PIANO RUDIMENTALE E PIANO ANALITICO

Umberto Marconi

Conferenza del 24 febbraio 2023

Sia $\mathcal{K}$ un corpo sghembo

Piano proiettivo P_K^2

$$punti\ Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Terna di coordinate omogenee definita a meno di un coefficiente di proporzionalità destra.

$$rette \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

Con (a_1, a_2, a_3) definita a meno di un coefficiente di proporzionalità sinistra.

Se togliamo la retta $x_3 = 0$ otteniamo il piano affine A_K^2

$$punti\ \ Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$rette \quad ax + by + c = 0 \quad con\ (a, b) \neq (0, 0)$$

Piano rudimentale : solo punti e rette legati da assiomi di incidenza.

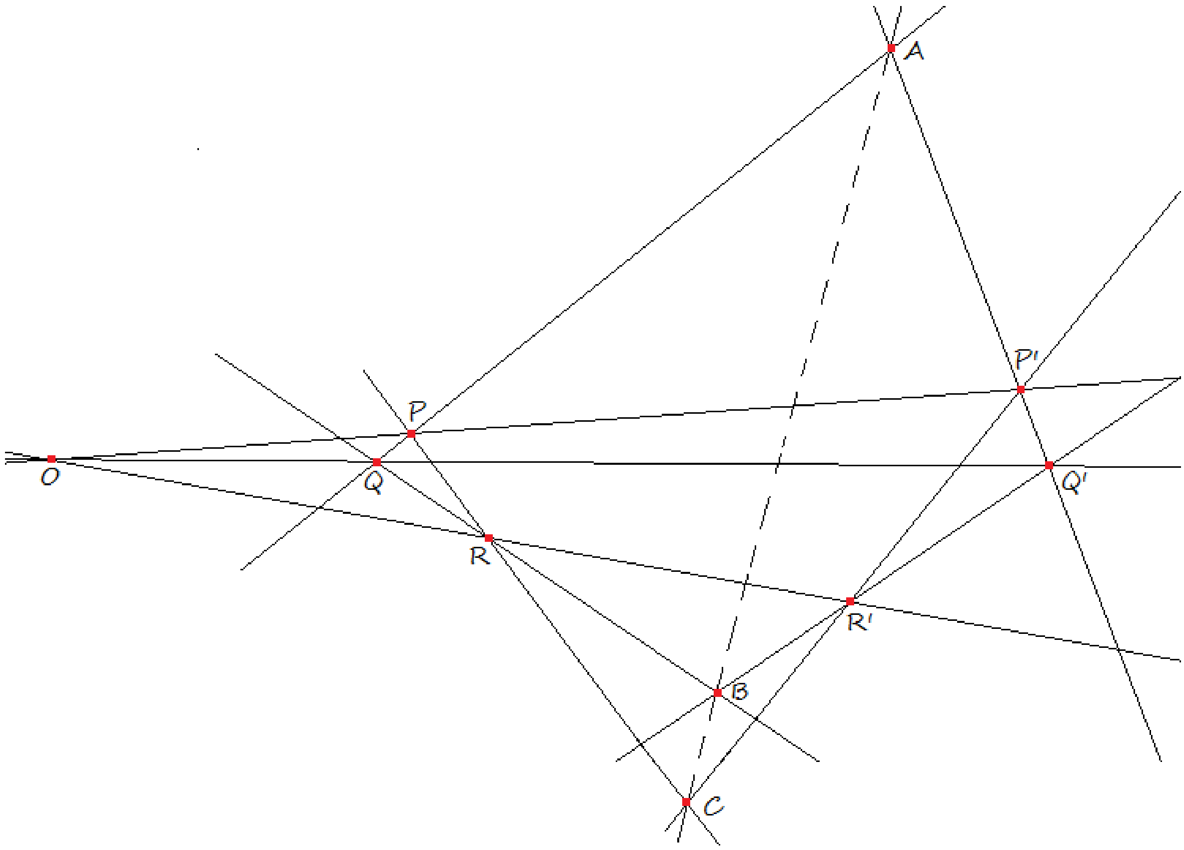
Non esistono segmenti, angoli, ordine, congruenze.

Nel piano analitico proiettivo

$$O, P. P' \quad distinti\ e\ allineati$$

Scegliamo una terna per O.

Esistono terne per P, P' tali che in $\mathcal{K}^3$ si ha $O + P = P'$



Scelta una terna per O, esistono terne per gli altri punti tali che

$$\left.\begin{array}{l} O + P = P' \\ O + Q = Q' \\ O + R = R' \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} Q - P = Q' - P' = A \ \ su\ PQ \cdot P'Q' \\ R - Q = R' - Q' = B \ \ su\ QR \cdot Q'R' \\ P - R = P' - R' = C \ \ su\ RP \cdot R'P' \end{array}$$

Poiché le terne A, B, C sono linearmente dipendenti si ottiene che i punti

A, B, C sono allineati.

Questo è il teorema di Desargues.

Piano proiettivo rudimentale :

1.- per due punti distinti passa una e una sola retta ;

2.- due rette distinte si intersecano ;

3.- esistono quattro punti a tre a tre non allineati ;

se togliamo una retta otteniamo il piano affine rudimentale :

1.- lo stesso ;

2.- dato un punto P che non giace su una retta ℓ , esiste una e una sola retta m tale che P giace su m e $\ell \cdot m = \emptyset$;

3.- esistono tre punti non allineati ;

$$piano\ analitico \implies piano\ rudimentale$$

$$piano\ rudimentale \overbrace{\implies}^{?} piano\ analitico$$

NO !

Però .....

Teorema

Sia X un piano affine rudimentale.
Sono equivalenti :
1.- X è un piano dello spazio affine rudimentale ;
2.- È vero il teorema di Desargues, nella formulazione affine ;
3.- X è ricco di "traslazioni" e "omotetie" ;
4.- Esiste un corpo sghembo $\mathcal{K}$ tale che X è isomorfo a A_K^2

