x(1+e^y) \right|_{x=-1}^{x=1} = \alpha \cdot \left(e^1 - e^{-1}\right)(1+e^y) = \frac{(1+e^y)\,(e-e^{-1})}{(e-e^1)(e^2+1)} = \frac{1+e^y}{e^2+1}$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,2) \\ \frac{1+e^y}{e^2+1} & y \in (0,2) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds$$

Per $x \leq -1$ si ha $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(X)}(s)\ ds = \int_{-\infty}^{x} 0\ ds = 0$
Per $x \geq 1$ si ha $F_X(x) = P(X \leq x) = 1$
Per $-1 < x < 1$ invece

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds = \int_{-1}^{x} \frac{e^s}{e-e^{-1}}\ ds = \frac{e^x - e^{-1}}{e-e^{-1}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{e^x - e^{-1}}{e-e^{-1}} & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

si procede in maniera analoga per F_Y ottenendo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{y+e^y-1}{1+e^2} & 0 < y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$$

(c)

$$\mathbb{E}[e^{-X}] = \int e^{-x} f_X(x)\ dx = \int_{-1}^{1} e^{-x} \frac{e^x}{e-e^{-1}}\ dx = \frac{2}{e-e^{-1}}$$

(d) X e Y sono indipendenti, basta verificare che $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ per ogni x e y.

Esercizio 35
(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = 1$$

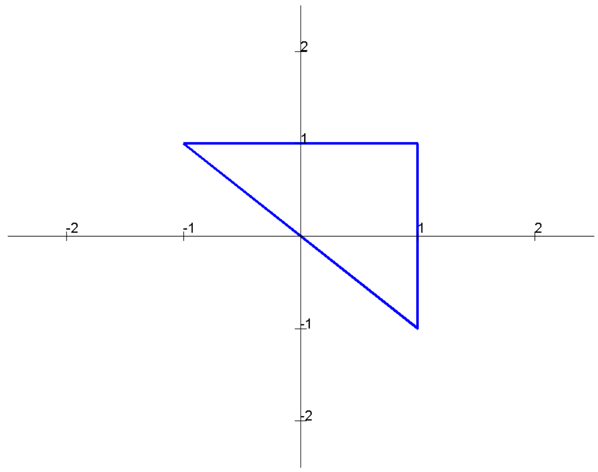

Figure 3.1: Dominio D. Esercizio 35

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = \iint_D \alpha\ dxdy = \alpha \cdot \iint_D\ dxdy = \alpha \cdot \text{Area}(D) = 2\alpha$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{2}$.
(b) Per $t \leq -1$ si ha $F_X(t) = 0$
Per $t \geq 1$ si ha $F_X(t) = 1$
Sia $t \in (-1,1)$ allora

$$F_X(t) = \int_{-1}^{t} \left(\int_{-x}^{1} \alpha\ dy \right) dx = \alpha \int_{-1}^{t} (1+x)dx = \alpha \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_{x=-1}^{x=t} = \frac{(t+1)^2}{4}$$

dunque

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ \frac{(t+1)^2}{4} & t \in (-1,1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

Si procede in maniera analoga per calcolare la funzione di ripartizione di Y.

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ \frac{(t+1)^2}{4} & t \in (-1,1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

(c) $P(X > 0) = 1 - F_X(0) = \frac{3}{4} = 0.75$

$$P(X > 0|Y > 0) = \frac{P(X > 0, Y > 0)}{P(Y > 0)} = \frac{\int_0^1\int_0^1 \alpha \; dydx}{0.75} = \frac{2}{3} = 0.667$$

(d) $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (-1,1) \\ \frac{x+1}{2} & x \in (-1,1) \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (-1,1) \\ \frac{y+1}{2} & y \in (-1,1) \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x) dx = \int_{-1}^{1} x \, \frac{x+1}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 + x \, dx = \frac{1}{2} \left| \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{3}$$

Con gli stessi calcoli si ottiene la speranza di Y.

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}[XY] = \iint xy f_{X,Y}(x,y) dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-x}^{1} \alpha xy \; dx = \int_{-1}^{1} \left| \alpha x \frac{y^2}{2} \right|_{y=-x}^{y=1} \; dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \alpha \frac{x}{2} + \alpha \frac{x^3}{2} dx = 0$$

Dunque

$$\mathrm{C}ov[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$$

(e) $F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
Per $x + y \leq 0$ $\quad F_{(X,Y)}(x, y) = 0$
Per $x \geq 1$ $\quad F_{(X,Y)}(x, y) = F_{(Y)}(y)$
Per $y \geq 1$ $\quad F_{(X,Y)}(x, y) = F_{(X)}(x)$
Per $(x, y) \in D$

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-y}^{x}\int_{-t}^{y} \alpha \; dsdt = \frac{(x + y)^2}{4}$$

(f) $P(Z \in (-1, 1)) = 1$

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ \frac{(t+1)^2}{2} & -1 < t \leq 0 \\ \frac{(t+1)^2}{2} - \frac{(2t)^2}{4} & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 36

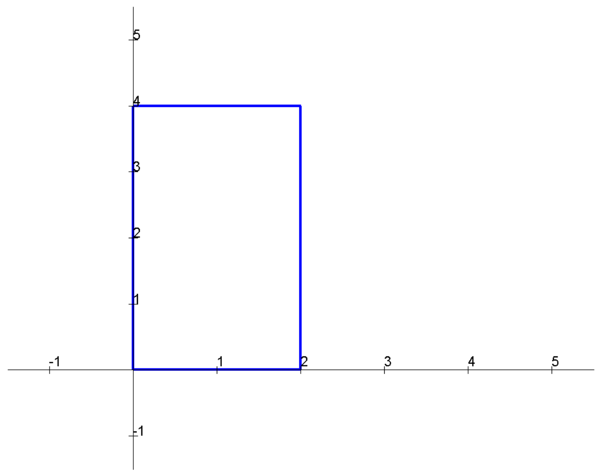

Figure 3.2: Dominio D

Il dominio D (figura 3.2) ha una forma rettangolare, esplicitando i moduli all'interno della definizione si ha $-1 < x-1 < 1$ e $-2 < y-2 < 2$ e dunque

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 2, \ 0 < y < 4 \ \}$$

(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y) \ dxdy = 1$$

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y) \ dxdy &= \textstyle\iint_D \alpha y \ dxdy = \alpha \cdot \int_0^4 \int_0^2 y \ dxdy = \\ &= \alpha \cdot \textstyle\int_0^4 2y \ dy = \alpha \cdot 2 \left| \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=4} = 16\alpha \end{aligned}$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{16}$.
(b)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \ dy = \begin{cases} 0 & x \notin (0,2) \\ \int_0^4 \alpha y dy & x \in (0,2) \end{cases}$$

$$\int_0^4 \alpha y dy = \alpha \left| \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=4} = \alpha \cdot 8 = \frac{1}{2}$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,2) \\ \frac{1}{2} & x \in (0,2) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \begin{cases} 0 & y \notin (0,4) \\ \int_0^2 \alpha y dx & y \in (0,4) \end{cases}$$

$$\int_0^2 \alpha y dy = \alpha \left| yx \right|_{x=0}^{x=2} = \alpha \cdot 2y = \frac{1}{8} y$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,4) \\ \frac{1}{8} y & y \in (0,4) \end{cases}$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\ dx = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \int_0^t \frac{1}{2}\ dx & t \in (0,2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{2} t & t \in (0,2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)\ dy = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \int_0^t \frac{1}{8} y\ dy & t \in (0,4) \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{16} t^2 & t \in (0,4) \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$$

(c) Passando al complementare si ha $P(X+Y > 1) = 1 - P(X+Y \leq 1)$. Siano A e B le due regioni indicate nella figura 3.3.

$$P(X+Y \leq 1) = P((X,Y) \in A) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \alpha y\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^1 \left| \alpha \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \alpha \frac{1 - 2x + x^2}{2}\ dx =$$

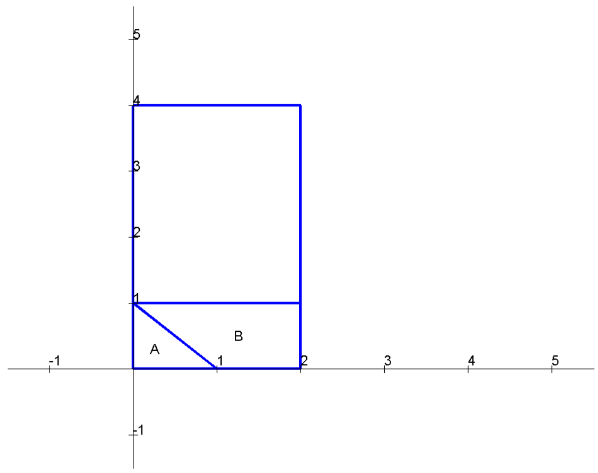

Figure 3.3: Regioni A e B

$$= \frac{\alpha}{2} \left| x - 2\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{\alpha}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{96}$$

