Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

PLIMPTON 322
LA TEORIA “IGI-IGIBI”

Luigi Salce

MATHESIS

Padova, 30 Novembre 2018
aula 1AD/100 - ore 16.00

Premessa

Ringrazio il Presidente della Mathesis Umberto Marconi per avere organizzato questo secondo appuntamento per parlare di Plimpton 322. Nell'incontro del 25 Maggio scorso ne ho raccontato la storia, soffermandomi su alcuni dei principali protagonisti dello studio della famosa tavoletta **(IMMAGINE 1**). Avevo promesso una seconda puntata di carattere meno storico e più matematico, per esporre le tre interpretazioni che ne sono state date e completare così il racconto.

Oggi mantengo solo in parte quella promessa. Presenterò infatti il punto di vista di Eleanor Robson **(IMMAGINE 2)**, che si può trovare in due lavori del 2001 e 2002 **(IMMAGINE 3)**. Il lavoro [R1] del 2001 è molto denso, corposo e tecnico; è apparso su Historia Mathematica col titolo: "Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322". Fu questo il lavoro che procurò fama e meritò prestigiosi premi alla giovane Robson. Il lavoro [R2]: "Words and Pictures: New Light on Plimpton 322", è apparso sull' American Math. Monthly; si tratta del testo di una conferenza che la Robson venne invitata a tenere a New Orleans nel 2001. In entrambi questi lavori si confutano sia l'interpretazione originaria del 1945 di Neugebauer, che vede la tavoletta come una lista di terne pitagoriche (interpretazione accolta nei più diffusi testi di storia della matematica antica), sia l'altra accreditata interpretazione per cui Plimpton 322 sarebbe una tavola trigonometrica.

La Robson sposa in toto una terza interpretazione, detta "teoria igi-igibi" (o dei numeri e loro reciproci), legata alla soluzione di equazioni di secondo grado. Questa interpretazione era apparsa già nel 1949 con Bruins e venne ripresa, a partire dal 1980, da più di un autore, senza trovare però la considerazione che la Robson ritiene meriti.

Dopo i lavori della Robson sono apparsi altri lavori importanti su Plimpton 322, tra i quali ne vanno menzionati almeno tre **(IMMAGINE 4)**.

Il primo del 2007 è di Joran Friberg il quale, all'interno del suo libro "A remarkable collection of Babylonian mathematical texts" in cui studia le 121 tavole di testo e le 151 tavole di moltiplicazione di proprietà della "Martin Schøyen Collection", raggruppate tra la fine degli anni '80 e gli anni '90 da precedenti collezioni in Europa e Stati Uniti, pone un'appendice dal titolo: "Plimpton 322: A table of parameters for igi-igibi problems".

Il secondo del 2011 di John P. Britton, Christine Proust e Steve Shnider: "Plimpton 322: a review and a different perspective", concorda con la Robson sulla teoria "igi-igibi" come generatrice della tavoletta, ma offre una diversa prospettiva sullo scopo per cui venne preparata.

Il terzo lavoro del 2017 è degli australiani Daniel F. Mansfield e Norman J. Wildberger: ""Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry", che sostiene l'interpretazione trigonometrica, secondo la quale la tavoletta sarebbe stata composta per presentare una lista di triangoli rettangoli.

Di questi lavori, di cui ho letto solo le introduzioni e le recensioni, alcune favorevoli, altre meno, farò qualche accenno nella Conclusione.

Era mia intenzione, dopo avere studiato la scorsa estate il ponderoso articolo [R1], di raccontare quel lavoro. Ma sarebbe stata un'impresa improba anche avendo tre ore a disposizione, vista la sua complessità. Perciò ho ripiegato sull'idea di presentarvi una via di mezzo tra quel lavoro e il più divulgativo articolo [R2]. Come la Robson racconta nei ringraziamenti al termine di [R1], venne a conoscenza del lavoro di Buck: “Sherlock Holmes in Babylon” che sta all'origine di [R1] quando ancora era studente undergraduate nella prima metà degli anni '90 di David Fowler, il quale la incoraggiò ad entrare nel mondo degli “studi cuneiformi”. La sua tesi di dottorato, riguardante la nozione di angolo nell'Antica Babilonia, è stata ripresa nell'articolo [R1]. La re-interpretazione con la “teoria delle coppie di numeri reciproci” fu da lei presentata per la prima volta nel 1996 e poi in diverse versioni in più occasioni. Tutto ciò sta a dimostrare la lunga gestazione di questi lavori.

Per introdurre ai lavori della Robson, riporto una frase presa dal lavoro [R2], che ben esprime il suo approccio allo studio della matematica antica.