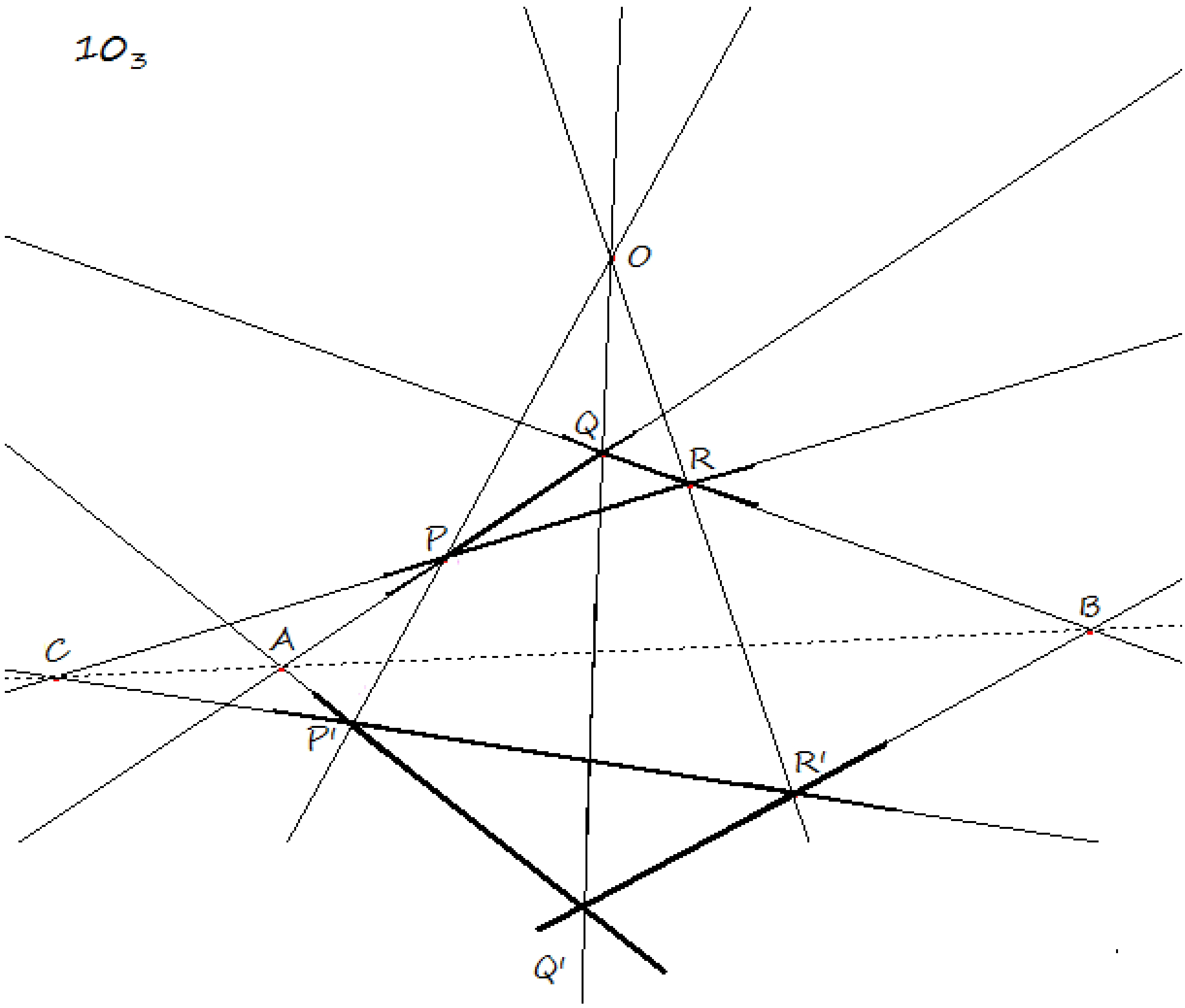
Inoltre $\mathcal{K}$ è commutativo se e solo se vale il teorema di Pappo

Attenzione :

$$teorema\ di\ Pappo \qquad \underbrace{\Longrightarrow}_{Hessenberg\ G.(1905)} \qquad teorema\ di\ Desargues$$

D_1 (Desargues)

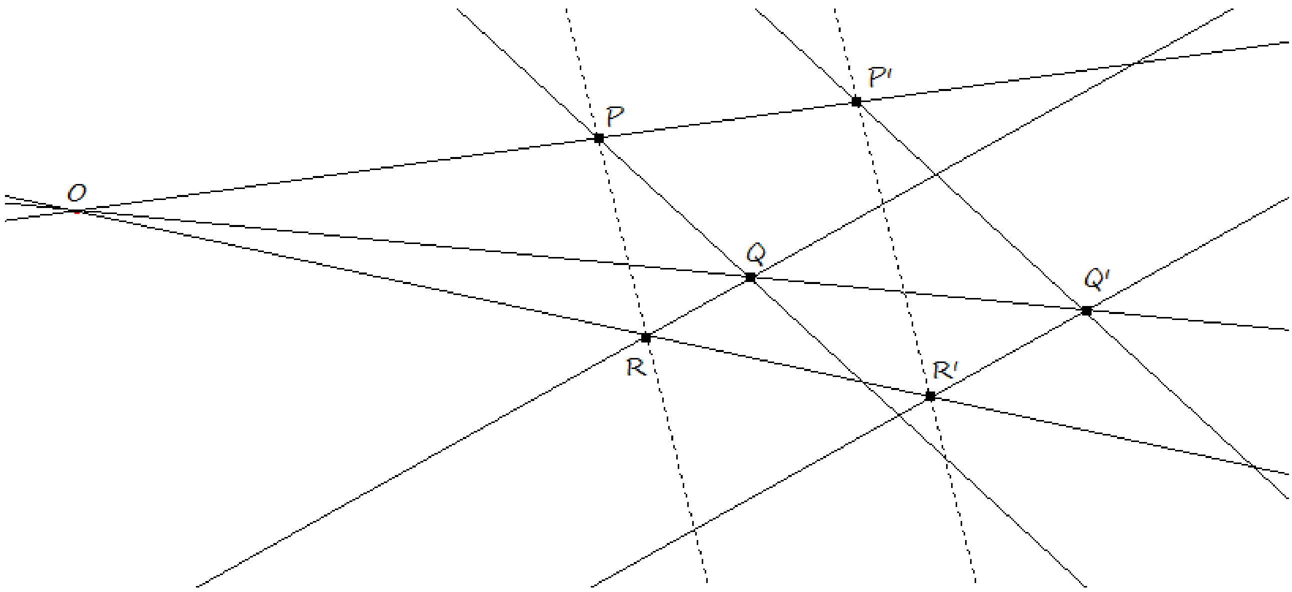
Se due triangoli PQR e P'Q'R' sono tali che le rette dei vertici corrispondenti PP', QQ', RR' concorrono in uno stesso punto O, allora i punti di intersezione dei lati corrispondenti $A = PQ \cdot P'Q'$, $B = QR \cdot Q'R'$, $C = PR \cdot P'R'$ sono allineati .



Si dimostra immergendo il piano nello spazio rudimentale, se possibile.

Scambiando l'ipotesi con la tesi si ha un enunciato che si dimostra essere equivalente.
Se la retta AB è scelta come retta impropria (all'infinito) si ottiene la versione affine.

D_a : se due triangoli sono tali che le rette dei vertici corrispondenti convergono in un punto oppure sono parallele e se due coppie di lati corrispondenti sono coppie di lati paralleli , allora anche la terza coppia è costituita da lati paralleli.



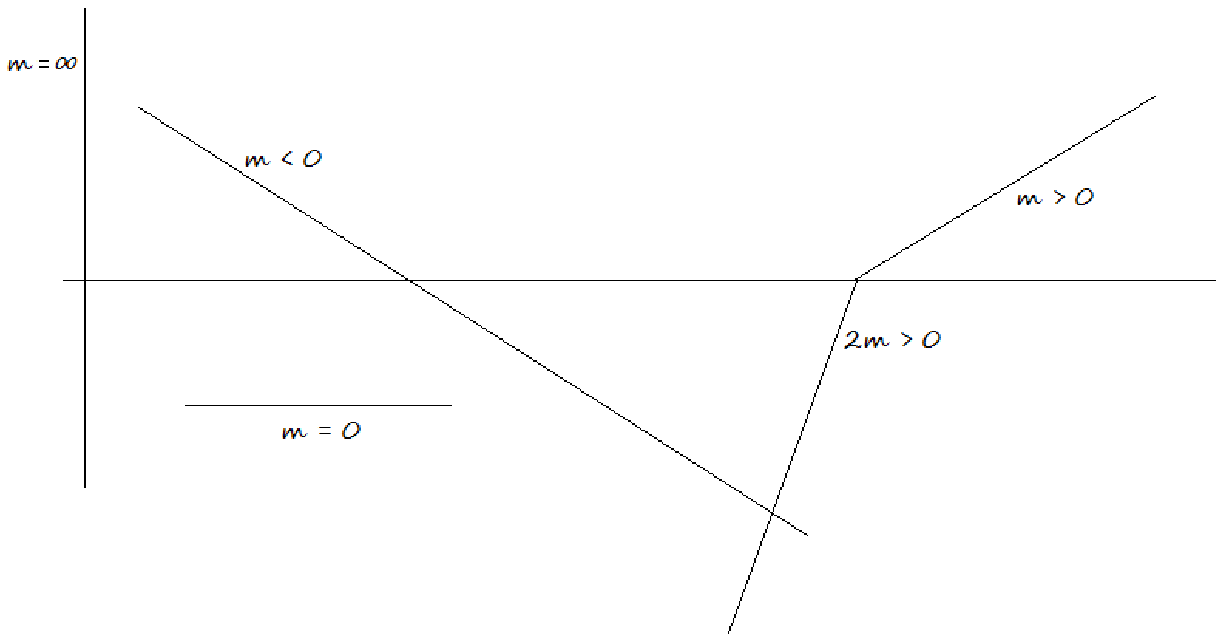
Si dimostra con la similitudine , che non abbiamo.