Dunque

$$P(X+Y>1) = 1 - P(X+Y \leq 1) = 1 - \frac{1}{96} = \frac{95}{96}$$

$$\begin{aligned} P(X+Y>1|Y<1) &= \frac{P(\{X+Y>1\} \cap \{Y<1\})}{P(Y<1)} \\ &= \frac{P((X,Y) \in B)}{P(Y<1)} \\ &= \frac{P(\{Y<1\} \setminus \{X+Y \leq 1\})}{P(Y<1)} \\ &= \frac{P(Y<1) - P(X+Y \leq 1)}{P(Y<1)} \end{aligned}$$

$$P(Y<1) = F_Y(1) = \frac{1}{16} \qquad P(X+Y \leq 1) = \frac{1}{96}$$

$$P(X+Y>1|Y<1) = \frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{96}}{\frac{1}{16}} = \frac{5}{6}$$

(d) Per calcolare $F_{(X,Y)}(x,y)$ distinguiamo due casi $(x,y) \notin D$ e $(x,y) \in D$. Se $(x,y) \notin D$ allora vale almeno una delle seguenti 4 condizioni $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x \geq 2$ e $y \geq 4$. Per le quali si ha:

$$\begin{array}{ll} F_{(X,Y)}(x,y) = 0 & x \leq 0 \\ F_{(X,Y)}(x,y) = 0 & y \leq 0 \\ F_{(X,Y)}(x,y) = F_Y(y) & x \geq 2 \\ F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) & y \geq 4 \end{array}$$

Resta da considerare il caso $(x,y) \in D$. Per $(x,y) \in D$ si ha:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^y \int_0^x \alpha t \; ds \; dt = \int_0^y \alpha t x \; dt = \left| \alpha x \frac{t^2}{2} \right|_{t=0}^{t=y} = \frac{\alpha x y^2}{2} = \frac{xy^2}{32}$$

(e) Sia $g(x,y) = (x+y, y)$ e calcoliamone l'inversa $h(s,t) = g^{-1}(s,t)$.

$$\begin{cases} S = X+Y \\ T = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+T = S \\ Y = T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = S-T \\ Y = T \end{cases} \tag{3.1}$$

dunque si ha $h(s,t) = (s-t, t)$.
Sia D_2 il dominio del vettore aleatorio (S,T).
Dai vincoli su X e Y: $0 < X < 2$ e $0 < Y < 4$ utilizzando le equazioni (3.1) si ha:

$$\begin{cases} 0 < S-T < 2 \\ 0 < T < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S-T > 0 \\ S-T < 2 \\ T > 0 \\ T < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T < S \\ T > S-2 \\ T > 0 \\ T < 4 \end{cases}$$

Dunque il supporto D_2 (figura 3.4) di (S,T) è dato da $D_2 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : t < s, t > s-2, t > 0, t < 4\}$ e
$P((S,T) \in D_2) = 1$. Calcoliamo ora la matrice iacobiana di h.

$$J_h(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial X}{\partial t} \\ \frac{\partial Y}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|det(J_h)| = 1$$

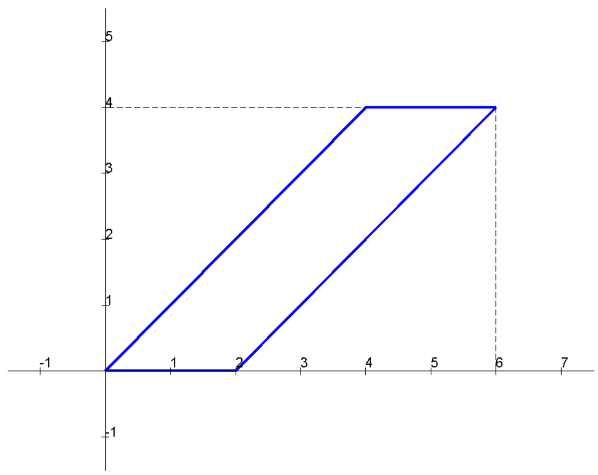

Figure 3.4: Dominio D_2

Allora per $(s,t) \in D_2$ si ha:

$$f_{(S,T)}(s,t) = f_{(X,Y)}(h(s,t)) \cdot |det(J_h)| = f_{(X,Y)}(s-t,t) \cdot 1 = \alpha t$$

(f) Affinché X e Y siano indipendenti occorre e basta che valga l'uguaglianza $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ per ogni $(x,y) \in D_2$. Supponiamo $(x,y) \in D_2$ cioè $0 < x < 2$ e $0 < y < 4$ allora si ha

$$F_X(x) = \frac{1}{2}x$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{16}y^2$$

$$F_X(x) \cdot F_Y(y) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{16}y^2 = \frac{xy^2}{32} = F(X,Y)(x,y)$$

Le variabili aleatorie S e T non sono indipendenti infatti il supporto di (S,T) è un parallelogrammo mentre se fossero indipendenti il supporto di (S,T) dovrebbe essere il prodotto dei supporti di X e Y e quindi dovrebbe essere un rettangolo.

È possibile mostrare la non indipendenza di S e T anche osservando che sul quadrato $Q = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < x < 2, \; 2 < y < 4 \}$ si ha
$P(Q) = 0$, dunque
$$P(0 < X < 2, 2 < Y < 4) = 0$$
mentre $P(0 < X < 2) > 0$ e $P(2 < Y < 4) > 0$, implica
$$P(0 < X < 2) \cdot P(2 < Y < 4) > 0$$
e dunque
$$P(0 < X < 2, 2 < Y < 4) \neq P(0 < X < 2) \cdot P(2 < Y < 4)$$

Esercizio 37
(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\; dxdy = 1$$
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\; dydx = \iint_D \alpha(e^x + e^{-y})dydx = \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^0 e^x + e^{-y}\; dydx =$$
$$= \alpha \cdot \int_0^1 \left[ye^x - e^{-y}\right]_{y=-1}^{y=0}\; dx = \alpha \cdot \int_0^1 -e^0 + e^x + e^1\; dx =$$
$$= \alpha \cdot [x(e-1) + e^x]_0^1 = \alpha(e - 1 + e - e^0) = 2 \cdot \alpha(e-1)$$
Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{2(e-1)}$.
(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\; dy$$
Per $x \notin (0,1)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\; dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\; dy = 0$
Per $x \in (0,1)$ invece
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\; dy = \int_{-1}^{0} \alpha(e^x + e^-y)\; dy =$$
$$= \alpha \left|ye^x - e^-y\; \right|_{y=-1}^{y=0} = \alpha\left(-e^0 + e^x + e\right)$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1) \\ \alpha\left(e^x + e - 1\right) & x \in (0,1) \end{cases}$$

Si procede in maniera analoga per f_Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx$$

Per $y \notin (-1,0)$ si ha $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dx = 0$
Per $y \in (-1,0)$ invece

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \int_0^1 \alpha(e^x + e^{-y})\ dx =$$

$$= \alpha\left|e^x + xe^{-y}\right|_{x=0}^{x=1} = \alpha\left(-e^0 + e^{-y} + e\right)$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (-1,0) \\ \alpha\left(e^{-y} + e - 1\right) & y \in (-1,0) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds$$

Per $x \leq 0$ si ha $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(X)}(s)\ ds = \int_{-\infty}^{x} 0\ ds = 0$
Per $x \geq 1$ si ha $F_X(x) = P(X \leq x) = 1$
Per $0 < x < 1$ invece

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds = \int_0^x \alpha\left(e^s + e - 1\right)\ ds =$$

$$= \alpha\left|e^s + s(e-1)\right|_{s=0}^{s=+x} = \alpha\left(x(e-1) + e^x - 1\right)$$

Dunque

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \alpha\left(x(e-1) + e^x - 1\right) & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

si procede in maniera analogo per F_Y ottenendo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ \alpha\left(y(e-1) - e^{-y} + 2e - 1\right) & -1 < y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$$