<< A differenza di Sherlock Holmes, noi non possiamo dipendere solo dalla nostra intuizione e dalle nostre capacità deduttive, e non possiamo interrogare gli antichi autori o esaminarne gli scritti per avere degli indizi. Dobbiamo quindi utilizzare tutte le risorse delle conoscenze a nostra disposizione: la lingua, la storia e l'archeologia, il contesto sociale, e anche il sistema di concetti matematici nel cui ambito l'artefatto studiato è stato creato. Nel caso di Plimpton 322, ad esempio, ci sono tre interpretazioni in conflitto tra di loro, tutte e tre matematicamente valide. Come io mostrerò, sono questi strumenti di contestualizzazione che ci permettono di fare una scelta tra queste tre interpretazioni.>>

I punti in cui ho diviso la mia esposizione sono **(IMMAGINE 5)**:

1. Uno sguardo alla tavoletta

2. Critica della teoria delle terne pitagoriche

3. Critica della teoria trigonometrica

4. La teoria “igi-igibi”, o delle coppie di numeri reciproci

5. Conclusione

Ricordo ancora una volta che sonoun “dilettante” delle cose che racconto, non essendo né uno storico della matematica, né tanto meno uno storico, e meno ancora un esperto delle civiltà mesopotamiche.

Come nell'incontro precedente, di questo testo darò solo lettura, affidandomi ad una serie di immagini.

1. Uno sguardo alla tavoletta

Chiedo scusa a chi era presente all'incontro di Maggio, ma devo ricordare alcune cose dette allora per chi non vi avesse partecipato. Ricordo che

Plimpton 322 è una delle 34 tavolette donate nel 1936 da George Arthur Plimpton alla *“Rare Book and Manuscript Library”* della Columbia University di New York, assieme a molti altri manufatti archeologici e ad una collezione preziosa di libri antichi. La tavoletta proviene dalla città di Larsa (40 Km da Ur e 250 Km a SE di Babilonia) **(IMMAGINE 6)**, e risale ai decenni precedenti alla conquista di Larsa da parte di Hammurabi, avvenuta nel 1763 A.C..

La scheda n. 322 del catalogo del lascito di Plimpton, curato nel 1943 da Isaac Mendelsohn, riporta **(IMMAGINE 7)**:

<<Tavoletta di argilla, rotta nel bordo sinistro con un pezzo mancante, angolo in basso a destra ed una parte delle colonne 3 e 4 sbeccate; abbastanza ben conservata, marrone scuro. 8.8×12.5 cm.; si rilevano 4 colonne con 16 righe, il dietro èvuoto. Contenuto: Resoconto commerciale. Nessuna data.>>

Entrambi i lati di Plimpton 322, che è grande quanto uno smartphone, sono predisposti come pagine di un taccuino. La parte posteriore è bianca. La parte anteriore contiene 15 righe di numeri in caratteri cuneiformi, sistemati in 5 colonne, precedute da una riga di intestazioni scritte in una lingua che è un misto di Sumerico e Accadico. Denoteremo le 5 colonne coi nomi di Colonna 1^, 2^, 3^, 4^ e 5^.
Quindi Plimpton 322 è una matrice 15x5 con una riga in alto di intestazioni.
Si osservi nell'immagine originale della tavoletta, o nel disegno che ne ha fatto la Robson, come le righe della Colonna 1^ e soprattutto la sua intestazione siano molto più lunghe che nelle altre colonne, e come i simboli cuneiformi che compongono l'intestazione si addensino accavallandosi fino ad occupare parte della Colonna 2^. Torneremo ampiamente su questo punto cruciale.
Ci sono altre parti della tavoletta rovinate. Prima della Robson si è cercato di ricostruire le parti mancanti con successo, tranne che per l'intestazione della prima riga. Solo la Robson ne ha proposto la ricostruzione completa, su cui ora si concorda.

Vediamo allora il contenuto delle colonne. La Colonna 4^ contiene sempre la stessa parola, che si può tradurre con “numero”, mentre la Colonna 5^ contiene i numeri da 1 a 15 in progressione. Queste colonne spesso sono considerate come un'unica colonna. Sono quindi interessanti solo le prime tre colonne, che sono intestate con termini che sono usualmente tradotti così:

Colonna 3^: diagonale (denotata con d)
Colonna 2^: lato corto (o base, denotato con b)
Colonna 1^: risultante della diagonale …. (corrisponde a b^2/l^2 o $d^2/l^2 = 1 + b^2/l^2$ con l cateto lungo del triangolo rettangolo, **IMMAGINE 8).**

L'incertezza tra b^2/l^2 o $d^2/l^2 = 1 + b^2/l^2$ è dovuta al fatto che la frattura nel bordo sinistro della tavoletta è proprio dove avrebbe potuto esserci un 1. Vedremo come la Robson ha risolto il dubbio a favore dell'esistenza dell' 1.

Usando la terminologia della moderna trigonometria, d/l e b/l sono rispettivamente la secante (cioè l'inverso del coseno) e la tangente dell'angolo del triangolo rettangolo compreso tra il lato lungo l e la diagonale d, che come è noto sono legate dalle relazioni:

$$d^2 = l^2 + b^2 \qquad \Rightarrow \qquad d^2/l^2 = 1 + b^2/l^2.$$

Esaminiamo le due tavole che offrono la traduzione in numeri arabi di Plimpton 322, la prima in numerazione sessagesimale e la seconda in numerazione decimale **(IMMAGINE 9)**. Ricordo che la numerazione sessagesimale dell'Antica Babilonia era posizionale: ad esempio, i numeri nella Riga 1^ sono (in notazione “slash”, con a fianco l'equivalente decimale):

1,59/00/15 = 1+59/60+0/3600+15/216.000 ~ 1,9834028

1/59 = 60 + 59 = 119

2/49 = 120 + 49 = 169 .