Piano non-Desarguesiano (F. R. Moulton , 1902)

In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le nuove rette sono :

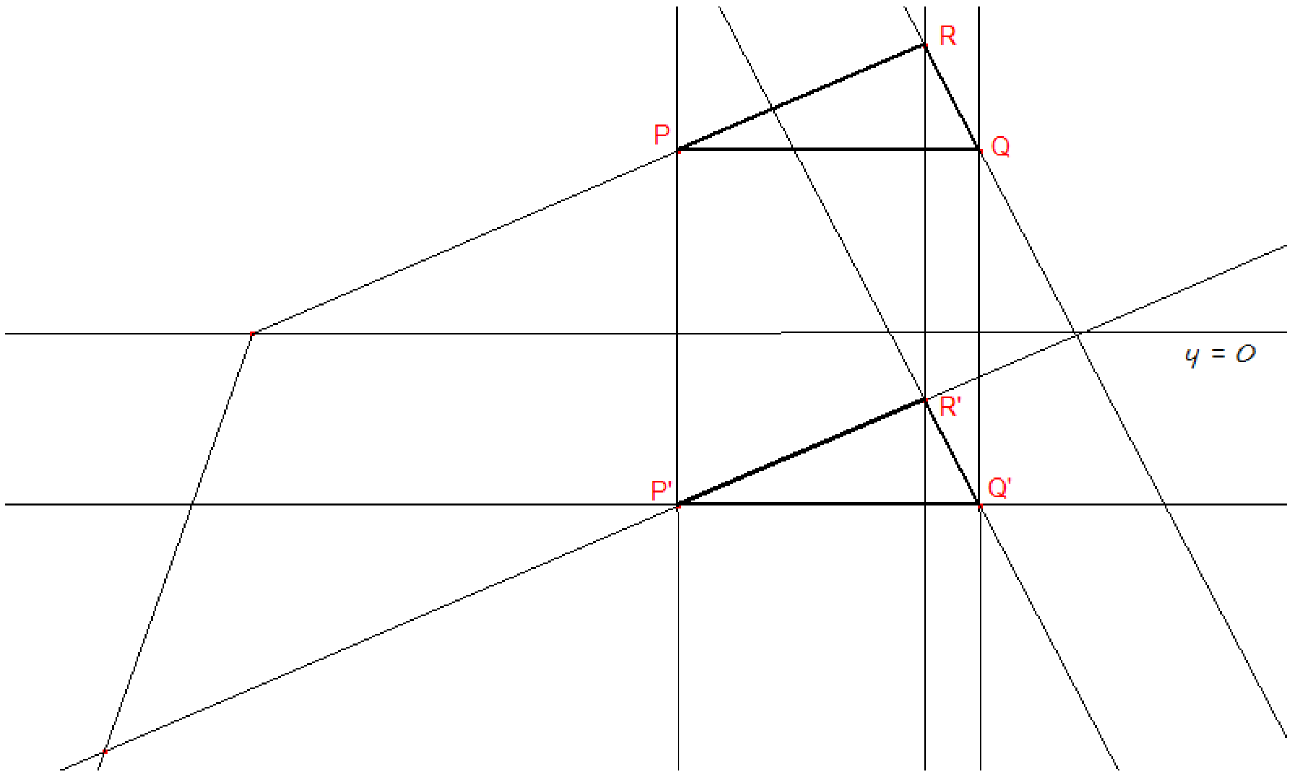
$$x = k \;\; ; \;\; y = mx + q \qquad\qquad se\ m \leq 0$$

$$y = \begin{cases} mx + q \;\; se\ x \geq -\dfrac{q}{m} \\ 2mx + 2q \;\; se\ x \leq -\dfrac{q}{m} \end{cases} \qquad\qquad se\ m > 0$$



Si può arricchire con tutti gli assiomi di incidenza , di ordine , congruenza (attenzione : angoli opposti al vertice devono essere congruenti), continuità , tranne il primo criterio di congruenza dei triangoli.

È falso il “piccolo Desargues” .



Le rette dei vertici corrispondenti sono parallele;

$$PQ \parallel P'Q' , \qquad QR \parallel Q'R' \quad ma \;\; PR \nparallel P'R'$$

DILATAZIONE : trasformazione che manda rette in rette parallele , cioè

$$P \neq Q \quad \Longrightarrow PQ \parallel P'Q'$$

Proprietà :

1.- P, Q, R allineati $\Longrightarrow$ P', Q', R' allineati ;

2.- una dilatazione con due punti fissi è l'identità ;

3.- le dilatazioni costituiscono un gruppo $\boldsymbol{Đ}$ per la composizione .

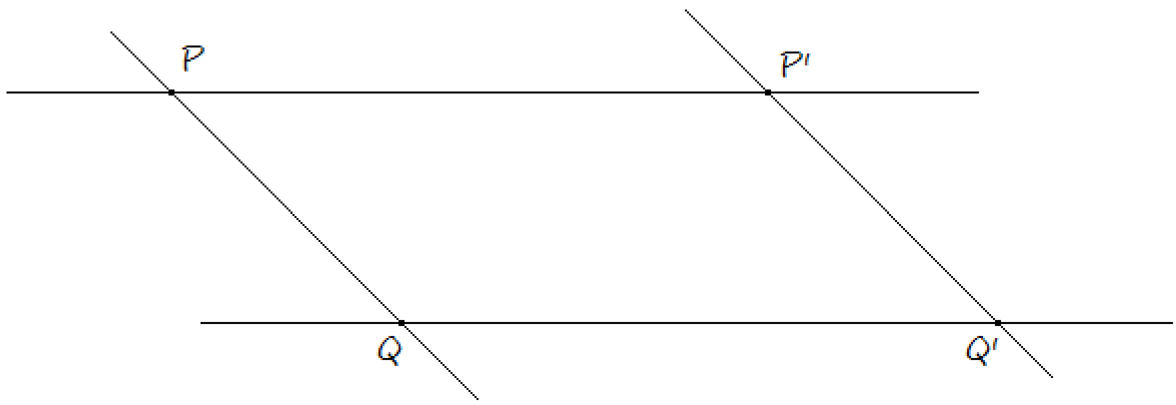
TRASLAZIONE : dilatazione priva di punti fissi oppure l'identità .

Proprietà :

1.- se due traslazioni coincidono in un punto, allora coincidono;

2.- se $\tau(P) = P'$ è una traslazione con $P \neq P'$, allora $PP' \parallel QQ'$;

3.- se conosco Q, Q' e P non è allineato , allora P' è il quarto vertice del parallelogramma [QQ',QP]



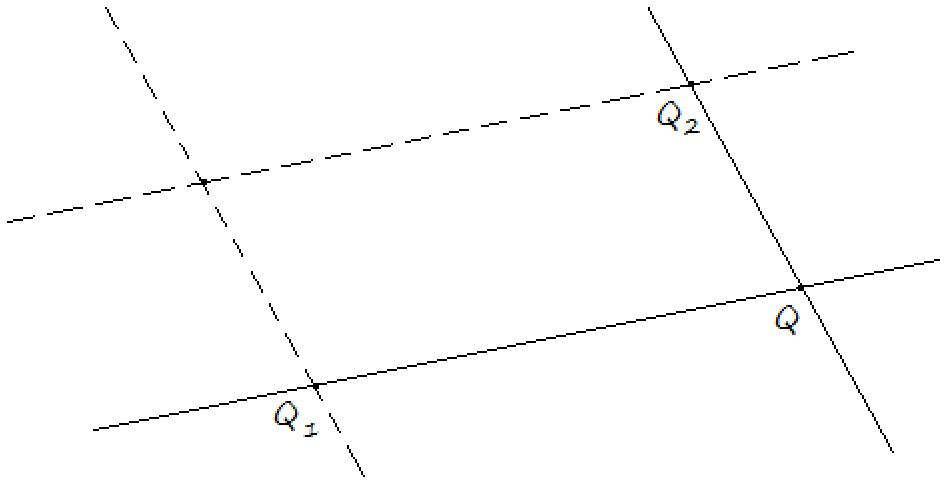
4.- l'insieme $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ delle traslazioni costituisce un sottogruppo normale di $\boldsymbol{Đ}$, e $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ risulta **commutativo** nel caso in cui esistano traslazioni di direzioni diverse .

