MATEMATICA 2 per Informatica
Primo appello, 23 giugno 2004

TEMA B

Esercizio 1

a) Si completi la seguente definizione: "Due matrici quadrate $n \times n$ A e B sono dette simili se..."
b) Si dimostri per induzione su k che se A è simile a B, allora A^k è simile a B^k per ogni $k \geq 0$.

Soluzione:
a) .. se esiste una matrice invertibile P tale che $B = P^{-1}AP$.
b) Per ipotesi esiste una matrice invertibile P tale che $B = P^{-1}AP$. Dimostriamo per induzione su k che $B^k = P^{-1}A^kP$. Per $k = 0$ l'affarmazione è vera perche' $B^0 = I_n = P^{-1}I_nP = P^{-1}A^0P$ (e per $k = 1$ segue direttamente dalla definizione di matrici simili). Supponiamo vero $B^k = P^{-1}A^kP$ e dimostriamo $B^{k+1} = P^{-1}A^{k+1}P$. Sappiamo che $B^{k+1} = B^kB$ e $A^{k+1} = A^kA$; usando l'ipotesi $B = P^{-1}AP$ e l'ipotesi induttiva $B^k = P^{-1}A^kP$ otteniamo

$$B^{k+1} = B^kB = (P^{-1}A^kP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kI_nAP = P^{-1}A^{k+1}P.$$

Quindi $B^k = P^{-1}A^kP$, cioe' A è simile a B, per ogni $k \geq 0$.

Esercizio 2

Sia data la matrice $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda+2 & 1 \end{bmatrix}$.
a) Determinare per quali valori del parametro λ la matrice A è invertibile.
b) Calcolare A^{-1} per $\lambda = -1$.

Soluzione:
a) Sappiamo che una matrice è invertibile se e solo se il determinante è diverso da 0. Il determinante di A è $\det(A) = \lambda(\lambda + 2)$ quindi A è invertibile per ogni λ diverso da 0 e -2.

b) Tramite operazioni elementari sulla matrice $[A \mid I_3]$ otteniamo la matrice $[I_3 \mid A^{-1}]$ da cui ricaviamo la matrice inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3

Sia dato il sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare una base del sottospazio ortogonale $V^\perp$ di V.
b) Calcolare la dimensione di V.
c) Determinare una base di V.

Soluzione:

a) Una base per $V^\perp$ è data dalle soluzioni base del sistema omogeneo $AX = 0$, dove A è la matrice le cui righe sono i vettori v_1, v_2, v_3 trasposti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Riduco la matrice A in forma a scala ridotta

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e ricavo le soluzioni base del sistema:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base di $V^\perp$ è data dall'insieme $\{w_1, w_2\}$ (attenzione che $\langle w_1, w_2 \rangle$ NON è una base di $V^\perp$, è TUTTO il sottospazio vettoriale $V^\perp$).

b) La dimensione di V è pari al rango (per righe) della matrice A, quindi è 2. (Oppure dal punto a) sappiamo che la dimensione di $V^\perp$ è 2, quindi $dim(V) = 4 - dim(V^\perp) = 2$.)

c) Una base per lo spazio delle righe di A è data dalle prime due righe $r_1 = [1, 0, 0, 1]$ e $r_2 = [0, 1, 1/2, -1/2]$ della matrice B, quindi una base per V è data da r_1^T e r_2^T.

(Oppure si puo' considerare la matrice A^T le cui colonne sono i vettori v_1, v_2, v_3; in questo caso V coincide con lo spazio colonna (spazio immagine) di A^T quindi riducendo la matrice a scala e guardando la posizione degli 1-dominanti si ottiene che una base di V è data dall'insieme $\{v_1, v_2\}$.)

Esercizio 4

Dato il sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ generato dai due vettori v_1 e v_2 dove

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

si calcoli la proiezione $\mathrm{proj}_U(x)$ del vettore $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ su U.

Soluzione:
Per trovare la proiezione ortogonale di x su U devo per prima cosa procurarmi una base ortogonale di U. Tramite l'algoritmo di Gram-Schmidt costruiamo una base ortogonale $\{F_1, F_2\}$ di U:

$$F_1 = v_1, \quad F_2 = v_2 - \frac{v_2 \bullet F_1}{\|F_1\|} F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La proiezione ortogonale di x su U è quindi

$$proj_U(x) = \frac{x \bullet F_1}{\|F_1\|} F_1 + \frac{x \bullet F_2}{\|F_2\|} F_2 = F_1 + 2F_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(infatti $x - proj_U(x) = proj_{U^\perp}(x)$ risulta ortogonale a v_1 e v_2).

Esercizio 5

Sia A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1+k & k \\ -2k & 1-2k \end{bmatrix}.$$

a) Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A è diagonalizzabile.
b) Per $k = 1$ si trovi una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è $c_A(x) = (x-1-k)(x+2k-1) + 2k^2 = (x-1)(x-1+k)$, quindi gli autovalori sono $a_1 = 1$ e $a_2 = 1-k$. Per $k \neq 0$ ho 2 autovalori distinti quindi la matrie A è diagonalizzabile (sia in $\mathbb{R}$ che in $\mathbb{C}$). Per $k = 0$ la matrice è la matrice identica, è gia' una matrice diagonale, quindi a maggior ragione è diagonalizzabile (infatti $I_2^{-1}AI_2 = A$ è diagonale). Quindi A è diagonalizzabile per ogni k in $\mathbb{R}$.

b) Per $k = 1$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. *Gli autovettori sono* $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e* $v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *quindi una matrice* P *invertibile tale che* $P^{-1}AP$ *sia diagonale è data da* $P = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 6

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{array}{rcr} x - \ y & = & 1 \\ x + \ y & = & 0 \\ x - 2y & = & -1 \end{array}$$

a) Si determinino i ranghi della matrice dei coefficienti e della matrice completa del sistema. Il sistema ha soluzioni?
b) Si trovi una soluzione approssimata del sistema.
Soluzione:
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e C *la matrice completa* $[A \mid B]$*; riducendo* C *ed* A *tramite operazioni elementari risulta che il rango della matrice completa* C *è* 3 *mentre il rango di* A *è* 2 *(e quindi sappiamo che il sistema* $AX = B$ *non ha soluzioni).*

b) Le soluzioni approssimate del sistema $AX = B$ *sono le soluzioni del sistema* $A^T AX = A^T B$ *di matrice completa*

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione di questo sistema, e quindi la soluzione approssimata del sistema iniziale, è $x = 1/7, y = 3/14$.