E' importante osservare che, mentre i numeri della Colonna 1^ in notazione sessagesimale sono numeri esatti, quelli della loro traduzione in notazione decimale sono approssimati alla settima cifra decimale (tranne 1,5625 = 25/16 nella riga 11^ che è esatto). Ciò è dovuto al fatto che, come vedremo, in numerazione sessagesimale ci sono molti più numeri “regolari” che non in numerazione decimale. Ad esempio, il numero 1,59/00/15 corrisponde alla frazione (ridotta ai minimi termini): 28.561/14.400 = $28.561/2^6 3^2 5^2$ = 1,983402777... .

Si noti che i valori di d^2/l^2 in Colonna 1^ sono in ordine decrescente, cosa che non accade per i numeri in Colonna 2^ e 3^.

La cosa che da sempre ha sorpreso gli studiosi è che le 15 righe contengono in Colonna 2^ e 3^ il numero più piccolo b e quello più grande d di 15 terne pitagoriche, cioè terne di numeri interi (b, l, d) tali che $b^2 + l^2 = d^2$. Tranne la terna in Riga 11^, sono tutte terne primitive, cioè senza fattori comuni. Spesso nei lavori che studiano la tavoletta viene aggiunta una colonna per il lato lungo l, che fornisce il terzo elemento della terna (come in immagine).

Nelle due tavole in **IMMAGINE 9** sono già stati corretti sette errori, sui quali non entro nel merito, perché l'analisi di quali siano i numeri sbagliati e delle ragionevoli correzioni da apportare porterebbe via molto tempo. Quattro errori sono dovuti con ogni probabilità ad una copiatura sbagliata (era prassi di allora copiare in bella copia e cancellare la brutta nelle tavolette di argilla). Tre errori sono invece non banali; quello che ha costituito il maggior problema si trova nella Riga 2^ della Colonna 3^, su cui torneremo tra poco.

2. Critica della teoria delle terne pitagoriche

A partire dal lavoro fondante di Neugebauer & Sachs del 1945, nel quale venne studiata Plimpton 322 per la prima volta, l'interpretazione dominante è stata che la tavoletta sia stata composta per fornire una lista di terne pitagoriche e che tali terne siano state ottenute con la “parametrizzazione di Diofanto”, che si trova già nella Proposizione 29, Lemma 1 del Libro X degli Elementi di Euclide. Essa afferma che ogni terna di numeri interi positivi e coprimi (b, l, d) tale che $b^2 + l^2 = d^2$, si ottiene da due numeri di opposta parità $p > q$ tra loro coprimi nel modo seguente **(IMMAGINE 10)**:

$$b = p^2 – q^2$$
$$l = 2pq$$
$$d = p^2 + q^2.$$

Per introdurci alla teoria “igi-igibi”, osserviamo che la Colonna 1^ della tavoletta, contiene i numeri:

$$d^2/l^2 = (p^2 + q^2)^2 / 4p^2q^2 = ((p^2 + q^2)/ 2pq)^2 = ((p/q + q/p)/2)^2,$$

ovvero, ponendo $X = p/q$, d/l coincide con la semi-somma di X e del suo reciproco X^{-1}.

In molti testi e articoli in cui si opta per questa interpretazione, la tavoletta è integrata, oltre che con una colonna contenente il cateto lungo del triangolo rettangolo, anche con i parametri p e q e i loro rapporti p/q **(IMMAGINE 11, parte alta)**. Si noti che i valori del rapporto p/q sono in ordine decrescente. Alla teoria delle terne pitagoriche la Robson presenta le seguenti obiezioni:

1) non c'è evidenza che nell'Antica Babilonia fossero usati i concetti di numeri pari e dispari e di numeri coprimi, né che fosse nota la parametrizzazione delle terne pitagoriche primitive.

E' noto che nella Mesopotamia di allora esisteva una “Tabella standard dei numeri reciproci” dei numeri regolari con una posizione (cioè ≤ 60) **(IMMAGINE 12).** Ricordo che i numeri regolari (in numerazione sessagesimale) sono quelli aventi per divisori primi solo 2, 3 e 5, i divisori primi di 60; sono i numeri i cui reciproci hanno forma esatta e non periodica (come in numerazione decimale i numeri regolari sono quelli con divisori primi solo 2 e 5).

2) Neugebauer e Sachs hanno notato che i valori di p e q usati per Plimpton 322 sono tutti tratti dalla “Tabella standard dei numeri reciproci” (tranne il 205 in Riga 4^). In [R1] si calcola che ci fossero 159 di tali coppie possibili. Non si capisce con che criterio possano essere state scelte le 15 coppie utilizzate.

