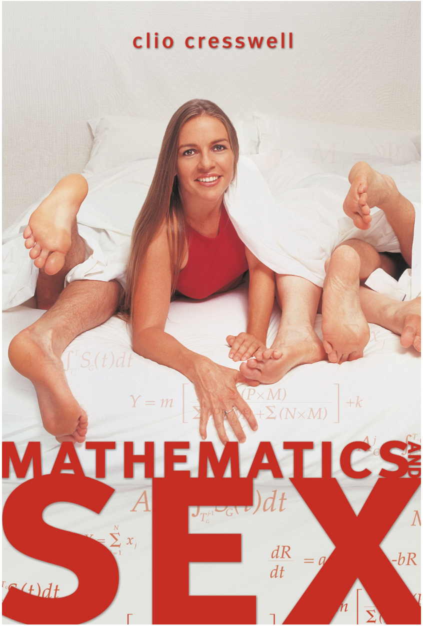
Il gioco delle coppie

Marco LiCalzi

Università Ca' Foscari Venezia

Mathesis Patavina e di Venezia
Padova, 3 dicembre 2021



Clio Cresswell, *Mathematics and Sex*, 2004

COLLEGE ADMISSIONS AND THE STABILITY OF MARRIAGE

D. GALE* AND L. S. SHAPLEY, Brown University and the RAND Corporation

1. Introduction. The problem with which we shall be concerned relates to the following typical situation: A college is considering a set of n applicants of which it can admit a quota of only q. Having evaluated their qualifications, the admissions office must decide which ones to admit. The procedure of offering admission only to the q best-qualified applicants will not generally be satisfactory, for it cannot be assumed that all who are offered admission will accept. Accordingly, in order for a college to receive q acceptances, it will generally have to offer to admit more than q applicants. The problem of determining how many and which ones to admit requires some rather involved guesswork. It may not be known (a) whether a given applicant has also applied elsewhere; if this is known it may not be known (b) how he ranks the colleges to which he has applied; even if this is known it will not be known (c) which of the other colleges will offer to admit him. A result of all this uncertainty is that colleges can expect only that the entering class will come reasonably close in numbers to the desired quota, and be reasonably close to the attainable optimum in quality.

The usual admissions procedure presents problems for the applicants as well as the colleges. An applicant who is asked to list in his application all other colleges applied for in order of preference may feel, perhaps not without reason, that by telling a college it is, say, his third choice he will be hurting his chances of being admitted.

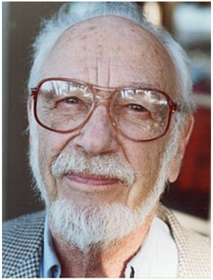
One elaboration is the introduction of the "waiting list," whereby an applicant can be informed that he is not admitted but may be admitted later if a vacancy occurs. This introduces new problems. Suppose an applicant is accepted by one college and placed on the waiting list of another that he prefers. Should he play safe by accepting the first or take a chance that the second will admit him later? Is it ethical to accept the first without informing the second and then withdraw his acceptance if the second later admits him?

We contend that the difficulties here described can be avoided. We shall describe a procedure for assigning applicants to colleges which should be satisfactory to both groups, which removes all uncertainties and which, assuming there are enough applicants, assigns to each college precisely its quota.

2. The assignment criteria. A set of n applicants is to be assigned among m colleges, where q_i is the quota of the ith college. Each applicant ranks the colleges in the order of his preference, omitting only those colleges which he would never accept under any circumstances. For convenience we assume there are no ties; thus, if an applicant is indifferent between two or more colleges he is nevertheless required to list them in some order. Each college similarly ranks the students who have applied to it in order of preference, having first eliminated those appli-

* The work of the first author was supported in part by the Office of Naval Research under Task NR047-018.

D. Gale e L.S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage", *The American Mathematical Monthly* **69**, 1962, 9–15



David Gale
(1921–2008)

Lloyd Shapley
(1923–2016)

Alvin Roth
(1951–)

Nel 2012 il premio Nobel per l'Economia è conferito a Shapley e a Roth "per la teoria delle allocazioni stabili e per le applicazioni alla progettazione dei mercati."

Il problema

Una scuola può accogliere q studenti ma riceve $n > q$ domande.

Quanti e quali studenti dovrebbe ammettere?

- Ammetterne esattamente q è rischioso.