(c) Denotiamo con C l'insieme dei punti (x, y) di D tali che $x+y < 0$. Allora si ha:

$$P(X + Y < 0) = \iint_C f_{(X,Y)}(x, y)\ dydx$$

Al variare di x tra 0 e 1 la disuguaglianza $x + y < 0$ ci dà $y < -x$. Dunque

$$P(X + Y < 0) = \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^{-x} e^x + e^{-y}\ dydx =$$

$$= \alpha \cdot \int_0^1 \left[ye^x - e^{-y}\right]_{y=-1}^{y=-x}\ dx = \alpha \cdot \int_0^1 -xe^x - e^x + e^x + e^1\ dx =$$

$$= \alpha \cdot [-xe^x + e^x + xe]_0^1 = \alpha(-e + e + e - e^0) = \alpha(e - 1) = \frac{1}{2}$$

(d) Si può calcolare $\mathbb{E}[e^Y]$ risolvendo:

$$\mathbb{E}[e^Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} e^y \cdot f_{(X,Y)}(x, y)\ dydx$$

oppure poiché e^Y dipende solo da Y risolvendo

$$\mathbb{E}[e^Y] = \int_{\mathbb{R}} e^y \cdot f_Y(y)\ dy$$

Illustriamo la risoluzione del primo integrale (il più difficile).

$$\mathbb{E}[e^Y] = \iint_D e^y \cdot \alpha(e^x + e^{-y})\ dydx = \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^0 e^{x+y} + 1\ dydx =$$

$$= \alpha \cdot \int_0^1 \left[e^{x+y} + y\right]_{y=-1}^{y=0}\ dx = \alpha \cdot \int_0^1 e^x - e^{x-1} + 1\ dx =$$

$$= \alpha \cdot \left[e^x - e^{x-1} + x\right]_0^1 = \alpha(e - e^0 + 1 - e^0 + e^{-1}) = \frac{e + e^{-1} - 1}{2(e - 1)}$$

Esercizio 38
(a) Per calcolare α bisogna imporre $f_{(X,Y)} \geq 0$ e $\iint f_{(X,Y)}dxdy = 1$.
Per $(x,y) \in D$ si ha: $sen(x) > 0$, $cos(x) > 0$, $Y^2 > 0$ e $Y^3 > 0$ dunque per soddisfare la prima condizione sarà sufficiente imporre $\alpha \geq 0$. Calcoliamo ora l'integrale $\iint f_{(X,Y)}dxdy$.

$$\iint f_{(X,Y)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{+\infty} \alpha \left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3} \right) dydx =$$

$$= \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{sen(x)}{(-1)y} + \frac{2cos(x)}{(-2)y^2} \right]_{y=1}^{y=+\infty} dx = \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen(x) + cos(x))\, dx =$$

$$= \alpha \left[-cos(x) + sen(x) \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \alpha(-cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos(0) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0) =$$

$$= \alpha(-0 + 1 + 1 - 0) = 2\alpha$$

Dunque

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

(b) $f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x,y)dy$
Se $x \notin (0, \frac{\pi}{2})$ allora $f_X(x) = \int 0dy = 0$
Consideriamo il caso $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora:

$$f_X(x) = \int f_{(X,Y)}dy = \int_1^{+\infty} \alpha \left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3} \right) dy =$$

$$= \alpha \left[\frac{sen(x)}{(-1)y} + \frac{2cos(x)}{(-2)y^2} \right]_{y=1}^{y=+\infty} = \alpha\,(sen(x) + cos(x)) =$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(sen(x) + cos(x)) & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \notin (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x,y)dx$
Se $y \leq 1$ allora $f_Y(y) = \int 0dx = 0$
Consideriamo il caso $y > 1$ allora:

$$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3} \right) dx =$$

$$= \alpha \left[\frac{-cos(x)}{y^2} + \frac{2sen(x)}{y^3} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \alpha \left(\frac{-cos(\frac{\pi}{2})}{y^2} + \frac{2sen(\frac{\pi}{2})}{y^3} - \frac{-cos(0)}{y^2} - \frac{2sen(0)}{y^3} \right) =$$

$$= \alpha \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) =$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \alpha \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) & y > 1 \end{cases}$$

$F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx$
Se $a \leq 0$ allora $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} 0dx = 0$
Se $a \geq \frac{\pi}{2}$ allora $F_X(a) = P(X \leq a) = 1$.
Consideriamo il caso $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \int_{0}^{a} \alpha(sen(x) + cos(x))dx =$$

$$= \alpha[-cos(x) + sen(x)]_0^a dx = \alpha(-cos(a) + sen(a) + cos(0) - sen(0)) =$$

$$= \alpha(1 - cos(a) + sen(a))$$

Dunque

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ \alpha(1 - cos(a) + sen(a)) & a \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 1 & a \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$F_Y(b) = P(Y \leq b) = \int_{-\infty}^{a} f_Y(y)dy$
Se $b \leq 1$ allora $F_Y(b) = \int_{-\infty}^{b} 0dy = 0$
Consideriamo il caso $b > 1$ allora:

$$F_Y(b) = \int_{-\infty}^{b} f_Y(y)dy = \int_{1}^{b} \alpha \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) dy = \alpha \left[\frac{1}{-y} + \frac{2}{(-2)y^2} \right]_1^b dy =$$

$$\alpha \left(\frac{1}{-b} + \frac{2}{(-2)b^2} - \frac{1}{-1} - \frac{2}{(-2)1^2} \right) = \alpha \left(2 - \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2} \right) =$$

Dunque

$$F_Y(b) = \begin{cases} 0 & b \leq 1 \\ \alpha \left(2 - \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2} \right) & b > 1 \end{cases}$$

(c) Le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti perché la funzione $f_X \cdot f_Y$ è diversa da $f_{(X,Y)}$.
(d) Prima di tutto $sen(1)$ e $cos(1)$ devono essere calcolati in radianti quindi:

$$sen(1) = 0.841 \qquad cos(1) = 0.54$$

Poiché la v.a. X è assolutamente continua si ha:

$$P(X < 1) = P(X \leq 1) = F_X(1) = \alpha(1 - cos(1) + sen(1)) \simeq 0.65$$

$$P(X < 1|Y < 2) = \frac{P(X < 1, Y < 2)}{P(Y < 2)}$$

$$P(Y < 2) = P(Y \leq 2) = F_Y(2) = \alpha\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$P(X < 1, Y < 2) = \int_0^1 \int_1^2 \alpha\left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3}\right) dydx =$$

$$= \int_0^1 \alpha\left[\frac{sen(x)}{-y} + \frac{2cos(x)}{(-2)y^2}\right]_{y=1}^{y=2} dx =$$

$$= \int_0^1 \alpha\left(\frac{sen(x)}{-2} + \frac{2cos(x)}{(-2)2^2} - \frac{sen(x)}{-1} - \frac{2cos(x)}{(-2)1^2}\right) dx =$$

$$= \alpha\int_0^1 \left(\frac{1}{2}sen(x) + \frac{3}{4}cos(x)\right) dx = \alpha\left[-\frac{1}{2}cos(x) + \frac{3}{4}sen(x)\right]_0^1 =$$

$$= \alpha\left(-\frac{1}{2}cos(1) + \frac{3}{4}sen(1) + \frac{1}{2}cos(0) - \frac{3}{4}sen(0)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(2 - 2 \cdot cos(1) + 3 \cdot sen(1)\right) \simeq 0.43$$

$$P(X < 1|Y < 2) = \frac{0.43}{0.625} = 0.688$$

Esercizio 39
(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dydx = \iint_D \alpha(2x^2y+1)dydx =$$

$$= \alpha \cdot \int_{-1}^{1}\int_0^2 2x^2y + 1\ dydx = \alpha \cdot \int_{-1}^{1}\left[2\frac{x^2y^2}{2} + y\right]_{y=0}^{y=2}\ dx =$$

$$= \alpha \cdot \int_{-1}^{1} 4x^2 + 2\ dx = \alpha \cdot \left[4\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} = \alpha\left(\frac{8}{3}+4\right) = \frac{20}{3}\alpha$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{3}{20}$.
(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy$$

Per $x \notin (-1,1)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dy = 0$
Per $x \in (-1,1)$ invece

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_0^2 \alpha(2x^2y+1)\ dy =$$

$$= \alpha \left| 2x^2\frac{y^2}{2} + y\ \right|_{y=0}^{y=2} = \alpha\left(4x^2+2\right)$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (-1,1) \\ \alpha\,(4x^2+2) & x \in (-1,1) \end{cases}$$

Si procede in maniera analoga per f_Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx$$

Per $y \notin (0,2)$ si ha $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dx = 0$
Per $y \in (0,2)$ invece

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \int_{-1}^{1} \alpha(2x^2y+1)\ dx =$$

$$= \alpha \left| 2\frac{x^3}{3}y + x \ \right|_{x=-1}^{x=1} = \alpha\left(\frac{4}{3}y+2\right)$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,2) \\ \alpha\left(\frac{4}{3}y+2\right) & y \in (0,2) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y.