3) I numeri della Colonna 1^ sono in ordine decrescente, mentre non lo sono né quelli delle Colonne 2^ e 3^, né quelli nelle colonne contenenti p e q. Poiché l'ordine della lettura nell'Antica Babilonia era come il nostro, da sinistra a destra e dall'alto al basso, le colonne che precedevano la Colonna 1^ nella tavoletta integra, della cui esistenza sono tutti convinti, avrebbero dovuto avere un qualche ordinamento. Quindi queste colonne non avrebbero dovuto contenere i parametri p e q, come ipotizza chi è a favore della teoria delle terne pitagoriche.

4) La intitolazione della Colonna 1^, che Neugebauer & Sachs riescono a tradurre solo in parte, ma di cui la Robson propone la completa traduzione,

non è compatibile con la teoria dei parametri p e q, mentre è a favore dell'interpretazione “igi-igibi” e della costruzione geometrica “taglia e incolla” ad essa associata, cose che vedremo tra poco.

5) L'errore non banale più difficilmente spiegabile, nella Riga 2^ della Colonna 3^ **(IMMAGINE 9)**, che vede il calcolo di $p^2 + q^2$ uguale a 3/12/01 = 11.521 anziché al corretto 1/20/25 = 4.825, viene spiegato in modo non credibile nel caso fossero già a disposizione in due colonne ora scomparse i parametri p e q.

6) Se lo scopo di Plimpton 322 era quello di creare una lista di terne pitagoriche, non si capisce perché non sia stata inclusa anche una colonna contenente i cateti lunghi l dei triangoli rettangoli.

Per tutti questi argomenti la Robson esclude che la tavoletta sia stata costruita tramite i cosiddetti “numeri generatori”, cioè i due parametri p e q, e che avesse come scopo quello di fornire una lista di terne pitagoriche.

3. Critica della teoria trigonometrica

La teoria trigonometrica è stata appena accennata da Neugebauer e Sachs nel loro articolo fondante del 1945, dove dicono:

<<Formulando il problema con riguardo ai triangoli, possiamo dire che si parte nella prima riga con un triangolo che è quasi la metà di un quadrato (b/l = 0,59 30) e che gradualmente si diminuisce l'angolo compreso tra d ed l fino ad arrivare all'ultimo nella riga 15 che da un angolo di circa 31°.>>

Tale teoria trova una chiara esplicitazione in un articolo di David E. Joyce del 1995, non pubblicato ma rintracciabile in rete, su cui la Robson esercita la sua critica. Joyce, dopo avere riconosciuto che nell'Antica Babilonia era nota e molto usata la “regola dei triangoli rettangoli”, cioè quello che noi chiamiamo il Teorema di Pitagora, dice che tale conoscenza e le intestazioni delle Colonne 2^ e 3^ autorizzano a credere che Plimpton 322 sia dedicata allo studio dei triangoli rettangoli. E afferma:

- *ciascun numero della Colonna 1^ è il quadrato della secante di un angolo di un triangolo rettangolo a lati interi e questi angoli decrescono di circa un grado per ogni riga.*

A dimostrazione di ciò Joyce allega una tabella **(IMMAGINE 13)** in cui sono affiancati, a sinistra della Colonna 1^, i corrispondenti angoli calcolati in gradi e (“perversamente”, sic!) in centesimi di grado. La conclusione che se ne può trarre, dice Joyce, è la seguente:

- *Plimpton 322 è una tavola trigonometrica contenente le secanti di angoli da circa 45° (44°76) fino a circa 30° (31°89).*

Joyce aggiunge il seguente argomento a favore di questa interpretazione. Se si pensa che la tavoletta sia stata generata tramite i parametri p e q (cosa di cui secondo lui c'è indiretta evidenza), e se si considerano tutte le possibili coppie ammissibili di numeri regolari (p,q) con $q < p \leq 125$, si vede che i triangoli che restano associati ai valori decrescenti di p/q (o equivalentemente di d^2/b^2) sono solo 16, e quello che non è presente nella tavoletta si collocherebbe nella riga 12, a colmare il divario troppo elevato di quasi 2 gradi tra gli angoli di 36°87 e 34°98. Congettura poi che i valori numerici in tale riga mancante fossero troppo elevati per lo scriba autore della tavoletta. Tale argomento è però indebolito dal fatto che la Robson ha trovato ben sei righe che possono essere inserite nella tavoletta, come vedremo più avanti, tra cui quella individuata da Joyce.

La Robson è molto critica riguardo alla teoria trigonometrica presentata da Joyce. Sostiene che questa teoria va scartata perché nella matematica dell'Antica Babilonia non esiste traccia della nozione di angolo (a parte l'angolo retto). La Robson mostra come i testi Antico Babilonesi che trattano e disegnano cerchi li vedano come aree racchiuse dalla circonferenza, piuttosto che come la figura che si ottiene ruotando un raggio attorno ad un suo estremo, cosa che sta alla base della nozione di angolo. Tant'è che la formula che si trova in alcune tavolette per il calcolo dell'area A di un cerchio è:

$$A = c^2/12$$

con c lunghezza della circonferenza (quantità facilmente misurabile) e 12 = 4x3, dove 3 è l'approssimazione allora usata per π. La formula che usiamo noi: $A = r^2\pi$, è collegata alla precedente dal fatto che $c = 2r\pi$.