  Uno studente potrebbe avere fatto altre domande.
  Non si sa in quale scuola preferirebbe andare.
  Non si sa se altre scuole gli abbiano offerto l'ammissione.
- Uno studente teme che dichiarare le preferenze lo danneggi.
- Si potrebbe introdurre una lista d'attesa.

  È meglio accettare la prima offerta o aspettare?
  Se ha accetta un'offerta e ne riceve una migliore?
  Non si sa se altre scuole gli abbiano offerto l'ammissione.

"[Tutte] queste difficoltà possono essere evitate. [...] *Gli studenti possono essere assegnati alle scuole in modo soddisfacente per tutti, senza patire incertezze."*

Il gioco delle coppie

Ci sono n donne (♀) ed n uomini (♂).

Ogni persona ha un ordinamento sui partners dell'altro sesso.
(Nessuno è indifferente tra due partners.)

Esempio

Quattro donne: Anna, Elena, Iole, Olga.
Quattro uomini: Bruno, Carlo, Dino, Fabio.

Preferenze delle donne

	A	E	I	O
B	1	1	3	2
C	2	2	1	3
D	3	3	2	1
F	4	4	4	4

Preferenze degli uomini

	A	E	I	O
B	3	4	1	2
C	2	3	4	1
D	1	2	3	4
F	3	4	2	1

Il gioco delle coppie

Il gioco delle coppie produce abbinamenti.
(Gli abbinamenti sono monogami ed eterosessuali.)

Esempio

Preferenze delle donne

	A	E	I	O
B	1	1	3	2
C	2	2	1	3
D	3	3	2	1
F	4	4	4	4

Preferenze degli uomini

	A	E	I	O
B	3	4	1	2
C	2	3	4	1
D	1	2	3	4
F	3	4	2	1

Anna	Elena	Iole	Olga
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Carlo	Dino	Fabio	Bruno
2×2	3×2	4×2	2×2

Abbinamenti instabili

C'è un elementare diritto:
È ammesso il divorzio, se un partner ne trova un altro migliore.

Esempio

Preferenze delle donne

	A	E	I	O
B	1	1	3	2
C	2	2	1	3
D	3	3	2	1
F	4	4	4	4

Preferenze degli uomini

	A	E	I	O
B	3	4	1	2
C	2	3	4	1
D	1	2	3	4
F	3	4	2	1

Anna	Elena	Iole	Olga
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Carlo	Dino	Fabio	Bruno
2×2	3×2	4×2	2×2

Gli abbinamenti stabili rispettano i diritti degli individui.

Abbinamenti stabili

È ammesso il divorzio, se un partner ne trova un altro migliore.

Esempio

Preferenze delle donne

	A	E	I	O
B	1	1	3	2
C	2	2	1	3
D	3	3	2	1
F	4	4	4	4

Preferenze degli uomini

	A	E	I	O
B	3	4	1	2
C	2	3	4	1
D	1	2	3	4
F	3	4	2	1

Ecco un abbinamento stabile.

Anna	Elena	Iole	Olga
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Dino	Fabio	Bruno	Carlo
3×1	4×4	3×1	3×1

Il gioco delle coppie

Ci sono m donne (♀) ed n uomini (♂).

Ogni persona ha un ordinamento sui partners dell'altro sesso, inclusa l'opzione di restare *single*.

Esempio

Quattro donne: Anna, Elena, Iole, Olga.
Tre uomini: Bruno, Carlo, Dino.

Preferenze delle donne

	A	E	I	O
B	3	1	3	2
C	1	2	2	3
D	2	3	1	1

Preferenze degli uomini

	A	E	I	O
B	1	2	3	$\star$
C	3	2	1	$\star$
D	1	3	2	4

Abbinamenti stabili

Ci sono due elementari diritti:

1. È ammesso il divorzio, se un partner ne trova un altro migliore.

2. Ognuno è libero di restare single.

Gli abbinamenti stabili rispettano i diritti degli individui.

Preferenze delle donne

	A	E	I	O
B	3	1	3	2
C	1	2	2	3
D	2	3	1	1

Preferenze degli uomini

	A	E	I	O
B	1	2	3	$\star$
C	3	2	1	$\star$
D	1	3	2	4

1. E' ammesso il divorzio, se un partner ne trova un altro migliore.
— Anna sta con Bruno soltanto se Carlo è "impegnato".