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\ dx$$

Per $a \leq -1$ si ha $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_{(X)}(x)\ dx = \int_{-\infty}^{a} 0\ ds = 0$
Per $a \geq 1$ si ha $F_X(a) = P(X \leq a) = 1$
Per $-1 < a < 1$ invece

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\ dx = \int_{-1}^{a} \alpha\left(4x^2+2\right)\ dx =$$

$$= \alpha \left| \frac{4}{3}x^3 + 2x \ \right|_{x=-1}^{x=a} = \alpha\left(\frac{10}{3} + \frac{4}{3}a^3 + 2a\right)$$

Dunque

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \alpha\left(\frac{10}{3}+\frac{4}{3}a^3+2a\right) & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

si procede in maniera analogo per F_Y ottenendo:

$$F_Y(b) = \begin{cases} 0 & b \leq 0 \\ \alpha\left(\frac{2}{3}b^2+2b\right) & 0 < b < 2 \\ 1 & b \geq 2 \end{cases}$$

(c) Utilizziamo l'uguaglianza $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ risolvendo:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\ dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x \cdot \alpha \left(4x^2 + 2\right) \, dx = \alpha \left[\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} = 0$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) \, dy$$

$$= \int_{0}^{2} y \cdot \alpha \left(\frac{4}{3}y + 2\right) \, dx = \alpha \left[\frac{4}{9}y^3 + \frac{2}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2} = \alpha \frac{68}{9}$$

$$\mathbb{E}[XY] = \iint_{\mathbb{R}^2} e^y \cdot f_{(X,Y)}(x,y) \, dydx =$$

$$= \int_{0}^{2} \int_{-1}^{1} xy \cdot \alpha \left(2x^2 y + 1\right) \, dxdy =$$

$$= \int_{0}^{2} \alpha \left[2\frac{x^4 y^2}{4} + \frac{x^2 y}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} \, dy = 0$$

Quindi

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0$$

(d) Prima di tutto invertiamo il sistema,

$$\begin{cases} S = \frac{X}{Y} \\ T = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = SY \\ Y = T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = ST \\ Y = T \end{cases}$$

Calcoliamo il dominio D_2 delle variabili aleatorie (S,T).

$$\begin{cases} |X| < 1 \\ |Y-1| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |ST| < 1 \\ |T-1| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < ST < 1 \\ -1 < T-1 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ST > -1 \\ ST < 1 \\ T > 0 \\ T < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S > -\frac{1}{T} \\ S < \frac{1}{T} \\ T > 0 \\ T < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < T < 2 \\ -\frac{1}{T} < S < \frac{1}{T} \end{cases}$$

Dunque $D_2 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 2, -\frac{1}{t} < s < \frac{1}{t}\}$
Calcoliamo ora la matrice Iacobiana.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Iacobiana è t e dunque per la densità di (S,T) si ha:
se $(s,t) \notin D_2$, $f_{(S,T)}(s,t) = 0$
se invece $(s,t) \in D_2$

$$f_{(S,T)}(s,t) = f_{(X,Y)}(st,t) \cdot |t| = \alpha(2s^2t^2t + 1)t = \alpha(2s^2t^4 + t)$$

Esercizio 40
(a) $\alpha = \frac{4}{2\log(3)+1} \simeq 1.251$

(b)
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (1,2) \\ \alpha\left(\frac{\log(3)}{x^2} + \frac{2}{3x^3}\right) & x \in (1,2) \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (1,3) \\ \alpha\left(\frac{1}{2y} + \frac{3}{8y^2}\right) & y \in (1,3) \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \alpha\left(\log(3) + \frac{1}{3} - \frac{\log(3)}{x} - \frac{1}{3x^2}\right) & 1 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \alpha\left(\frac{3}{8} + \frac{\log(y)}{2} - \frac{3}{8y}\right) & 1 < y < 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

(c) $\mathbb{E}[XY] = \alpha\left(2\log(2) + \frac{\log(3)}{2}\right) \simeq 2.4216$
(d) $\mathrm{cov}(X,Y) \simeq 0.00196$

Esercizio 41
(a) $\alpha = \frac{1}{3\pi}$

(b) $f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (-\pi,\pi) \\ \alpha(\frac{3}{2} + \cos(x)) & x \in (-\pi,\pi) \end{cases}$ $\quad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (1,2) \\ \frac{2}{3}y & y \in (1,2) \end{cases}$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -\pi \\ \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2} + \frac{\sin(x)}{3\pi} & -\pi < x < \pi \\ 1 & x \geq \pi \end{cases}$ $\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \frac{y^2-1}{3} & 1 < y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$

(c)

$$\begin{array}{ll}
F_{(X,Y)}(x,y)=0 & (\{x\leq -\pi\}\cup\{y\leq 1\}) \\
F_{(X,Y)}(x,y)=\alpha\left(\frac{(y^2-1)(a+\pi)}{2}+(b-1)\sin(a)\right) & -\pi<x<\pi,\ 1<y<2 \\
F_{(X,Y)}(x,y)=F_Y(y)=\frac{y^2-1}{3} & 1<y<2,\ x\geq\pi \\
F_{(X,Y)}(x,y)=F_X(x)=\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{2}+\frac{\sin(x)}{3\pi} & -\pi<x<\pi,\ y\geq 1 \\
F_{(X,Y)}(x,y)=1 & x\geq\pi,\ y\geq 2
\end{array}$$

(d) $D_2=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 : 1<s<4, s-\pi<t<s+\pi\}$ e
$F_{(S,T)}(s,t)=\begin{cases} 0 & (s,t)\notin D_2 \\ \alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(t-s)}{2\sqrt{s}}\right) & (s,t)\in D_2 \end{cases}$

Esercizio 42

(a) $f_X(x)=\begin{cases} 0 & x\notin(2,4) \\ \frac{1}{2} & x\in(2,4)\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases} 0 & y\notin(0,2) \\ \frac{1}{2} & y\in(0,2)\end{cases}$

$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ \frac{x-2}{2} & 2\leq x<4 \\ 1 & 4\leq x\end{cases}$ $\quad F_Y(y)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ \frac{y}{2} & 0\leq y<2 \\ 1 & 2\leq y\end{cases}$

(b) Le v.a. X e Y sono v.a. uniformi sugli intervalli rispettivamente $(2,4)$ e $(0,2)$. $\mathbb{E}[X]=3,\ \mathbb{E}[Y]=1$

(c) $\mathbb{E}[XY]=\frac{53}{18},\ \mathrm{Cov}[X,Y]=-\frac{1}{18}$

(d)

$$\begin{array}{ll}
F_{(X,Y)}(x,y)=0 & (\{x<2\}\cup\{y<0\}) \\
F_{(X,Y)}(x,y)=\frac{b}{32}(2x^2-x^2y+6xy-8y-4x) & 2\leq x<4,\ 0\leq y<2 \\
F_{(X,Y)}(x,y)=F_Y(y)=\frac{y}{2} & 0\leq y<2,\ 4\leq x \\
F_{(X,Y)}(x,y)=F_X(x)=\frac{x-2}{2} & 2\leq x<4,\ 2\leq y \\
F_{(X,Y)}(x,y)=1 & 4\leq x,\ 2\leq y
\end{array}$$

Esercizio 43

(a) $\alpha=e$

(b) $f_X(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x>1\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases} 0 & y\leq 1 \\ e^{1-y} & y>1\end{cases}$

$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 1 \\ 1-\frac{1}{x} & x>1\end{cases}$ $\quad F_Y(y)=\begin{cases} 0 & y\leq 1 \\ 1-e^{1-y} & y>1\end{cases}$

(c) $1 + \frac{e}{3}$
(d) X e Y sono indipendenti. $\operatorname{cov}[X, Y] = 0$

Chapter 4

Esercizio 44 *Sia* $X_n, n \in \mathbb{N}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione uniforme sull'intervallo* $(0,1)$*. Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *sia*

$$
\begin{aligned}
&Z_n := min\{X_1, ..., X_n\} \\
&Y_n := n \cdot min\{X_1, ..., X_n\} \\
&T_n := n^2 \cdot min\{X_1, ..., X_n\}
\end{aligned}
$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione cumulativa di Z_n*,* Y_n*,* T_n*.*
(b) Calcolare la funzione generatrice dei momenti di Z_2*.*
(c) Studiare la convergenza in distribuzione di Z_n*,* Y_n*,* T_n*.*
(d) Cosa si può dire della convergenza quasi certa di Z_n*?*