L'interpretazione trigonometrica è stata riformulata nel 2017, presentata sotto diversa forma, nel lavoro dei due australiani Mansfield e Wildberger dal titolo: "Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry". Questo lavoro ha tenuto conto di quello della Robson, essendo di 16 anni posteriore, e la confutazione della Robson alla teoria trigonometrica non sembra gli si possa applicare molto. Infatti Mansfield e Wildberger parlano di una "trigonometria razionale" basata sul rapporto dei cateti dei triangoli rettangoli, che prescinde dalla nozione di angolo. Torneremo nelle conclusioni su questo lavoro.

4. La teoria "igi-igibi", o delle coppie di numeri reciproci

I problemi di tipo "igi-igibi", che significa "numero e suo reciproco", avevano un ruolo centrale nella formazione matematica presso le scuole degli scribi. Molte tavolette dei primi due secoli del secondo millennio A.C. testimoniano che gli studenti degli scribi dovevano conoscere la "Tabella standard dei numeri reciproci" **(IMMAGINE 12)**. Dovevano anche imparare come calcolare i reciproci dei numeri regolari fuori di tale lista.
Cosa c'entrano le coppie di numeri reciproci regolari con Plimpton 322? Diamo di seguito una risposta procedendo per punti.

1. LA COSTRUZIONE GEOMETRICA "TAGLIA E INCOLLA" IN YBC 6967

La spiegazione della Robson parte da un'altra famosa tavoletta, denotata con YBC 6967, della Yale Babylonian Collection, citata da Neugebauer & Sachs nel 1945 e studiata da Hoyrup nel 1990, che proviene all'incirca dallo stesso periodo e dallo stesso luogo di Plimpton 322. Questa tavoletta tratta il seguente problema:

trovare un numero X ed il suo reciproco X' nota la loro differenza.

Il problema viene risolto con una tecnica geometrica nota come “taglia e incolla” **(IMMAGINE 14)**; precise istruzioni forniscono un algoritmo per trovare X e X'. Con questa tecnica si ricavano, come vedremo, terne pitagoriche come quelle in Plimpton 322**.**
Ecco la descrizione che si trova in YBC 6967 tradotta dall'Accadico (NB. viene usata la numerazione sessagesimale, nelle parentesi [-] la traduzione decimale)

<<Un numero supera di 7 il suo reciproco. Quali sono il numero e il suo reciproco? Procedi così: dividi a metà 7 e ottieni 3,30 [3,5]. Moltiplica 3,30 per 3,30 e ottieni 12,15 [12,25]. Aggiungi 1/00 [60] a 12,15 e risulta 1/12,15 [72,25]. Cosa è il lato del quadrato di area 1/12,15? E' 8,30 [8,5]. Scrivi 8,30 e sottrai 3,30, il “takiltum”; poi aggiungi 3,30. Nel primo caso ottieni 5 e nel secondo caso ottieni 12. Il numero è 12 e il reciproco è 5.>>

Si noti che si dava per scontato che si sapesse trovare la radice quadrata di 72,25. Cosa significa *“takiltum”*? Per ora lo traduciamo con “il risultato”. Questo termine tornerà nella decifrazione della Robson dell'intestazione della Colonna 1^ di Plimpton 322. Il procedimento effettuato è stato il seguente :

$$((X - X')/2)^2 + XX')^{1/2} = ((X^2 + X'^2 - 2XX')/4 + XX')^{1/2} =$$

$$((X^2 + X'^2 + 2XX')/4)^{1/2} = ((X + X')^2/4)^{1/2} = (X + X')/2$$

Quindi dalla differenza X - X' si ricava la semi-differenza, da questa con i passaggi di cui sopra si ricava la semi-somma; da semi-differenza e semi-somma si ricavano $X = (X + X')/2 + (X - X')/2$ e $X' = (X + X')/2 - (X - X')/2$.
Traducendo in numerazione decimale, il procedimento sui dati numerici del problema posto in YBC 6967 è rappresentato dalla seguente formula

$$((X-X')/2)^2 + XX')^{1/2} = ((7/2)^2 + 60)^{1/2} = (3{,}5^2 + 60)^{1/2} = 72{,}25^{1/2} = 8{,}5$$

$$8{,}5 - 3{,}5 = 5 \qquad e \qquad 8{,}5 + 3{,}5 = 12.$$

Il collegamento con le equazioni di 2° grado si ha perché, invertendo nel procedimento precedente i ruoli di X - X' e X + X' e togliendo XX' anzichè sommarlo, da X + X' e XX' si ricava X - X' e quindi le soluzioni X ed X' della equazione di 2° grado: $Y^2 - (X + X')Y + XX' = (Y - X)(Y - X')$.