2. Ognuno è libero di restare single.
— Bruno non può essere forzato ad abbinarsi con Olga.

	Preferenze delle donne			
	A	E	I	O
B	3	1	3	2
C	1	2	2	3
D	2	3	1	1

	Preferenze degli uomini			
	A	E	I	O
B	1	2	3	$\star$
C	3	2	1	$\star$
D	1	3	2	4

Ci sono due abbinamenti stabili:

Anna	Elena	Iole	Olga
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Carlo	Bruno	Dino	—
1×2	1×2	1×2	$4 \times -$

Anna	Elena	Iole	Olga
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Dino	Bruno	Carlo	—
2×1	1×2	2×1	$4 \times -$

I due abbinamenti sono rispettivamente più favorevoli per le donne e per gli uomini.

Domande

Quesiti tradizionali (teoria):

1) Esiste sempre almeno un abbinamento stabile?
Esiste sempre almeno un abbinamento stabile.

2) L'abbinamento stabile è unico?
No, gli abbinamenti stabili possono essere più di uno.

Proprietà degli abbinamenti stabili
Uomini e donne hanno preferenze opposte sugli abbinamenti stabili.

Chi è single in un abbinamento stabile resta tale in ogni abbinamento stabile.

Quesiti pratici (algortimi):

3) Come si trova un abbinamento stabile?

La proposta di Gale e Shapley

1a) Ogni uomo chiede la mano della donna che preferisce.
1b) Ogni donna valuta le proposte ricevute.
1c) Se una proposta è accettata, uomo e donna si fidanzano.

2a) Gli uomini che sono single chiedono la mano della loro seconda scelta.
2b) Tra le proposte ricevute, ogni donna valuta se preferisce cambiare fidanzato.

3) Si continua a oltranza, fino a quando ogni uomo ha trovato una fidanzata oppure ha chiesto la mano di tutte le donne che è disposto a sposare.

4) Si celebrano le nozze! (Forse qualcuno resta single.)

Dal XIX al XXI secolo

Uomini e donne hanno preferenze opposte sugli abbinamenti stabili.

L'algoritmo trova l'abbinamento stabile preferito dagli uomini.

Se invertiamo i ruoli, si ottiene l'abbinamento stabile preferito dalle donne.

Forse questo può aiutare a capire perché le donne del XXI secolo hanno imparato a non lasciare l'iniziativa solo agli uomini?

Il gioco dei coinquilini può non ammettere abbinamenti stabili:
se ci si può abbinare con chiunque, tutto diventa più complicato.

Aggiungiamo un po' di poligamia

Ci sono n università ed m matricole.

Ogni ateneo può avere il numero chiuso e ogni studente può iscriversi ad un solo ateneo.

Ogni ateneo ordina gli studenti in modo indipendente da chi è già stato ammesso.

Vogliamo abbinare studenti ed atenei.

Questo gioco delle coppie consente la poligamia unilaterale.

Stesse domande, stesse risposte

1) Esiste sempre almeno un abbinamento stabile.

2) Gli abbinamenti stabili possono essere più di uno.

3) Studenti e atenei hanno preferenze opposte sugli abbinamenti stabili.

4) Chi è single in un abbinamento stabile resta tale in ogni abbinamento stabile.

5) Risulta naturale scegliere la versione dell'algoritmo che favorisce gli studenti.

Come si trova un abbinamento stabile

1) Ogni studente chiede l'ammissione all'ateneo che preferisce. L'ateneo valuta le proposte ricevute e si fidanza a numero chiuso.

2) Gli studenti non ammessi fanno domanda alla loro seconda scelta. Tra le proposte ricevute, ogni ateneo valuta se vuole cambiare fidanzato.

3) Si continua a oltranza, fino a quando ogni studente ha ottenuto un'ammissione oppure ha presentato domanda in tutti gli atenei in cui è disposto ad andare.

4) Si apre l'anno accademico! (Forse qualcuno resta fuori.)

Non è solo un gioco

Negli U.S.A., i laureati in medicina ottengono specializzazione dopo un internato presso un reparto ospedaliero.

Anni '40: la selezione degli specializzandi è nel caos.

1951: dopo svariati tentativi, il caos si risolve con l'adozione di un algoritmo centralizzato (National Resident Matching Program).
Nessuno sa perché funzioni.

1962: Gale e Shapley descrivono il gioco delle coppie sull'*American Mathematical Monthly*.
Ignorano che esista il NMRP.

1984: Alvin Roth si accorge che il NMRP equivale all'algoritmo di Gale e Shapley.
NMRP funziona perché produce abbinamenti stabili.