Esercizio 45 *Sia* $X_n, n \in \mathbb{N}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione bernoulliana di parametro* $p = \frac{1}{3}$*. Sia*

$$
\begin{aligned}
&Z_n := X_1 + X_2 + ... + X_n \\
&Y_n := X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n \\
&T_n := \tfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}
\end{aligned}
$$

(a) Trovare le distribuzioni di Z_n*,* Y_n*,* T_n*.*
(b) Calcolare la funzione caratteristica di Y_2 *e* T_2*.*
(c) Studiare la convergenza quasi certa di T_n*.*
(d) Cosa si può dire sulla convergenza quasi certa di Y_n*?*

Esercizio 46 *Sia* $X_n, n \in \mathbb{N}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che per ogni* $n > 0$ *la distribuzione di* X_n *sia una distribuzione esponenziale di parametro* $\lambda_n = \frac{1}{3^n}$*. Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *sia*

$$Z_n := \min\{X_1, ..., X_n\}$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione di X_n.
(b) Calcolare le funzioni di ripartizione di Z_n. (Può essere utile l'uguaglianza: $\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}+\cdots+\frac{1}{\theta^n}=\frac{\theta^n-1}{(\theta-1)\theta^n}$)
(c) Calcolare la funzione generatrice dei momenti e la funzione caratteristica di Z_2.
(d) Studiare la convergenza in distribuzione di Z_n.

Esercizio 47 *Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con densità:*

$$f_{X_n}(x)=\begin{cases}\frac{2}{(x+2)^2} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

Sia $Y_n:=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ e $Z_n:=n\cdot\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$
(a) Calcolare le funzioni di ripartizione: F_{X_n}, F_{Y_n}, F_{Z_n}.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione ed in probabilità di Y_n.
(c) Studiare la convergenza quasi certa di Y_n.
(d) Studiare la convergenza in distribuzione di Z_n.

Esercizio 48 *Sia $X_n, n\in\mathbb{N}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che per ogni $n>0$ la distribuzione di X_n sia una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda=5$. Per ogni $n\in\mathbb{N}$ sia*

$$T_n:=\frac{X_1+...+X_n}{n}$$

(a) Calcolare la probabilità condizionata $P[X_1=1|X_1\leq 2]$.
(b) Calcolare la probabilità $P[T_n]=0$.
(c) Calcolare la media e la varianza di T_n.
(d) Studiare la convergenza quasi certa di T_n.

Esercizio 49 *Siano $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione bernoulliana di parametro $p=\frac{2}{3}$. Per ogni $n\geq 1$ sia $Z_n:=X_n-Y_n$,*

$$T_n:=\frac{Z_1+Z_2+\ldots+Z_n}{\sqrt{n}}$$

$$W_n:=\frac{Z_1+Z_2+\ldots+Z_n}{n}$$

(a) Calcolare la densità discreta e la funzione caratteristica di Z_n.
(b) Calcolare la media e la varianza di Z_n.
(c) Studiare la convergenza in distribuzione di T_n.
(d) Studiare la convergenza quasi certa di W_n.

4.1 Soluzioni

Esercizio 44
(a)

$$F_{X_i}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t \in (0,1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

$F_{Z_n}(t) = P(Z_n \leq t) = P(min\{X_1, \ldots X_n\} \leq t) = 1 - P(min\{X_1, \ldots X_n\} \geq t)$

$F_{Z_n}(t) = 1 - P(X_1 \geq t, \ldots, X_n \geq t) = 1 - P(X_1 \geq t) \cdot \cdots \cdot P(X_n \geq t) = 1 - (1 - F_{X_i}(t))^n$

$$F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - (1-t)^n & t \in (0,1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

$Y_n := n \cdot min\{X_1, ..., X_n\} = min\{nX_1, ..., nX_n\}$

$$F_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - (1 - \frac{t}{n})^n & t \in (0,n) \\ 1 & t \geq n \end{cases}$$

$T_n := n^2 \cdot min\{X_1, ..., X_n\} = min\{n^2X_1, ..., n^2X_n\}$

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - (1 - \frac{t}{n^2})^n & t \in (0,n^2) \\ 1 & t \geq n^2 \end{cases}$$

(b)

$$F_{Z_2}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2t - t^2 & t \in (0,1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \qquad f_{Z_2}(z) = \begin{cases} 0 & z \notin (0,1) \\ 2 - 2z & z \in (0,1) \end{cases}$$

$$M_{Z_2}(t) = \mathbb{E}[e^{tZ_2}] = \int_0^1 e^{tz}(2-2z)dz$$

Integrando per parti.

$$M_{Z_2}(t) = \begin{cases} 2\left(\frac{e^t - t - 1}{t^2}\right) & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

dunque la successione Z_n converge in distribuzione ad una v.a. Z_∞ con distribuzione:

$$F_{Z_\infty}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

dunque la successione Y_n converge in distribuzione ad una v.a. esponenziale Y_∞ con distribuzione:

$$F_{Y_\infty}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = 0 \qquad \forall t$$

dunque T_n non converge in distribuzione. (Se la successione T_n fosse convergente in distribuzione verso una variabile aleatoria T_∞ allora si avrebbe $F_{T_\infty}(t) = 0 \quad \forall t$ e questo contraddirebbe $\lim_{t\to\infty} F_{T_\infty}(t) = 1$)

(d) Il risultato del punto (c) ci suggerisce che la successione Z_n potrebbe avere convergenza quasi certa in 0. Sia ϵ piccolo, $\epsilon > 0$.

$$\mathbb{P}(|Z_n - 0| > \epsilon) = \mathbb{P}(Z_n > \epsilon) = 1 - F_{Z_n}(\epsilon) = (1-\epsilon)^n$$

La serie $\sum_n (1-\epsilon)^n$ è una serie geometrica ed è convergente per $|1-\epsilon| < 1$ (cioè per ogni ϵ in $(0,2)$). Allora per ogni ϵ piccolo maggiore di 0 si ha:

$$\sum_n \mathbb{P}(|Z_n - 0| > \epsilon) = \sum_n (1-\epsilon)^n < +\infty$$

quest'ultima condizione è sufficiente per assicurare la convergenza quasi certa in 0.

Esercizio 45
Siano X_n indipendenti Bernoulliane di parametro $p = \frac{1}{3}$ cioè $P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$ e $P(X_n = 1) = \frac{1}{3}$.
(a) $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$. Z_n è somma di variabili aleatorie bernoulliane indipendenti e di uguale parametro $p = \frac{1}{3}$ dunque Z_n è una variabile aleatoria Binomiale di parametri n e p cioè

$$P(Z_n = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\} \tag{4.1}$$

$T_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{Z_n}{n}$ e dunque $Z_n = n \cdot T_n$, sostituendo nella (4.1) si ha:

$$P\left(T_n = \frac{i}{n}\right) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

$Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$. Y_n assume i valori 0 o 1.

$$\begin{aligned} P(Y_n = 1) &= P(X_1 = 1,\ X_2 = 1\ \ldots,\ X_n = 1) \\ &= P(X_1 = 1) P(X_2 = 1)\ \ldots\ P(X_n = 1) = p^n \end{aligned}$$

$$P(Y_n = 0) = 1 - P(Y_N = 1) = 1 - p^n$$

Dunque Y_n è una variabile aleatoria bernoulliana di parametro $\frac{1}{3^n}$.
(b) $P(Y_2 = 0) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, $P(Y_2 = 1) = \frac{1}{9}$ dunque

$$\phi_{Y_2}(t) = E[e^{itY_2}] = \frac{8}{9} + e^{it}\frac{1}{9} = \frac{8 + e^{it}}{9}$$

Per T_2 si ha:

$$P(T_2 = 0) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^{2-0} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$P\left(T_2 = \frac{1}{2}\right) = \binom{2}{1} p^1 (1-p)^{2-1} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(T_2 = 1) = \binom{2}{2} p^2 (1-p)^{2-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Dunque

$$\phi_{T_2}(t) = E[e^{itT_2}] = \frac{4}{9} + e^{\frac{it}{2}}\frac{4}{9} + e^{it}\frac{1}{9} = \frac{4 + 4e^{\frac{it}{2}} + e^{it}}{9} = \left(\frac{2 + e^{\frac{it}{2}}}{3}\right)^2$$

Un altro metodo per calcolare la funzione caratteristica di $T_2 = \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}$ può essere quello di utilizzare l'indipendenza di X_1 e X_2 nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \phi_{T_2}(t) &= \phi_{\frac{X_1}{2}+\frac{X_2}{2}}(t) = \phi_{\frac{X_1}{2}}(t) \cdot \phi_{\frac{X_2}{2}}(t) \\ &= \phi_{X_1}(\frac{t}{2}) \cdot \phi_{X_2}(\frac{t}{2}) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{i\frac{t}{2}}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{i\frac{t}{2}}\right) = \left(\frac{2 + e^{\frac{it}{2}}}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

dove ϕ_{X_1} e ϕ_{X_2} sono funzioni caratteristiche di bernoulliane di parametro $p = \frac{1}{3}$.