2. IL PROBLEMA “IGI-IGIBI” IN PLIMPTON 322

Le due tabelle che compaiono nella **IMMAGINE 11** vanno messe a confronto:

- nella **parte alta** si fanno precedere alle Colonne 2^ e 3^ due colonne con i parametri p e q (detti “numeri generatori”) della teoria delle terne pitagoriche, altre due colonne con i loro quadrati ed una con il lato l, e compare un'ultima colonna contenente il rapporto p/q

-nella **parte bassa** si fanno precedere alle Colonne 1^, 2^ e 3^ due colonne con i parametri X e 1/X della teoria “igi-igibi”, e altre due colonne con la loro semi-differenza e semi-somma ;poiché X = p/q, la prima colonna della parte bassa coincide con l'ultima della parte alta.

Come già osservato, mentre i parametri p e q sono in ordine di grandezza del tutto casuale, i parametri X sono in ordine decrescente (e quindi 1/X in ordine crescente), a partire da 2,24 (cioè 2 + 24/60 = 12/5) fino a 1,48 (cioè 1 + 48/60 = 9/5).

Un facile calcolo mostra che come conseguenza anche i numeri della Colonna 1^ (e le loro radici quadrate) sono in ordine decrescente:

$$9/5 \le X_1 \le X_2 \Rightarrow (X_2 - X_1) \le X_1X_2(X_2 - X_1) \Rightarrow X_2 + X_1^2X_2 \le X_1X_2^2 + X_1$$
$$\Rightarrow X_2(X_1^2+ 1) \le X_1(X_2^2+ 1) \Rightarrow (X_1^2+ 1)/X_1 \le (X_2^2+ 1)/X_2$$
$$\Rightarrow (X_1 + 1/X_1)/2 \le (X_2 + 1/X_2)/2 .$$

A differenza della tavoletta YBC 6967, in Plimpton 322 invece che avere XX' = 60 si ha XX' = 1 **(IMMAGINE 15**). Si ottiene allora:

$$((X - X')/2)^2 + 1 = ((X^2 - 1)/2X)^2 + 1 =$$
$$(X^4 + 2X^2 + 1)/4X^2 = ((X^2 + 1)/2X)^2 = ((X + X')/2)^2$$

che, posto $(X - X')/2 = b/l$ e $(X + X')/2 = d/l$, corrisponde a $(b/l)^2 + 1 = (d/l)^2$. Moltiplicando questa uguaglianza per opportuni prodotti di 2, 3 e 5, si ottiene una terna di numeri interi che è una terna pitagorica. Vediamone due esempi in due righe di Plimpton 322.

ESEMPI (**IMMAGINE 15 e IMMAGINE 11, parte bassa**)

Prendiamo come esempio la Riga 1^, con X e X' calcolati già da Neugebauer & Sachs (2^ riga in sessagesimale, 3^ in frazione decimale)

X	X'	(X – X')/2	(X + X')/2	$((X + X')/2)^2$	b	d	l
2,24	0,25	0,59 30	1,24 30	1,59 00 15	1 59	2 49	2 00
12/5	5/12	119/120	169/120	28.561/14.400	119	169	120
		b / l	d / l	d^2 / l^2	terna pitagorica		

Come si è passati da b/l = 0,59/30 e d/l = 1,24/30 a b = 1/59 e d = 2/49?
Si è prima moltiplicato per 2, ottenendo 1,59 e 2,49, poi eliminando la virgola, ovvero, moltiplicando per 60 = 2 x 2 x 3 x 5.

Vediamo la più semplice Riga 11^ di Plimpton 322

X	X'	(X – X')/2	(X + X')/2	((X + X')/2)^2	b	d	l
2	0,30	0,45	1,15	1,33 45	45	1 15	1
2	1/2	3/4	5/4	25/16	45	75	60
		b / l	d / l	d^2 / l^2	terna pitagorica		

Da b/l = 0,45 e d/l = 1,15 si è passati a b = 45 e d = 1/15 moltiplicando per 60; in questo caso, l'unico della tabella, si è ottenuta una terna non primitiva. Non si capisce perché non si è semplicemente moltiplicato per 4, ottenendo così la terna (3,4,5).

3. INTESTAZIONE DELLA COLONNA 1^ E AGGIUNTA DI UN 1

Fino dai primi studi effettuati su Plimpton 322 si è presentato il dubbio se la Colonna 1^ contenga i valori di d^2/l^2 oppure di b^2/l^2, a seconda che si supponga un 1 in testa alla riga oppure no. In accordo con il problema di geometria “taglia e incolla”, ciò equivale a considerare l'area del quadrato grande, in cui è stato inserito il quadrato piccolo, oppure l'area del quadrato piccolo. L'analisi linguistica dell'intestazione della Colonna 1^ fatta dalla Robson porta a decidere per la prima ipotesi, ed è uno degli argomenti forti a favore della stessa teoria “igi-igibi”.