Applicazioni

Già in uso:

— Studenti e atenei (o scuole pubbliche).

— Studenti e residenze universitarie “a tema”.

— Assistenti legali e tribunali.

Varianti:

— 1998: Revisione del NMRP per tener conto dei medici sposati.

— Reclutamento dei giocatori di football nei colleges.

— Pazienti in lista d’attesa per un trapianto e donatori.

Tutti a scuola

Nella città di New York, ogni anno più di 90.000 studenti devono essere distribuiti su oltre 500 scuole superiori.

Ogni studente fornisce una lista di cinque scuole di sua preferenza.

Sulla base delle liste, le scuole decidono chi ammettere, chi mettere in lista d'attesa e chi scartare.

Ogni scuola scrive agli studenti accettati, che decidono se iscriversi.

Dopo il primo giro di proposte e risposte, il processo è ripetuto per due volte cercando di riempire i posti rimasti liberi.

Al termine del terzo giro, gli studenti non ancora assegnati sono distribuiti d'ufficio al distretto scolastico d'appartenenza.

Tutti a scuola, ma più contenti

Risultato. Solo 50.000 su 90.000 studenti ricevono un'offerta al primo giro e 30.000 sono assegnati d'ufficio ad una scuola che non nella lista delle loro cinque preferenze.

Si può far meglio. Con l'adozione di un nuovo algoritmo nel 2003, gli studenti assegnati d'ufficio sono scesi a 3.000 e il numero degli studenti che ottiene la sua prima o seconda scelta è aumentato del 20%.

Un caso: i test d'ammissione

In Turchia, i diplomati di scuola superiore sostengono un unico test di ammissione valido per tutti gli atenei del paese.

Il punteggio del test è consolidato in una graduatoria nazionale.

I migliori in graduatoria guadagnano il diritto di scegliere per primi.

In Italia, i diplomati di scuola superiore sostengono un unico test di ammissione valido per tutti i corsi di Medicina del paese.

Nel 2010-11, 80 domande a risposta multipla per abbinare gli 8775 posti a disposizione con circa 90 mila candidati.

Il punteggio del test non era consolidato in una graduatoria nazionale.

A parità di punteggio, si poteva restare esclusi a seconda della sede in cui si era sostenuto l'esame.

The Market Design Blog (a cura di Roth)

Market Design

We initially started this blog for our Market Design course. We'll post news stories (market design is everywhere) and other items (including stories related to repugnant markets). It is meant to supplement the course page, and Al's Game theory, experimental economics, and market design page.

Subscribe To

Posts

Comments

Blog Archive

▼ 2010 (188)

▼ May (14)

- Misc. organ transplant commentary and news
- Surrogacy, payments, and parental rights in Britai...
- Organ donation and surrogacy: a Mothers' Day story...
- China's Arranged Remarriages
- Gifted programs for pre-kindergarten in NYC
- School choice in NYC, a problem facing large schoo...
- Same sex spouses versus Defense of Marriage Act
- Compensation for bone marrow donors: opposing view...
- Kidney exchange time series
- Moral judgments about economic transactions: Luke ...
- Angel donors and angel flights in a NEPKE kidney e...
- The slave trade had sellers as well as buyers
- Prizes as a spur to innovation: a White House memo...
- Herodotus on repugnance

Friday, May 7, 2010

School choice in NYC, a problem facing large school systems

The most demanded schools are very hard to get into, even for very well qualified students, some of whom can have trouble matching: For Many, High School Match Game Continues.

"Although most of the city's 86,000 eighth graders were matched with a high school this year, every year thousands of students don't get in anywhere and it doesn't matter whether they have good grades, test scores and attendance records. They have to apply all over again, with a much more limited list of schools to choose from."

The full process in NYC, in which in the initial round students can list no more than 12 programs to apply to, is described in this paper: Abdulkadiroglu, Atila, Parag A. Pathak, and Alvin E. Roth, "Strategy-proofness versus Efficiency in Matching with Indifferences: Redesigning the NYC High School Match," American Economic Review, 99, 5, Dec. 2009, pp1954-1978.

And the following paper uses the fact that the *proportion* of unmatched students doesn't go to zero as the school system gets large, so in a very large school system like NYC, the *number* of initially unmatched students won't be tiny. (That doesn't mean that allowing longer lists wouldn't help.)

Kojima, Fuhito, Parag A. Pathak, and Alvin E. Roth, " Matching with Couples: Stability and Incentives in Large Markets," working paper, April 28, 2010.