(c) Le variabili $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono i.i.d. con media finita $\mu = E[X_n] = \frac{1}{3}$. Per la legge forte dei grandi numeri per variabili aleatorie indipendenti, identicamente distribuite e di media finita si ha:

$$lim_{n\to\infty}\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = E[X_n] = \frac{1}{3} \qquad \text{q.o.}$$

Dunque per la successione di variabili aleatorie $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'è convergenza quasi certa in $\frac{1}{3}$.

(d) Le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono una successione di variabili (non indipendenti) con distribuzione bernoulliana di parametro $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. $P(T_n = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ passando al limite si ha $lim_{n\to\infty}P(T_n = 0) = 1$ questo risultato non è sufficiente per dimostrare la convergenza quasi certa di T_n ma ci suggerisce che potrebbe esserci convergenza quasi certa in 0. Sia ϵ piccolo, $\epsilon > 0$, se $\epsilon \geq 1$ allora $P(|Y_n - 0| > \epsilon) = P(|Y_n| > \epsilon) = 0$, se invece $\epsilon < 1$ si ha:

$$P(|Y_n - 0| > \epsilon) = P(|Y_n| > \epsilon) = \frac{1}{3^n}$$

Allora per ogni $\epsilon > 0$ si ha:

$$\sum_n \mathbb{P}(|Y_n - 0| > \epsilon) \leq \sum_n \frac{1}{3^n} < +\infty$$

quest'ultima condizione è sufficiente per assicurare la convergenza quasi certa in 0.

Esercizio 46

(a) Le variabili X_n hanno distribuzione esponenziale di parametro $\lambda_n = \frac{1}{3^n}$. Dunque la funzione di ripartizione $F_{X_n}(x)$ è data da:

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda_n x} & x > 0 \end{cases}$$

Osserviamo che per $x > 0$ si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - e^{-\lambda_n x} = \lim_{n\to+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{3^n}x} = 1 - e^0 = 0$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 0 \qquad \forall x$$

Se X_n convergesse in distribuzione ad una distribuzione X_∞ si avrebbe $F_{X_\infty}(x) = 0\ \forall x$ e questo sarebbe in contraddizione con la condizione $\lim_{x\to+\infty} F_{X_\infty}(x) = 1$. Dunque la successione X_n non converge in distribuzione.

(b)

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = P\left(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \leq z\right)$$

per $z \leq 0$ si ha $F_{Z_n}(z) = 0$. Per $z > 0$ invece

$$F_{Z_n}(z) = P\left(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \leq z\right) = 1 - P\left(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > z\right) =$$

$$= 1 - P(X_1 > z,\ X_2 > z, \ldots,\ X_n > z) = 1 - P(X_1 > z) \cdot P(X_2 > z) \cdot \ldots \cdot P(X_n > z) =$$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 z} \cdot e^{-\lambda_2 z} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n z} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) z} = 1 - e^{-\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] z} =$$

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{3^n - 1}{2\cdot 3^n} z} & z > 0 \end{cases}$$

(c) Utilizzando il risultato di (b) con $n = 2$ si ha:

$$F_{Z_2}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{4}{9} z} & z > 0 \end{cases}$$

Dunque Z_2 è una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\frac{4}{9}$.

$$M_{Z_2}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9} - t}$$

$$H_{Z_2}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9} - it}$$

(d)Per $z > 0$ si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - e^{-\frac{3^n - 1}{2\cdot 3^n} z} = \lim_{n\to+\infty} 1 - e^{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^n}) z} = 1 - e^{-\frac{1}{2} z}$$

quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}z} & z > 0 \end{cases}$$

dunque Z_n converge in distribuzione verso una distribuzione esponenziale di parametro $\frac{1}{2}$.

Esercizio 47
(a) $F_{X_n}(a) = \int_{-\infty}^{a} f_{(X_n)}(x)\ dx$
Se $a \leq 0$

$$F_{X_n}(a) = \int_{-\infty}^{a} f_{(X_n)}(x)\ dx = \int_{-\infty}^{a} 0\ dx = 0$$

Se $a > 0$

$$F_{X_n}(a) = \int_{-\infty}^{a} f_{(X_n)}(x)\ dx = \int_{0}^{a} \frac{2}{(2+x)^2}\ dx = \left[-\frac{2}{(2+x)}\right]_{x=0}^{x=a} =$$
$$= 1 - \frac{2}{(2+a)}$$

Dunque

$$F_{X_n}(a) = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{(2+a)} & a > 0 \end{cases}$$

$F_{Y_n}(b) = P(Y_n \leq b)$
Se $b \leq 0$ allora si ha: $F_{Y_n}(b) = P(Y_n \leq b) = P(min(X_1, \ldots, X_n) \leq b) = 0$
Se $b > 0$

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(b) &= P(Y_n \leq b) = P(min(X_1, \ldots, X_n) \leq b) = \\ &= 1 - P(min(X_1, \ldots, X_n) > b) = 1 - P(X_1 > b, \ldots, X_n > b) = \end{aligned}$$

Grazie all'indipendenza delle variabili $X_1, \ldots, X_n$, si ha:

$$\begin{aligned} &= 1 - P(X_1 > b) \cdot \ldots \cdot P(X_n > b) = 1 - (1 - F_{X_n})^2 = \\ &= 1 - \left(\tfrac{2}{2+b}\right)^n \end{aligned}$$

Dunque

$$F_{Y_n}(b) = \begin{cases} 0 & b \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{2}{2+b}\right)^n & b > 0 \end{cases}$$

È possibile calcolare la funzione di ripartizione F_{Z_n} utilizzando la relazione $Z_n = nY_n$.

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(t) &= P(Z_n \leq t) = P(nY_n \leq t) = P\left(Y_n \leq \tfrac{t}{n}\right) = \\ &= F_{Y_n}\left(\tfrac{t}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \frac{t}{n} \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{2}{2+\frac{t}{n}}\right)^n & \frac{t}{n} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque

$$F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{2}{2+\frac{t}{n}}\right)^n & t > 0 \end{cases}$$

(b) Per lo studio della convergenza in distribuzione di $(Y_n)_{n>1}$ bisogna calcolare, se esiste, il limite $\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(b)$.
Se $b \leq 0$ si ha: $\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(b) = 0$
Se $b > 0$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(b) = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{2}{2+b}\right)^n = 1$$

Se esiste una variabile aleatoria Y tale che $Y_n \xmapsto{d} Y$ deve valere

$$F_Y(b) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Affinché esista una tale variabile è sufficiente verificare che $\lim_{b\to\infty} F_Y(b) = 1$ e $\lim_{b\to-\infty} F_Y(b) = 0$.
La verifica è immediata inoltre la funzione di ripartizione F_Y ci dice che Y è una variabile aleatoria costante che vale zero con probabilità uno.
Sapendo che se una successione di v.a. che converge in distribuzione ad una costante allora converge anche in probabilità, si ha:
$Y_n \xmapsto{d} 0$
$Y_n \xmapsto{p} 0$
(c) Per quanto detto al punto (b), se vi è convergenza quasi certa allora Y_n deve convergere alla costante $Y = 0$.
Le variabili $(Y_n)_{n>1}$ non sono indipendenti. Per lo studio della convergenza quasi certa (a zero) bisogna studiare la convergenza della serie
$\sum_n P(|Y_n - 0| > \epsilon)$ con $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_n P(|Y_n - 0| > \epsilon) &= \textstyle\sum_n P(Y_n > \epsilon) = \sum_n 1 - P(Y_n \leq \epsilon) \\ &= \textstyle\sum_n 1 - F_{Y_n}(\epsilon) \\ &= \textstyle\sum_n \left(\frac{2}{2+\epsilon}\right)^n \end{aligned}$$

Se $\epsilon > 0$ allora $\frac{2}{2+\epsilon} < 1$ quindi la serie $\sum_n \left(\frac{2}{2+\epsilon}\right)^n$ è una serie geometrica con ragione minore di 1 e dunque converge. La convergenza della seria per ogni $\epsilon > 0$ ci dà:
$Y_n \xmapsto{q.c.} 0$

(d) Per lo studio della convergenza in distribuzione di $(Z_n)_{n>1}$ bisogna calcolare, se esiste, il limite $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t)$.
Se $t \leq 0$ si ha: $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = 0$
Se $t > 0$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{2}{2+\frac{t}{n}}\right)^n = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{2+\frac{t}{n}}\right)^n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{t}{2n}\right)^n}$$

Ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata del tipo 1^∞.
Questo limite può essere risolto in molti modi.
Metodo 1:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{t}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\log\left(1+\frac{t}{2n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log\left(1+\frac{t}{2n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$

Applicando la regola dell' Hôpital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{t}{2n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-\frac{t}{2n^2}}{1+\frac{t}{2n}}}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{t}{2}$$

Dunque per $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$$

Metodo 2: Si può utilizzare il limite notevole $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{t}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{t}{2n}\right)^{\frac{2n}{t}\frac{t}{2n}n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{t}{2n}\right)^{\frac{2n}{t}}\right)^{\frac{t}{2n}n} = e^{\frac{t}{2}}$$

Dunque per $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$$

Il risultato finale è:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{2}} & t > 0 \end{cases}$$

Dunque Z_n converge in distribuzione ad una v.a. esponenziale di parametro $\frac{1}{2}$.