(i) $\tau \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$, $\varphi \in \boldsymbol{Đ} \Longrightarrow \varphi\tau\varphi^{-1}$ non ha punti uniti oppure è identità

se ha un punto unito P, abbiamo

$$\varphi\tau\varphi^{-1}(P) = P \Longrightarrow \tau\varphi^{-1}(P) = \varphi^{-1}(P) \Longrightarrow \varphi^{-1}(P)\ \ unito\ per\ \tau$$

(ii) siano τ_1 , τ_2 traslazioni non parallele ; sia $Q_1 = \tau_1(Q)$ e $Q_2 = \tau_2(Q)$



$$\tau_2\tau_1(Q) = \tau_2(Q_1) = quarto\ vertice\ di\ [QQ_2, QQ_1]$$

$$\tau_1\tau_2(Q) = \tau_1(Q_2) = quarto\ vertice\ di\ [QQ_1, QQ_2]$$

(iii) se sono parallele sia φ non parallela

$$\tau_2\tau_1\varphi\varphi^{-1} = \tau_1\varphi\tau_1\varphi^{-1} = \varphi\tau_1\tau_2\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi\tau_1\tau_2$$

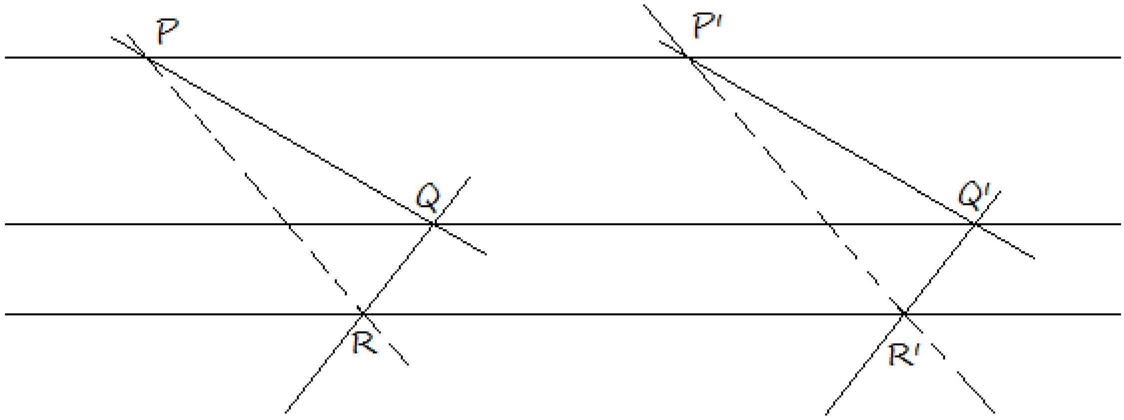
Oss. In (i) si può dimostrare che $\varphi\tau\varphi^{-1}$ ha la stessa direzione di τ .

Teorema

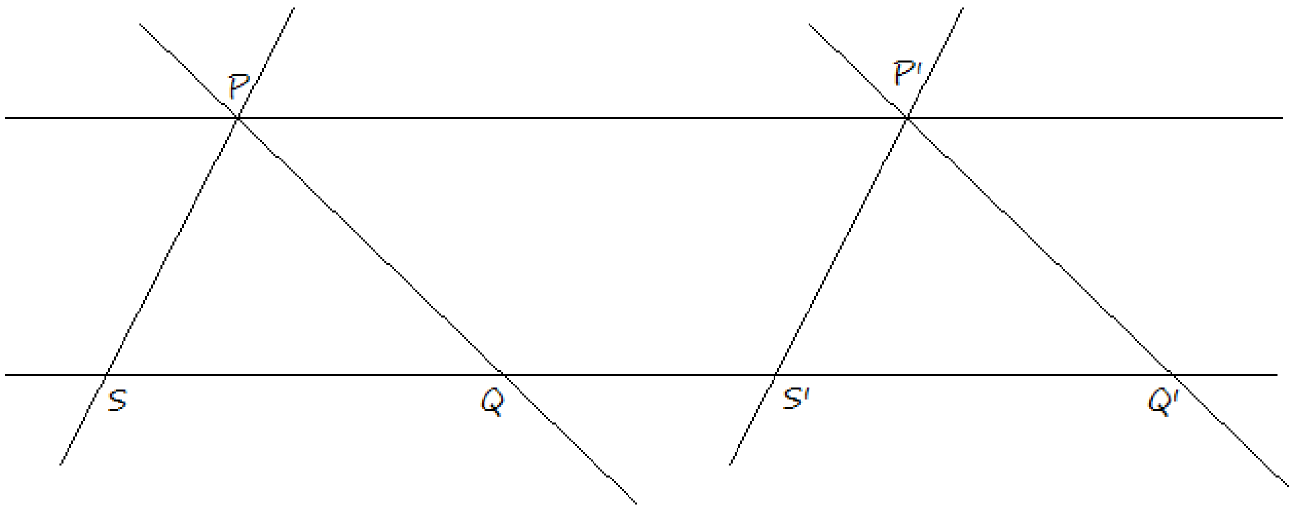
Sono equivalenti :

(i) dati due punti distinti Q e Q' esiste (unica) traslazione $\tau : \tau(Q) = Q'$;

(ii) il piccolo assioma di Desargues



$$\left.\begin{array}{r} PP' \parallel QQ' \parallel RR' \\ PQ \parallel P'Q' e\ QR \parallel Q'R' \end{array}\right\} \Longrightarrow PR \parallel P'R'$$



P'è $il\ quarto\ vertice\ di\ [QQ', QP]$

S'è $il\ quarto\ vertice\ di\ [PP', PS]$

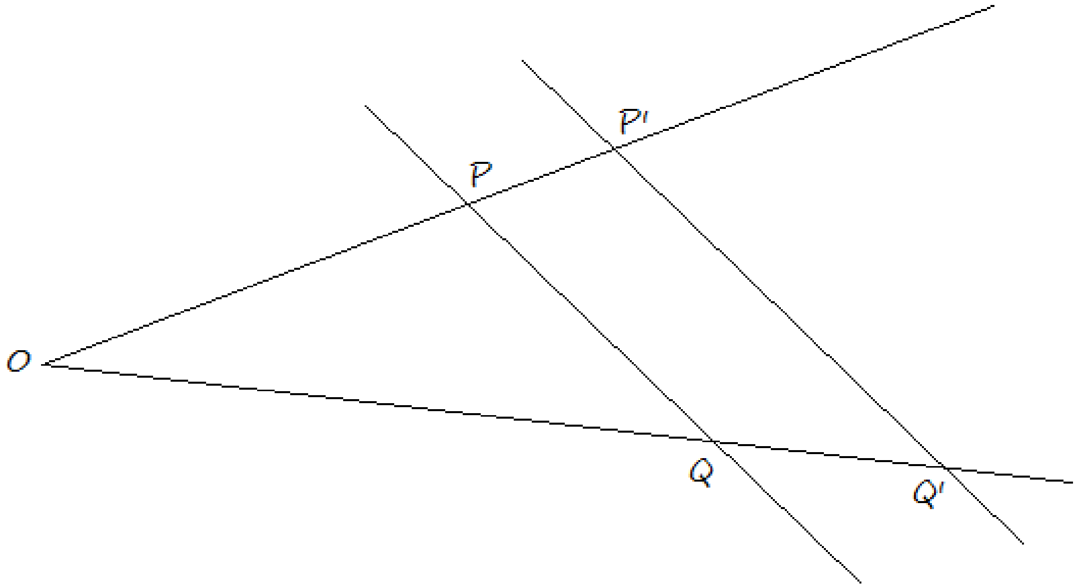
OMOTETIE di centro O = dilatazioni che hanno O come punto fisso .