Esaminiamo allora la intestazione parzialmente danneggiata della Colonna 1^, scritta in Sumerico e Accadico e che si presenta così **(IMMAGINE 16)**

[ta]-ki-il-ti-si-li-ip-tim
[sa in] -na-as-sa-hu-ma SAG i- ??? - ù

I tre ??? stanno per la serie di caratteri cuneiformi che si addensano a ridosso della seconda colonna. Neugebauer & Sachs traducono questa intestazione solo parzialmente come:

<Il takiltum della diagonale che è stato sottratto tale che la larghezza ... >

Abbiamo già incontrato la parola *takiltum* nella tavoletta YBC 6967, dove indicava “il risultato”, ovvero la lunghezza risultante del lato del quadrato piccolo. Qui, essendo nella prima colonna, si riferisce necessariamente ad un quadrato, cioè ad un'area. Ciò non costituisce un problema, perché nell'Antica Babilonia si indicavano con la stessa parola sia il lato che l'area di un quadrato.
Qui il “*takiltum della diagonale*” richiede che ci sia un 1 in testa ad ogni riga, perchè si tratta del quadrato risultante costruito sulla diagonale, e ciò risolve il dubbio iniziale.
Però resta un altro problema: se seguiamo la traduzione di Neugebauer e Sachs, come può questo grande quadrato essere sottratto da qualcosa?
Se invece, come suggerisce la Robson, inseriamo un altro 1 nella parte danneggiata [sa in] facendola diventare [sa 1 in], l'intestazione tradotta

diventa:

<Il takiltum della diagonale da cui 1 è stato sottratto tale che la larghezza... >

Si da quindi senso completo all'operazione: si sottrae 1 dal quadrato risultante dalla diagonale e si ricava il quadrato risultante dal lato corto, da cui lo stesso lato corto si può ricavare prendendone la radice quadrata.
Dopo altre sofisticate considerazioni linguistiche ed avere analizzato quattro possibilità per completare i ??? compresi tra “SAG i” ed “ù”, la Robson propone che la corretta versione completa debba essere:

<<Ciò che si ottiene dal quadrato risultante dalla diagonale da cui è stato sottratto 1 in modo che ne risulti il lato corto.>>

Questa intitolazione colloca la Colonna 1^, e quindi la tavoletta, nell'ambito dei problemi di geometria “taglia e incolla” collegati al problema “igi-igibi”.

4. LE COLONNE DELLA PARTE STACCATA

Il fatto che la tavoletta sia stata spezzata sul bordo di sinistra, in cui si trovano tracce di colla relativamente recente, è dato per assodato. Seguendo un articolo di Friberg su Historia Mathematica del 1981, la Robson sostiene che, a giudicare dalla curvatura della tavoletta, la parte staccata poteva essere larga al più 5 cm. e contenere due altre colonne della larghezza delle Colonne 2^ e 3^. Quale scegliere tra le due ipotesi più accreditate, la prima secondo la quale le due colonne contenevano i parametri p e q, la seconda i parametri X e 1/X ? (**IMMAGINE 11**)

Neugebauer & Sach, che pure avevano cominciato la ricerca dei valori dei parametri X e 1/X, fermandosi alle prime quattro righe, propendono per la prima ipotesi contro la teoria “igi-igibi”. Il loro argomento è stato:

<<Si possono anche produrre numeri Pitagorici usando il parametro X = p/q ed il suo reciproco. Ma un confronto delle prime quattro righe mostra subito che X e il suo reciproco non possono essere stati i punti di partenza, ma possono esserlo stato solo i più semplici parametri p e q>>.

Questa affermazione non è però suffragata da una spiegazione. La Robson la giustifica col fatto che nel 1945 Neugebauer & Sachs erano a conoscenza quasi esclusivamente di reperti contenenti coppie di numeri reciproci con una o due posizioni in numerazione sessagesimale, e non con 4 come sono X e 1/X nelle prime 4 righe.

Solo due anni dopo, nel 1947, Sachs pubblicò lo studio di una serie di tavolette contenenti un altro metodo per trovare coppie di numeri reciproci con più posizioni. Queste tavolette testimoniano che

era sicuramente nelle capacità degli scribi di allora generare liste di “igi-igibi” del tipo usato in Plimpton 322 e di metterle in ordine

(cosa non banale, **IMMAGINE 17**). La Robson è quindi decisamente a favore della teoria “igi-igibi” e dell'ipotesi che nelle due colonne della parte mancante della tavoletta ci fossero i valori dei parametri X ed 1/X.

5. INCOMPLETEZZA DELLA TAVOLETTA

Come già osservato da Joyce nel 1995, la tavoletta non fornisce un elenco completo, comunque questo elenco lo si voglia intendere.
La Robson ha mostrato che la lista di 15 righe di parametri X in ordine decrescente non è completa, ed ha trovato 6 righe mancanti **(IMMAGINE 18)**.
Una di queste righe, denotata con 11a, contiene i dati dell'unica riga che manca secondo Joyce, corrispondente all'angolo di 35°.78.
I parametri delle righe mancanti producono probabilmente, secondo la Robson, dei numeri troppo lunghi per essere contenuti nelle righe della tavoletta. Ad esempio, le terne pitagoriche delle righe denotate 6a e 11a, sono rispettivamente, in numerazione decimale:

(307.681 , 360.000, 473.569)   per X = 655/288

(11.529 , 16.000, 19.721)   per X = 125/64.