Posted by Al Roth at 5:38 AM

Labels: school choice

I trapianti di rene

Negli U.S.A. ci sono 70.000 pazienti in lista d'attesa per un trapianto di rene.

Nel 2006 sono state eseguite meno di 11.000 operazioni e 5.000 pazienti sono morti o si sono talmente aggravati da diventare inoperabili.

Un modo ovvio per aumentare l'offerta di reni trapiantabili è trovare un donatore fra parenti o amici.

Non basta che un paziente trovi un donatore: la compatibilità dipende dal gruppo sanguigno e dal profilo antigenico.

Fino al 2004, l'unico espediente era lo scambio di donatori fra due coppie di pazienti-donatori incompatibili.

Al termine del 2004, in tutti i 14 centri specializzati del New England erano stati eseguiti solo 5 trapianti incrociati.

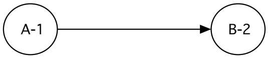
Più trapianti di rene

Si può organizzare un database centrale e applicare un algoritmo che rintraccia le opportunità di organizzare trapianti incrociati.

(Questo schema è confluito nell*Alliance for Paired Donation*, organizzazione no-profit riconosciuta dal governo americano.)

Due idee hanno aumentato il numero di trapianti.

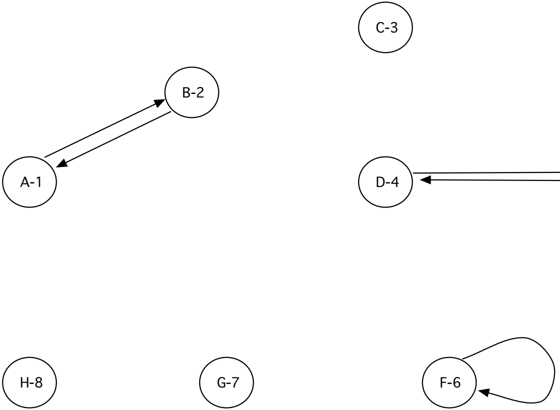
Rappresentiamo ogni coppia paziente-donatore come un nodo in un grafo diretto.
La presenza di un arco dal nodo A-1 al nodo B-2 indica che 1 può donare a B.



Grafi e trapianti

Uno scambio di donatori fra le coppie A-X e B-Y possibile se questi due nodi formano un ciclo.

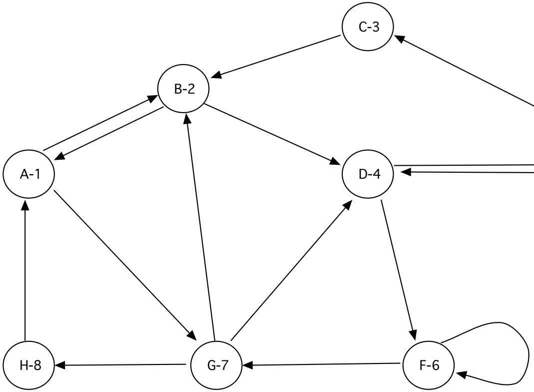
Se un algoritmo rintraccia un ciclo di 2 nodi nel database, è possibile organizzare un trapianto incrociato.



Grafi e trapianti

Ecco la prima idea: per aumentare il numero di trapianti possibili, basta cercare cicli di qualsiasi lunghezza all'interno del database.

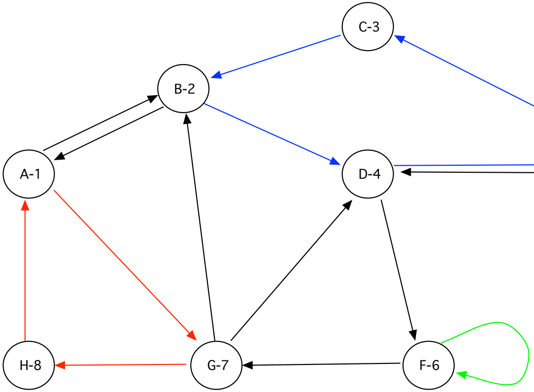
Se un algoritmo trova un ciclo di lunghezza n, si possono organizzare n trapianti in cui ciascuno degli n donatori cede il rene al paziente della coppia successiva seguendo il ciclo determinato.



Grafi e trapianti

Ecco la prima idea: per aumentare il numero di trapianti possibili, basta cercare cicli di qualsiasi lunghezza all'interno del database.