1.- l'insieme $Đ_O$ delle dilatazioni di centro O , con la composizione , è un sottogruppo del gruppo delle dilatazioni ;
se $\sigma(P) = P'$ allora OPP' sono allineati e inoltre $Đ_O \cap \boldsymbol{\mathcal{T}} = \langle id \rangle$;

2.- ogni dilatazione φ si può scrivere in modo unico nella forma

$$\varphi = \tau \circ \sigma \ \ , con\ \sigma \in Đ_O\ e\ \tau \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$$

3.- se conosco Q , Q' e P non è allineato allora P' è dato da

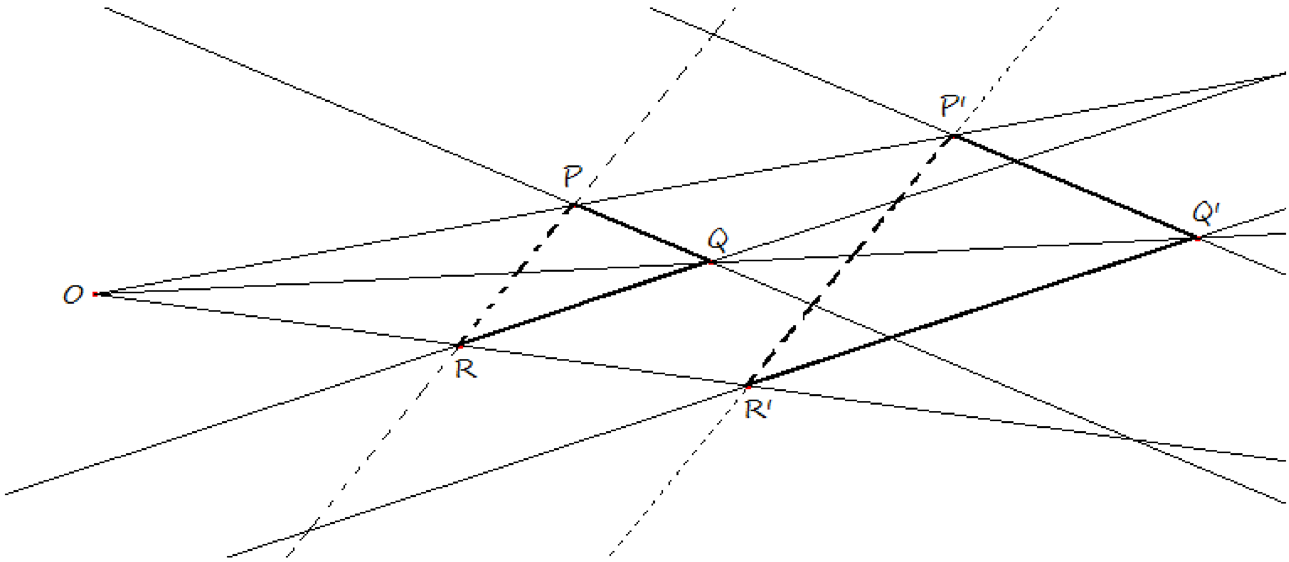


Teorema

Sono equivalenti :

(i) dati due punti distinti Q e Q' allineati con O esiste (unica) $\sigma \in Đ_O$ tale che $\sigma(Q) = Q'$;

(ii) l'assioma di Desargues $\mathcal{D}_a$



ANELLO DIVISORIO

Sia ℓ una retta in cui vengano fissati due punti distinti 0 e 1.

Per ogni punto a su ℓ si definisce τ_a la traslazione che manda 0 in a ; con $a \neq 0$, σ_a la dilatazione di centro 0 che manda 1 in a

$$a + b = \tau_b(a) = \tau_b\tau_a(0) \ \ in\ modo\ che\ \tau_{a+b} = \tau_b \circ \tau_a$$

Si definisce, per $a, b \neq 0$

$$ab = \sigma_b(a) = \sigma_b\sigma_a(1) \ \ in\ modo\ che \begin{cases} \sigma_{ab} = \sigma_b \circ \sigma_a \\ \tau_{ab} = \sigma_b\tau_a\sigma_b^{-1} \end{cases},$$

si dimostra (difficile) che si ottiene un anello divisorio K.
[con l'avvertenza di definire σ_0 la mappa degenere che manda tutti i punti in 0]

COORDINATE

Oltre a ℓ , scegliamo una retta m passante per $0 = 0_\ell = 0_m$ e fissiamo un punto 1_m su m .

Se P è un punto di ℓ , le sue coordinate sono $(a, 0)$ ove a è P stesso.

Se P è un punto di m , sia σ_P l'omotetia di centro 0 che manda 1_m in P.

Posto $a = \sigma_P(1_\ell)$, le coordinate di P sono $(0, a)$.

Se P non sta sulle due rette ....

Si dimostra che tutto funziona , le traslazioni e le omotetie coincidono con quelle definite algebricamente (con rapporto di omotetia scritto a destra), e che l'equazione di una retta è l'usuale con i coefficienti scritti a sinistra.

Se il nostro piano è già un piano analitico, l'anello divisorio costruito con il metodo precedente è isomorfo a quello originale.

Da quanto esposto è facile dedurre che se un piano proiettivo rudimentale soddisfa il teorema di Desargues, allora il piano è isomorfo a un piano analitico (rimuovere una retta ...)