Dal che si può dedurre, sempre che si pensi che la tavoletta fosse destinata ad un uso scolastico, che lo scriba che ne fu l'autore si preoccupava che lo studente che la utilizzava potesse concretamente realizzare il suo esercizio restando entro i margini della sua tavoletta.

5. Conclusione

Nello studio di Plimpton 322 le domande che si pongono naturalmente sono:

1) chi è l'autore della tavoletta?
2) che metodo ha seguito per costruirla?
3) per chi la ha composta e con quale scopo?

L'unica domanda sulla cui risposta tutti concordano è la prima: l'autore è certamente uno scriba. Va ricordato che per decine di secoli prima della composizione della tavoletta gli scribi avevano lavorato per la burocrazia templare e palatina, ma anche come professionisti al servizio di privati. Si hanno anche esempi di testi con cui degli scribi hanno istruito altri scribi. Molti scribi scrivevano testi letterari, prima in Sumerico, di cui erano rimasti depositari, e poi in Accadico. Ma se c'era un gran mercato per la letteratura Sumerica, sia riguardante il culto che le corti reali, non c'era un gran mercato per la matematica. Quindi non possiamo pensare che Plimpton 322 sia stata creata per una grande diffusione presso moltitudini di destinatari.

Ho prima esposto quello che la Robson dice in risposta alla seconda domanda, sostenendo che il metodo usato per costruire la tavoletta è stata la teoria “igi-igibi”. La Robson inoltre, rispondendo in parte alla terza domanda, sostiene che Plimpton 322 è stata composta in un contesto scolastico, per sviluppare la competenza e la creatività matematica di scribi in formazione.
Ci sono vari esempi, citati da Friberg e dalla stessa Robson, di “libri di testo” dedicati all'insegnamento della risoluzione di problemi, in cui gli esercizi con i

relativi parametri erano scelti per produrre risposte semplici ed evitare procedure di calcolo complicate. Prima della Robson, Robert C. Buck, l'autore di “Sherlock Holmes in Babylon” del 1980 aveva già anticipato:

<<Plimpton 322 non ha nulla a che vedere con le terne Pitagoriche o la trigonometria, ma piuttosto è uno strumento pedagogico creato per aiutare un insegnante di matematica di allora per creare un grande numero di esercizi su equazioni “igi-igibi” quadratiche, di cui erano note le soluzioni, assieme a passi di soluzioni intermedie facilmente ottenibili.>>

Le risposte della Robson alle precedenti tre domande non sono condivise del tutto negli articoli usciti dopo il 2001 citati all'inizio. Christine Proust, che è Directrice de Recherche del Laboratoire SPHERE al CNRS, pur essendo d'accordo sul fatto che il metodo seguito per costruire la tavoletta sia stata la teoria “igi-igibi”, conclude un suo articolo del 2015 dicendo:

<<L'interpretazione proposta in questo articolo suggerisce che la tavoletta Plimpton 322 non sia una collezione di dati raccolti a caso e destinati ad essere utilizzati per vari scopi, per esempio per l'insegnamento, ma che sia il testo di un problema. Si tratta del problema di trovare tutti i rettangoli sessagesimali unitari, o “diagonali”, e un tentativo (non compiuto) di fornirne una soluzione completa.>>

I due australiani Mansfield e Wildbergere concordano poi solo sull'autore. Sostengono che il metodo con cui Plimpton 322 è stata creata è un misto delle teorie dei parametri p e q e di “igi-igibi”. Essi inoltre affermano:

<<La complessità numerica di Plimpton 322 prova che non è un testo preparato per la scuola di uno scriba, come affermato da molti autori. Piuttosto si tratta di una tavola trigonometrica di una complessità inusuale, avanti di migliaia di anni rispetto al suo tempo. >>

Per altro, come già ricordato nell'incontro precedente, Friberg e Christine Proust hanno espresso considerevoli riserve sul lavoro dei due australiani.

Per concludere, mentre sull'autore si è raggiunta una concordanza di vedute, il procedimento con cui la tavoletta è stata generata e soprattutto lo scopo per cui è stata predisposta, restano controversi. La Robson stessa dice che la domanda su quale fosse il problema che si voleva affrontare non ha una risposta chiara, ammettendo che la tavoletta poteva anche trattare di problemi sui triangoli rettangoli. Per cui alla fine del lavoro [R1] conclude:

<<Il mistero della tavoletta cuneiforme non è stato ancora del tutto risolto.>>

E Victor Katz, nella recensione del libro di Friberg del 2007: “A remarkable collection of Babylonian mathematical texts”, a proposito dell'appendice su Plimpton 322 fa il seguente commento:

<<Un giorno, forse, la parte mancante della tavoletta salterà fuori in qualche collezione e noi avremo una opportunità migliore di determinare lo scopo ed il significato di Plimpton 322.>>

ELENCO DELLE IMMAGINE PROIETTATE