Se un algoritmo trova un ciclo di lunghezza n, si possono organizzare n trapianti in cui ciascuno degli n donatori cede il rene al paziente della coppia successiva seguendo il ciclo determinato.

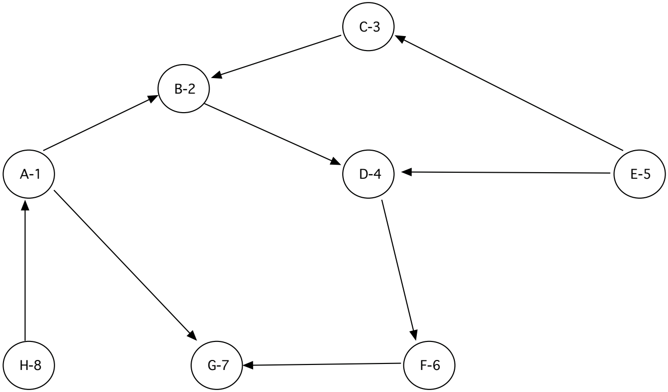


Il buon samaritano

La seconda idea sfrutta l'algoritmo per creare nuovi incentivi.

Un buon samaritano è un donatore che offre un rene per altruismo.

Rappresentiamo un buon samaritano Z come un nodo iniziale che punta verso un altro nodo A-X se c'è compatibilità fra Z ed A.

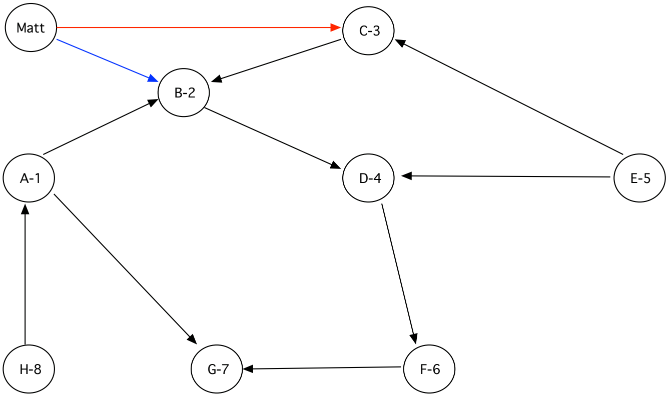


Il buon samaritano

La seconda idea sfrutta l'algoritmo per creare nuovi incentivi.

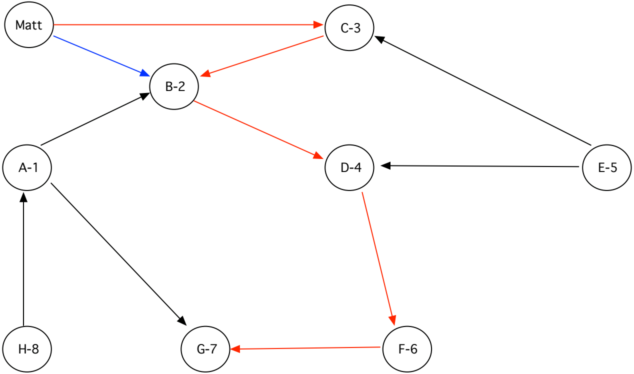
Un buon samaritano un donatore che offre un rene per altruismo.

Rappresentiamo un buon samaritano Z come un nodo iniziale che punta verso un altro nodo A-X se c'è compatibilità fra Z ed A.



Grafi e trapianti

Il numero di nodi della catena di massima lunghezza originata da Z rappresenta il numero massimo di trapianti che possiamo innescare.



Nel Marzo 2009, l'*Alliance for Paired Donation* ha annunciato di aver completato una catena di dieci trapianti iniziata da un buon samaritano di nome Matt.

I samaritani in Italia

In Italia c'è stato un buco legislativo fino al febbraio 2010, quando tre "samaritani" si sono spontaneamente offerti di donare un rene.

Dopo un iniziale diniego, in data 23 aprile 2010 il Comitato Nazionale per la Bioetica ha approvato (con molte cautele) le donazioni samaritane.

Nel maggio 2010 il Consiglio Superiore di Sanità ha espresso un articolato parere che ritiene ammissibile questa pratica.

Dal 2015 al 2019 otto samaritani italiani hanno permesso 26 trapianti di rene.

Il SIT (Sistema Informativo Trapianti) riporta 10.304 persone in lista d'attesa per ricevere un rene al 31 dicembre 2020.

Grazie per l'attenzione