PAPPO

Esagono di vertici consecutivi $AB'CA'BC'$ ordine circolare

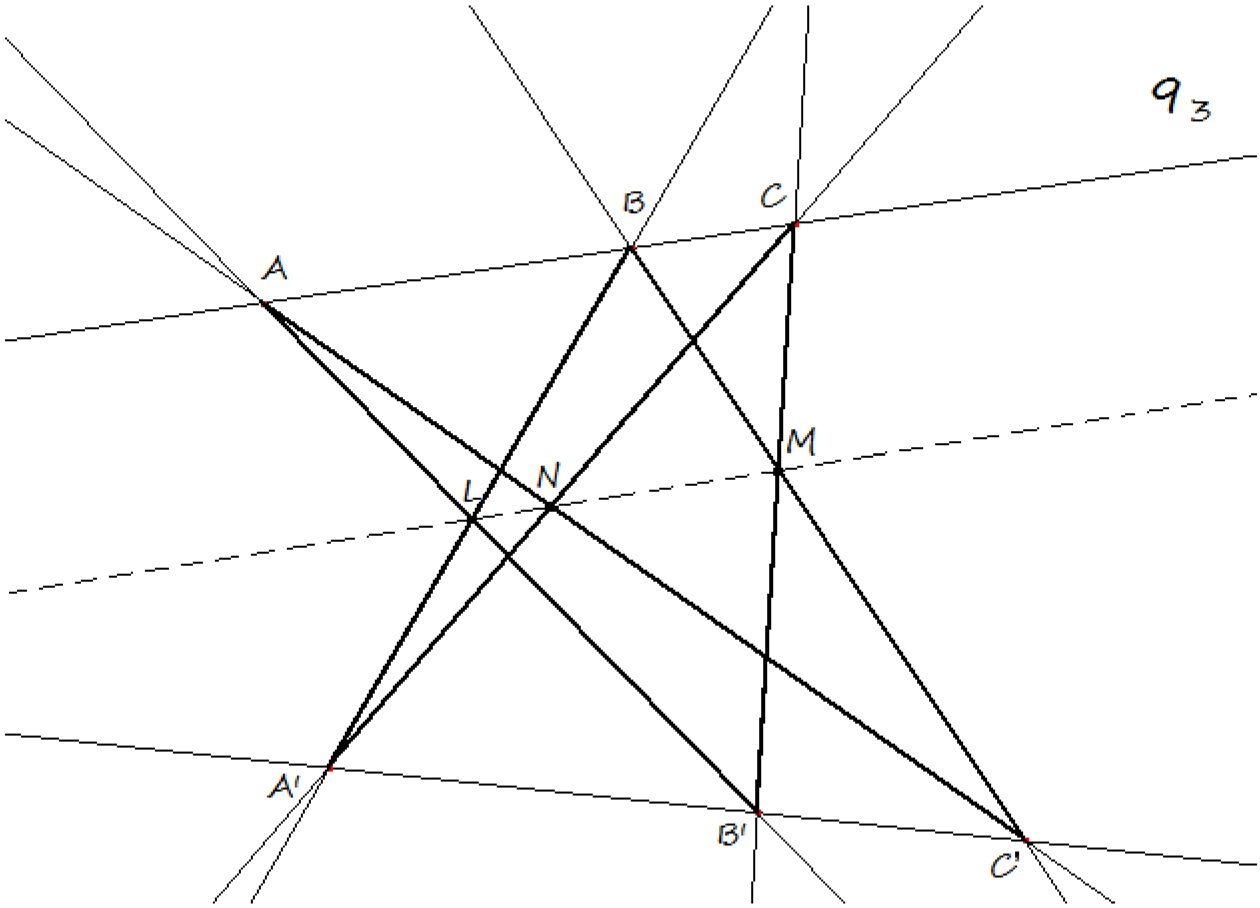
Lati = rette …

$$coppie\ di\ lati\ opposti\ \begin{cases} AB', A'B \\ BC', B'C \\ CA', C'A \end{cases}$$

$$vertici\ alterni\ \begin{cases} ACB\ su\ una\ retta \\ B'A'C'su\ una\ retta \end{cases}$$

Allora

I punti di intersezione dei lati opposti sono allineati.

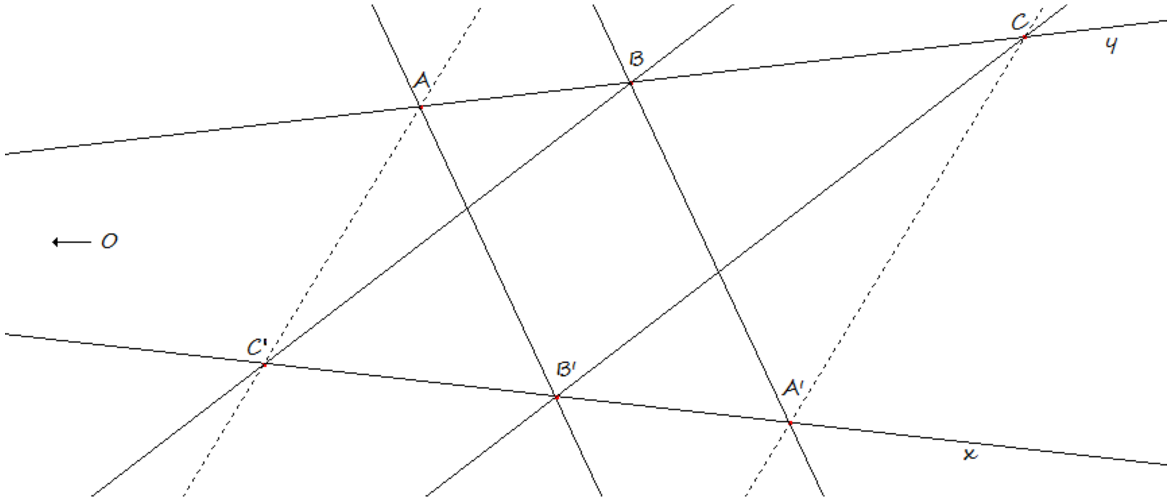


$L = AB' \cdot A'B$; $M = BC' \cdot B'C$; $N = CA' \cdot C'A$, $N\ giace\ su\ LM$

scriviamo sinteticamente $Pappo\ su\ \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$

Pappo su (MATRICE) significa : se ho una matrice di punti 2x3 con righe formate da punti allineati, allora sono allineati i punti che ottengo intersecando le rette passanti per i corrispondenti punti in croce delle due righe.

Se nel teorema di Pappo scegliamo come retta impropria la congiungente i punti di intersezione dei lati opposti dell'esagono mistico otteniamo la seguente versione affine



$$\left.\begin{matrix} AB' \parallel BA' \\ BC' \parallel CB' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow AC' \parallel CA'$$

Assumiamo che il piano sia Desarguesiano, cioè ricco di dilatazioni.

Dimostriamo che se le rette x e y sono parallele, allora il teorema di Pappo è vero senza restrizioni sull'anello divisorio.

Siano τ_1 e τ_2 le traslazioni per cui

$$\tau_1(A) = B \quad ; \tau_2(B) = C$$

Per la regola del parallelogramma si ha

$$\tau_1(B') = A' \quad ; \tau_2(C') = B'$$

Sia $\tau = \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$. Si ottiene

$$\tau(A) = \tau_2\tau_1(A) = \tau_2(B) = C$$

$$\tau(C') = \tau_1\tau_2(C') = \tau_1(B') = A'$$

Essendo τ una dilatazione si ottiene

$$AC' \parallel A'C$$

Dimostriamo che vale il teorema di Pappo se e solo se l'anello divisorio è commutativo. Supponiamo che $O = x \cdot y$ sia un punto proprio e siano σ_1 e σ_2 le dilatazioni di centro O tali che

$$\sigma_1(A) = B \quad ; \quad \sigma_2(B) = C$$

Per la regola del trapezio, come prima si ha :

$$\sigma_1(B') = A' \quad , \quad \sigma_2(C') = B'$$

Se $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ si ottiene

$$\sigma(A) = \sigma_2\sigma_1(A) = \sigma_2(B) = C$$

Se $\rho = \sigma_1 \circ \sigma_2$, si ottiene

$$\rho(C') = \sigma_1\sigma_2(C') = \sigma_1(B') = A'$$

Riassumendo

$$\sigma(A) = C$$

$$\rho(C') = A'$$

Se il gruppo delle dilatazioni di centro O è commutativo, allora $\sigma = \rho$ è la stessa dilatazione e quindi

$$A'C \parallel AC'$$

perché una dilatazione manda rette in rette parallele .

Viceversa, se il piano è Pappiano ….

Dimostrazione nel piano analitico :

$$x \cdot y = O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Applicando un automorfismo lineare possiamo supporre $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, B'\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Allora

$$m_{AB'} = -1 \Rightarrow m_{A'B} = -1 \Rightarrow B\begin{pmatrix}0\\z\end{pmatrix}, A'\begin{pmatrix}z\\0\end{pmatrix}$$

$$Siano\ C\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}, C'\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} m_{BC'} = -za^{-1} \\ m_{B'C} = -b \end{array}\right\} \Rightarrow z = ba$$

$$\left.\begin{array}{r} m_{AC'} = -a^{-1} \\ m_{A'C} = -bz^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow coincidono\ se\ z = ab$$

Dunque

$\mathcal{K}$ commutativo $\Rightarrow$ il piano è pappiano

Viceversa supponiamo che l'enunciato di Pappo sia vero.