Esercizio 48

(a) $\frac{10}{37}$

(b) e^{-5n}

(c) $\mathbb{E}[T_n] = 5,\ \ \mathrm{Var}[T_n] = \frac{5}{n}$

(d) Per la legge forte dei grandi numeri T_n converge in maniera quasi certa a $\mathbb{E}[X_n] = 5$

Esercizio 49

(a) $P(Z_n = -1) = \frac{2}{9},\quad P(Z_n = 0) = \frac{4}{9},\quad P(Z_n = 1) = \frac{2}{9},\quad \mathbb{E}[e^{itZ_n}] = \frac{5+2(e^{it}+e^{-it})}{9}$

(b) $\mathbb{E}[Z_n] = 0,\ \ \mathrm{Var}[Z_n] = \frac{4}{9}$

(c) Per il teorema del limite centrale per v.a. indipendenti T_n converge in distribuzione ad una variabile aleatoria $T \sim \mathcal{N}(0, \frac{4}{9})$

(d) Per la legge forte dei grandi numeri W_n converge in maniera quasi certa a $\mathbb{E}[Z_n] = 0$

Chapter 5

Compiti 2009-2010

Prima prova parziale

Esercizio 1
Da un mazzo di 52 carte vengono estratte 6 carte.
(a) Qual è la probabilità che vi sia almeno una carta inferiore (strettamente) a 6?

Esercizio 2
(a) Esporre la proprietà "assenza di memoria" per le variabili aleatorie esponenziali.

Esercizio 3
Un contadino si affida alla previsioni metereologiche secondo le quali vi è una probabilità dell' 70% che la prossima settimana piova. Lui sa che se concimerà il suo campo, allora ci saranno un 60% di piante che seccheranno in caso che non piova mentre tale probabilità scende al 10% in caso di pioggia. Se invece decide di non concimare il suo campo ci saranno un 30% di piante che seccheranno nel caso che non piova e un 20% in caso di pioggia.
(a) Se decide di concimare il suo terreno, qual è la percentuale media di piantine che sopravviveranno?
(b) Cosa gli conviene fare se vuole massimizzare il numero medio di piantine che non seccheranno?

Esercizio 4
Sia (X, Y, Z) un vettore aleatorio assolutamente continuo. Sia $f_{(X,Y,Z)}$ la sua densità.

$$f_{(X,Y,Z)}(x,y,z) = \begin{cases} 0 & (x,y,z) \notin D \\ \frac{1}{2} + 4xyz & (x,y,z) \in D \end{cases}$$

Dove $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 | 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$.
(a) Determinare la densità $f_{(X,Y)}$ del vettore aleatorio (X, Y).
(b) Determinare la probabilità $P(Y < 2X)$.

Esercizio 5
Sia X una variabile aleatoria e sia F_X la sua funzione di ripartizione. Con $a, b \in \mathbb{R}$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 6 \\ ax + b & 6 \leq x < 7 \\ 1 & x \geq 7 \end{cases}$$

(a) Determinare i valori di a e b che rendono effettivamente F_X una funzione di ripartizione.
(b) Per quali valori di a e b la funzione F_X è continua?
(c) Per quali valori di a e b la funzione F_X è costante a tratti?
(d) Determinare il valore medio di X.

Seconda prova parziale

Esercizio 1
(a) Scrivere la definizione di funzione generatrice dei momenti.
(b) Se X e Y sono due variabili aleatorie indipendenti ed entrambe ammettono funzione generatrice dei momenti, che denotiamo con M_X e M_Y, rispettivamente, si determini la funzione generatrice dei momenti di $X + Y$.

Esercizio 2
Sia (X_1, X_2, X_3) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità $f_{(X_1,X_2,X_3)}$

$$f_{(X_1,X_2,X_3)}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \alpha x_1 x_2 x_3 & (x_1,x_2,x_3) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $D := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x_1 < 2, 0 < x_2 < 2, 0 < x_3 < 2\}$.
(a) Calcolare il valore di α.
(b) Calcolare $f_{(X_1,X_2)}$, f_{X_2} e $f_{X_1|X_2}$.
(c) Le variabili X_1, X_2 e X_3 sono indipendenti? Quanto vale $\mathrm{COV}(X_1, X_2)$?
(d) Sia $S = X_1 - X_2$ e $T = X_2^2$. Determinare il supporto di (S, T). Determinare la densità $f_{(S,T)}$

Esercizio 3
Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti, X_1 con distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{2}$ e X_2 con distribuzione uniforme su $(-2, 2)$. Sia $Z = \min(X_1, X_2)$.
(a) Calcolare la funzione di ripartizione di Z.
(b) Calcolare $P(Z < X_1)$.

Esercizio 4
Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $X_n \sim Unif(-1, 5)$ e siano inoltre $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite come segue:

$$Z_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad\qquad T_n := \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

(a) Calcolare F_{X_n}, $\mathbb{E}[X_n]$ e F_{T_n}.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di Z_n.
(c) Studiare la convergenza in media r-esima di Z_n.
(d) Studiare la convergenza in distribuzione e in probabilità di T_n.
(e) Studiare la convergenza in media r-esima di T_n.

Primo appello

Esercizio 1
Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $X_n \sim Unif(-1, 5)$ e siano inoltre $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite come segue:

$$Z_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad\qquad T_n := \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

(a) Calcolare F_{X_n}, $\mathbb{E}[X_n]$ e F_{T_n}.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di Z_n.
(c) Studiare la convergenza in media r-esima di Z_n.
(d) Studiare la convergenza in distribuzione e in probabilità di T_n.
(e) Studiare la convergenza in media r-esima di T_n.

Esercizio 2
Sia (X_1, X_2, X_3) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità $f_{(X_1,X_2,X_3)}$

$$f_{(X_1,X_2,X_3)}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \alpha x_1 x_2 x_3 & (x_1,x_2,x_3) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $D := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x_1 < 2, 0 < x_2 < 2, 0 < x_3 < 2\}$.
(a) Calcolare il valore di α.
(b) Calcolare $f_{(X_1,X_2)}$, f_{X_2} e $f_{X_1|X_2}$.
(c) Le variabili X_1, X_2 e X_3 sono indipendenti? Quanto vale $\mathrm{COV}(X_1, X_2)$?
(d) Sia $S = X_1 - X_2$ e $T = X_2^2$. Determinare il supporto di (S,T). Determinare la densità $f_{(S,T)}$

Esercizio 3
Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti, X_1 con distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{2}$ e X_2 con distribuzione uniforme su $(-2, 2)$. Sia $Z = \min(X_1, X_2)$.
(a) Scrivere la definizione di funzione generatrice dei momenti. Calcolare la funzione generatrice dei momenti di X_1 e X_2.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione di Z.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$.

Esercizio 4
Nel 2008, in Veneto, sono stati celebrati 30000 matrimoni. Assumiamo che ciascun coniuge sia nato in un giorno a caso tra i 365 dell'anno (stiamo supponendo che nessuno sia nato il 29 febbraio). E supponiamo inoltre che tali eventi siano indipendenti.
(a) Calcolare il numero medio di coppie in cui entrambi i coniugi sono nati il 25 dicembre.

(b) Calcolare il numero medie di coppie che festeggiano il compleanno lo stesso giorno.
(c) Stimare la probabilità che il numero di coppie che festeggia il compleanno lo stesso giorno sia superiore a 100.

Secondo appello

Esercizio 1
Una macchina per il confezionamento del latte riempe i cartoni con una quantità di latte casuale, rappresentata da una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Il valore di riempimento ideale sarebbe 1000 ml, ma vi è una certa tolleranza: una confezione è considerata *accettabile* se contiene tra 970 e 1030 ml di latte, e *difettosa* altrimenti.
(a) Se $\mu = 1000$ e $\sigma = 10$. Qualè la probabilità che una confezione sia difettosa.
(b) Supponiamo ancora che $\mu = 1000$, per quali valori di σ la probabilità che una confezione sia difettosa è minore del 5%?

Esercizio 2
Sia (X_1, X_2, X_3, X_4) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità $f_{(X_1,X_2,X_3,X_4)}$

$$f_{(X_1,X_2,X_3,X_4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} a \cdot x_1 x_3 + b \cdot x_2 x_4 & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove D è il supporto:
$D := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x_1 < \mathbf{2}, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1, 0 < x_4 < 1\}$

(a)Quali valori di a e b rendono $f_{(X_1,X_2,X_3,X_4)}$ una funzione di densità?
(b) Per quali valori di (a, b) vale la disuguaglianza $\mathbb{E}[X_3] > \mathbb{E}[X_4]$?

Esercizio 3
Scrivere la definizione di convergenza in distribuzione.
Scrivere la definizione di convergenza in probabilità.
Scrivere la definizione di convergenza quasi certa.
Scrivere la definizione di convergenza in media r-esima.

Esercizio 4

Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione $X_n \sim Poisson(\frac{1}{3})$ e $Y_n \sim Bern(\frac{1}{3})$ siano inoltre $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite come segue: $Z_n := X_n - Y_n$

$$T_n := \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}} \qquad W_n := \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$$

(a) Calcolare $\mathbb{E}[Z_n]$, $\mathrm{VAR}[Z_n]$ e $\mathbb{E}[Z_n^2]$.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione di T_n.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[W_n]$, $\mathrm{VAR}[W_n]$ e $\mathbb{E}[W_n^2]$.
(d) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di W_n.
(e) Studiare la convergenza di W_n in media r-esima con $r = 2$.

Esercizio 5

Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione F_X:

$$F_X(x) = \begin{cases} a & x < 0 \\ b \cdot \mathrm{sen}(x) & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ c & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{5.1}$$

(a) Determinare i valori di (a, b, c) per i quali F_X è effettivamente una funzione di ripartizione.
(b) Per quali valori di (a, b, c), X è una v.a. assolutamente continua?
(c) Per quali valori di (a, b, c), X è una v.a. discreta?
(d) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ nel caso in cui $a = 0$, $b = \frac{1}{3}$ e $c = 1$.

Terzo appello

Esercizio 1

Fiore e Fortunata giocano con una monetina (regolare). Fiore effettua 2 lanci e Fortunata effettua 3 lanci. Indichiamo con X_1 e X_2 il numero di croci realizzate da Fiore rispettivamente Fortunata.
(a) Quali sono le distribuzioni di X_1 e X_2?

(b) Quanto valgono $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}[X_2]$ e $\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2]$
(c) Fortunata vince se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Qual'è la probabilità che Fiore vinca la sfida?
(d)* Sia n un intero maggiore di 0. Supponiamo ora che Fiore effettui n lanci (invece di 2) e Fortunata effettui $n+1$ lanci (invece di 3). Fortunata vince la sfida se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Per quali valori di n la probabilità di vincere di Fortunata è maggiore di quella di Fiore? Per quali valori di n le due probabilità sono uguali?

Esercizio 2
Siano X e Y due variabili aleatorie discrete, X a volori in $\{1, 2\}$ e Y a valori in $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Sappiamo che:

$$P(X = k, Y = n) = \frac{1}{2} e^{-k} \frac{k^n}{n!} \qquad \begin{array}{l} \forall k \in \{1, 2\} \\ \forall n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{array}$$

(a)Calcolare la distribuzione di X. ($P(X = 1)$ e $P(X = 2)$)
(b) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
(c) Calcolare la densità condizionale di Y rispetto a X. ($P(Y = n|X = 1)$ e $P(Y = n|X = 2)$)
(d) Calcolare la distribuzione di Y. ($P(Y = n)$)
(e) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 3 Siano X e Y due variabili aleatorie indipendente.
Dire quali delle affermazioni (a), (b), (c) e (d) sono vere. `+1 per ogni risposta corretta e -1 per ogni risposta errata`

(a) Se X e Y sono variabili aleatorie di Poisson allora anche $X + Y$ è una variabile aleatoria di Poisson.
(b) Se X e Y sono variabili aleatorie esponenziali allora anche $X + Y$ è una variabile aleatoria esponenziale.
(c) Se X e Y sono variabili aleatorie Normali allora anche $X + Y$ è una variabile aleatoria Normale.
(d) Se X e Y sono variabili aleatorie di Bernoulli allora anche $X + Y$ è una variabile aleatoria di Bernoulli.

(e) Siano X e Y due v.a. binomiali indipendenti con distribuzione: $X \sim Bin(n_1, p_1)$ e $Y \sim Bin(n_2, p_2)$. Per quali valori dei parametri $X + Y$ è ancora una variabile aleatoria binomiale?
(f) Per ciascuno dei punti precedenti a cui si è risposto vero, specificare i nuovi parametri della distribuzione della somma.

Esercizio 4
Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione $X_n \sim Bernoulli(\frac{1}{2})$ e $Y_n \sim Esp(1)$ siano inoltre $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite come segue: $Z_n := X_n \cdot Y_n$

$$W_n := \min_{1\le i\le n}\{Z_i\} \qquad\qquad T_n := n \cdot \min_{1\le i\le n}\{Z_i\}$$

(a) Calcolare F_{X_n}, F_{Y_n} e F_{Z_n}
(b) Calcolare F_{W_n}.
(c) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di W_n.
(d) Sapendo che $\mathbb{E}[W_n] < \infty$, studiare la convergenza in media r-esima di W_n.
(e) Calcolare F_{T_n}.
(f) Studiare la convergenza in distribuzione di T_n.
(g)* Studiare la convergenza quasi certa di T_n.

Quarto appello

Esercizio 1
Ruggero e Lorenzo giocano a freccette. Supponiamo che per ogni lancio abbiano entrambi il 60% di probabilità di colpire il bersaglio: Ruggero ha il 20% di probabilità di fare 100 punti, il 20% di fare 50 punti e il 20% di fare 25 punti; mentre Lorenzo ha il 10% di probabilità di fare 100 punti, il 20% di fare 50 punti e il 30% di fare 25 punti. Entrambi lanciano due freccette e poi sommano i punti. Indichiamo con X_1, X_2 e X (risp. Y_1, Y_2, Y) il risultato del primo, del secondo e della somma dei lanci effettuati da Ruggero (risp. Lorenzo).
(a) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale zero punti?

(b) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 75 punti?
(c) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 100 punti?
(d) Quale è la distribuzione di X? (Verificare che la somma delle probabilità sia effettivamente 1.)
(e) Quale è la distribuzione di Y?

Esercizio 2
Sia (X, Y) un vettore aleatorio, con densità $f_{(X,Y)}$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} & (x,y) \in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove S è il semicerchio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare f_X.
(c) Calcolare F_X.
(d) A quale tipo di distribuzione appartiene la distribuzione di X
(e) X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.
(f) Quanto valgono la media e la varianza di X.
(g) Calcolare $\mathbb{E}[Y^2]$.

Esercizio 3
Quali delle seguenti funzioni possono essere considerate delle densità di probabilità? Giustificare la risposta.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \in (0, \frac{1}{2}\pi) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \in (0, \frac{3}{2}\pi) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (1, 2) \\ \frac{1}{4} & x \in (10, 12) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(d)
$$f_{(X,Y)}(x,y) = xy \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Esercizio 4

Costruire un esempio con due variabili aleatorie X e Y tali che:
$$\mathrm{COV}(X,Y) = 0$$
ma tali che X e Y non sono indipendenti.

Esercizio 5

Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione $X_n \sim \mathit{Bernoulli}\left(\frac{1}{4}\right)$ e $Y_n \sim \mathit{Bernoulli}\left(\frac{3}{4}\right)$ siano inoltre $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite come segue: $Z_n := X_n + Y_n - 1$
$$W_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i}{n} \qquad\qquad T_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i}{\sqrt{n}}$$

(a) Calcolare la densità discreta di Z_n.
(b) Calcolare la media e il momento del secondo ordine e la varianza di Z_n.
(c) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di W_n.
(d) Studiare la convergenza in distribuzione di T_n.
(f) Studiare la convergenza in media r-esima di W_n.