Siano $a, b \in \mathcal{K}$. Scegliamo i seguenti punti sugli assi cartesiani

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, B'\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}, C'\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$$

È possibile scegliere i punti

$$B\begin{pmatrix}0\\z\end{pmatrix}, A'\begin{pmatrix}z\\0\end{pmatrix}$$

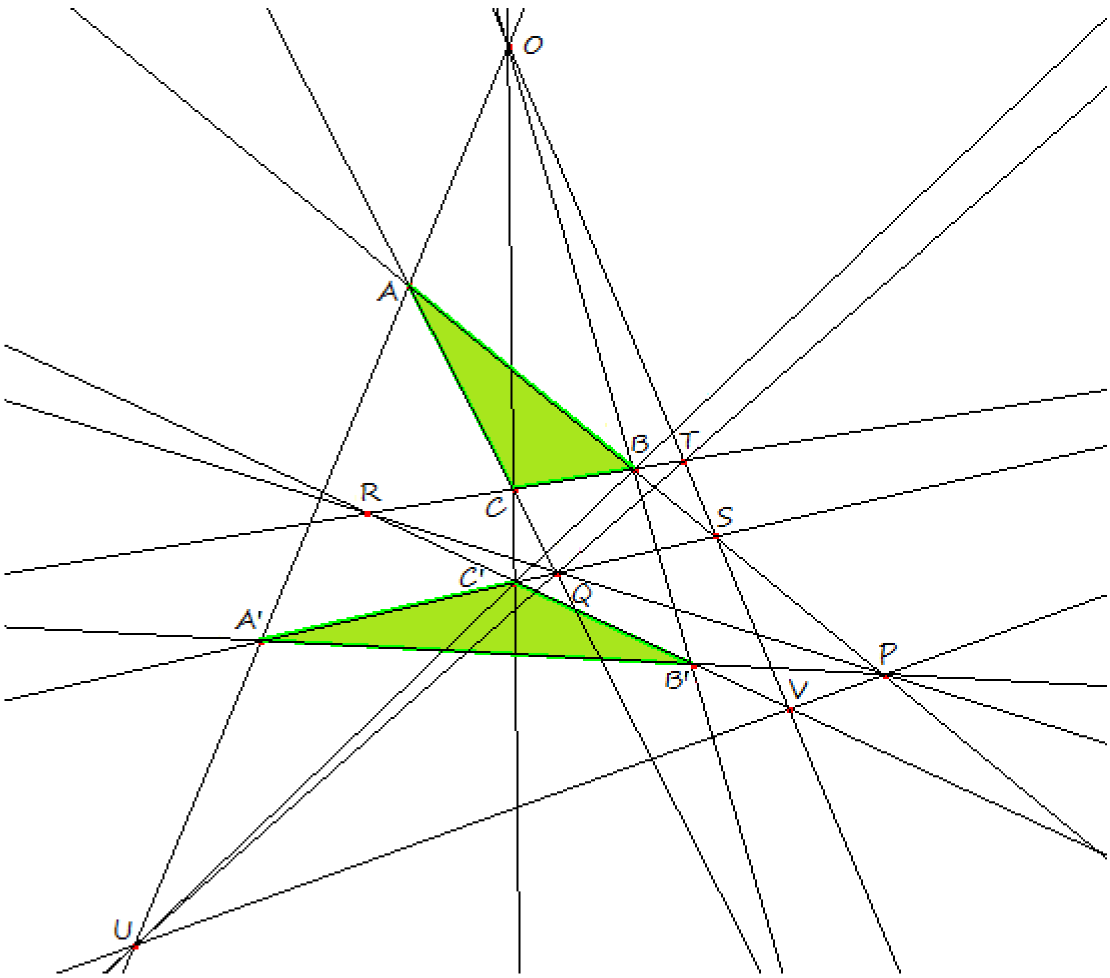
In modo che l'esagono AB'CA'BC' abbia i lati opposti paralleli , il che significa che devono valere le condizioni :

$$\begin{cases} z = ba \\ z = ab \end{cases}$$

Nota

Il teorema di Pappo è un caso particolare (conica degenere) del teorema sull' "hexagramma mysticum" di B. Pascal .

Osservazione:
sappiamo che ogni anello divisorio finito è commutativo (J. Wedderburn) ;
ciò significa che ogni piano Desarguesiano finito è Pappiano.
Non esiste in letteratura una dimostrazione sintetica di questo fatto.
G. Hessenberg ha dimostrato che ogni piano Pappiano è Desarguesiano.



Il teorema di Desargues dedotto da quello di Pappo.

[G. Hessenberg , Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen, “Math. Ann.” , vol. 61 (1905)]

Dobbiamo dimostrare che sono allineati i punti P, Q, R intersezione dei lati omologhi dei triangoli ABC e $A'B'C'$ usando il piano proiettivo.

Sia $S = A'C' \cdot AB$

Step 1

$$Pappo\ su \begin{pmatrix} O & C & C' \\ B & S & A \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T = OS \cdot BC \\ U = OA \cdot BC' \\ Q = AC \cdot SC' \end{cases} sono\ allineati$$

Step 2

$$Pappo\ su \begin{pmatrix} O & B & B' \\ C' & A' & S \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} U = OA' \cdot BC' \\ V = OS \cdot B'C' \\ P = SB \cdot A'B' \end{cases} sono\ allineati$$

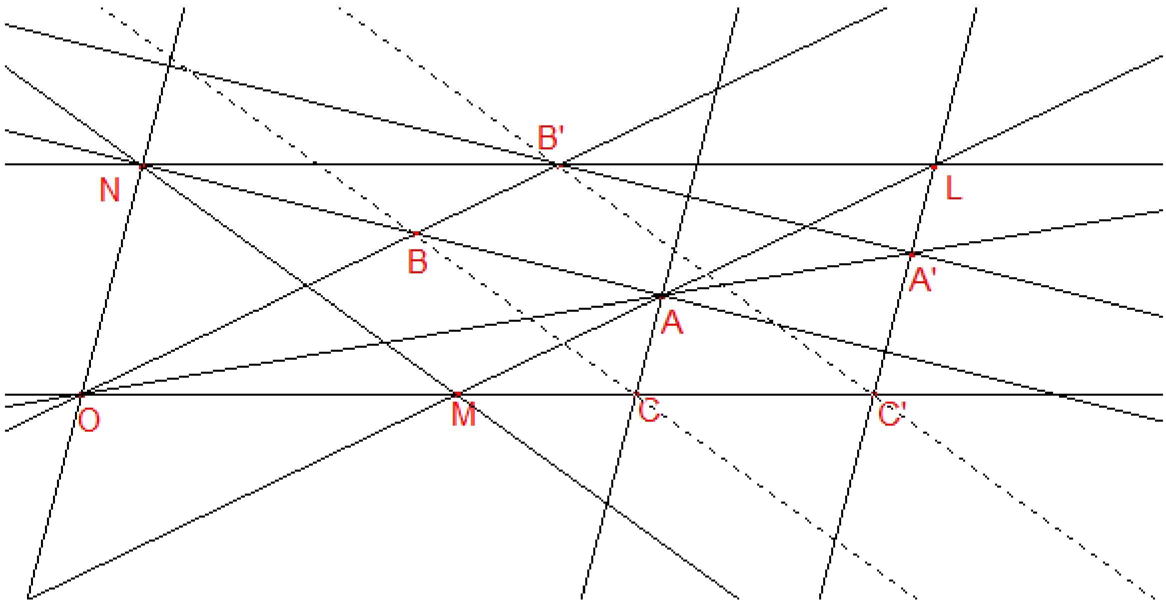
Step 3

$$Pappo\ su \begin{pmatrix} B & C' & U \\ V & T & S \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R = BT \cdot VC' \\ P \overset{step\ 2}{\triangleq} BS \cdot UV \\ Q \overset{step\ 1}{\triangleq} C'S \cdot TU \end{cases} sono\ allineati$$

Dimostrazione affine Pappo $\Longrightarrow$ Desargues

$$Pappo\ su\ \begin{pmatrix} L & M & N \\ L' & M' & N' \end{pmatrix}\ significa$$

Righe di punti allineati e che se due croci mi forniscono ciascuna una coppia di rette parallele, anche la terza croce mi fornisce una coppia di rette parallele.



$$AB \parallel A'B'\ ; AC \parallel A'C' \overset{?}{\Longrightarrow} BC \parallel B'C'$$

Traccio per A la parallela a BB' che interseca OC su M e A'C' su L .

B'L interseca AB su N , traccio ON e MN.

Abbiamo supposto che il quadrilatero OCAB non sia un trapezio.

$$Pappo\ su\ \begin{pmatrix} O & A & A' \\ L & B' & N \end{pmatrix} \Longrightarrow ON \parallel LA' \parallel CA$$

$$Pappo\ su\ \begin{pmatrix} M & O & C \\ B & A & N \end{pmatrix} \Longrightarrow MN \parallel BC$$

$$Pappo\ su\ \begin{pmatrix} C' & O & M \\ N & L & B' \end{pmatrix} \Longrightarrow MN \parallel B'C'$$

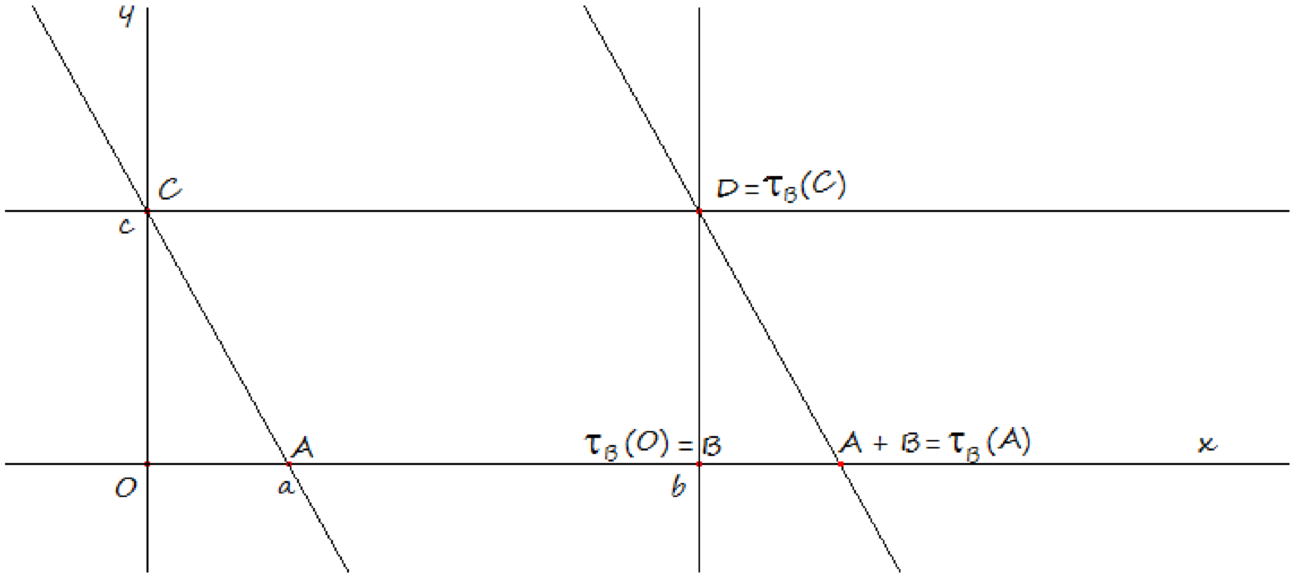
Dunque

$$B'C' \parallel BC$$

Se in un piano analitico introduciamo le coordinate col metodo precedente, allora il corpo di numeri Desarguesiani è canonicamente isomorfo al corpo originale.

Maiuscole = punti Desarguesiani

Minuscole = coordinate-ascisse del piano analitico



Conoscendo $\tau_B(C)$ si determina graficamente la somma Desarguesiana $\tau_B(A)$, per la somma con le coordinate originali abbiamo :

$$retta\ AC\ \ldots\ a^{-1}x + c^{-1}y = 1$$

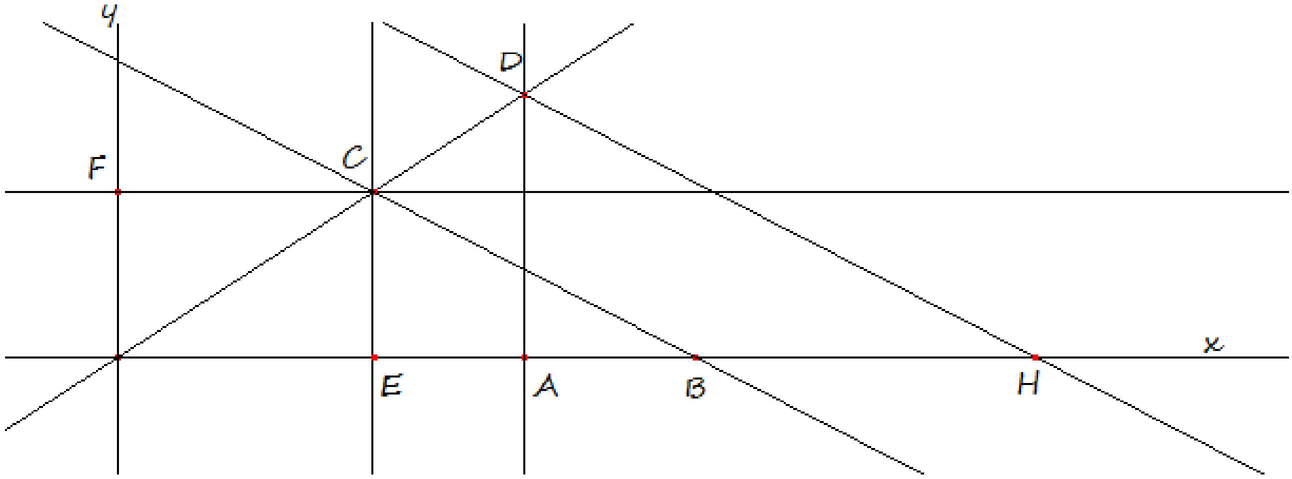
$$parallela\ per\ D\ \ldots\ \ a^{-1}x + c^{-1}y = a^{-1}(a+b)$$

Dunque

$$\begin{matrix} A & B & A+B \\ a & b & a+b \end{matrix}$$

Ascissa di (A + B) = ascissa di (A) + ascissa di (B)

Per il prodotto siano $E(1,0)$; $F(0,1)$



$$A = \sigma_A(E) \implies D = \sigma_A(C) \implies H = \sigma_A(B) = \sigma_A\big(\sigma_B(E)\big) = B \cdot A$$

Se usiamo le coordinate originali abbiamo

$$C(1,1) \quad A(a,0) \quad B(b,0) \quad D(a,a) \quad H(?\,,0)$$

$$m_{BC} = (\Delta y)(\Delta x)^{-1} = -(b-1)^{-1}$$

$$parallela\ per\ D \ldots \quad y - a = -(b-1)^{-1}(x-a)$$

Da cui

$$? = ba\ ovvero\ H = (ba, 0)$$

Ascissa di (BA) = ascissa di (B) • ascissa di (A)

Traslazioni e omotetie con le coordinate

Affini	Omogenee
$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$	$\begin{cases} x_1' = x_1 + a x_3 \\ x_2' = x_2 + b x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$
$\begin{cases} x' = x\lambda \\ y' = y\lambda \end{cases}$	$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = \lambda^{-1} x_3 \end{cases}$
$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$	$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 \\ x_2' = \lambda x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$

Nel caso non commutativo l'ultima non tiene puntualmente fissa
la retta $x_3 = 0$

Riferimenti Bibliografici

D. Hilbert , Grundlagen der Geometrie

E. Artin , Geometric Algebra

R. Hartshorne , Foundantions of Projective Geometry