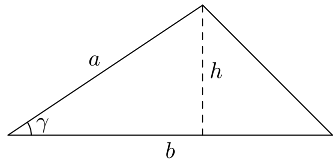
Teorema dei seni e Teorema di Pitagora

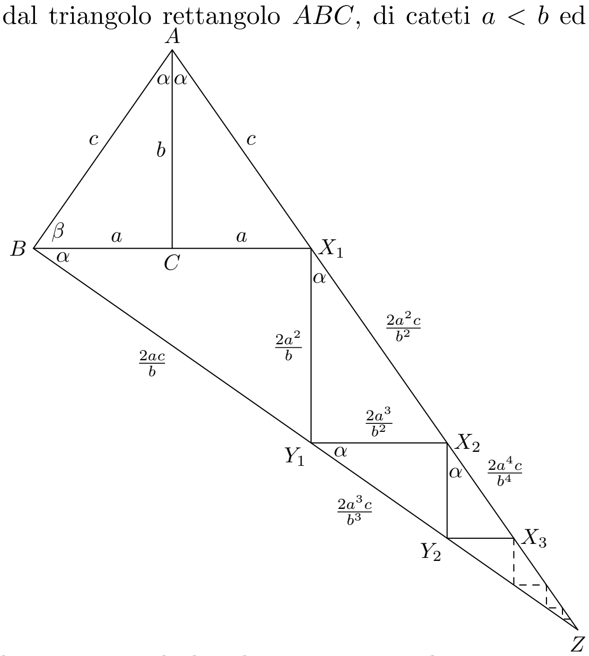
Maurizio Candilera (07.04.2023)

A fine marzo 2023 è stata pubblicata sul *Guardian* la notizia che due studentesse di college, Ne'Kiya Jackson e Calcea Johnson, avevano presentato ad un meeting dell'AMS una dimostrazione del fatto che il Teorema di Pitagora può essere dedotto dal Teorema dei seni senza far uso di un ragionamento circolare. Qualche giorno dopo era disponibile online un video [`https://www.youtube.com/watch?v=nQD6lDwFmCc`] in cui veniva presentata un'idea della dimostrazione (ma il video non è stato fatto dalle autrici). Il fatto degno di nota è che un tale approccio era giudicato impossibile perché alla base della trigonometria vi è la relazione $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, che è equivalente al Teorema di Pitagora. D'altro canto, per quanto mi sembra di aver capito, le due autrici non fanno uso di tutto l'armamentario trigonometrico, ma solo della definizione del seno di un angolo in un triangolo, che può essere data nel modo seguente. Fissati due lati di un triangolo, il seno dell'angolo compreso è il rapporto tra il doppio dell'area del triangolo e il prodotto delle lunghezze dei lati, ovvero il rapporto tra l'altezza del triangolo e la lunghezza del lato dal cui vertice parte l'altezza, ovvero, facendo riferimento alla figura,



$\sin\gamma = \frac{h}{a} = \frac{2A}{ab}$, ove A indica l'area del triangolo (e ab è l'area del rettangolo di lati a e b). La definizione mi sembra ben posta e il seno di un angolo retto è uguale a 1; inoltre vale il *teorema dei seni*: indicati con α, β, γ i tre angoli di un triangolo (non degenere) e con a, b e c le lunghezze dei tre lati ad essi rispettivamente opposti, si ha $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{2A}{abc}$. Andiamo quindi a descrivere la dimostrazione, basandoci sulla presentazione contenuta nel video citato.

Facendo riferimento alla figura qui sotto, partiamo dal triangolo rettangolo ABC, di cateti $a < b$ ed ipotenusa c. Costruiamo un nuovo triangolo ABZ nel modo seguente: il punto X_1 è il simmetrico di B rispetto alla retta per A e C e prolunghiamo il lato AX_1 fino ad incontrare nel punto Z la perpendicolare al lato AB passante per il punto B. Vogliamo calcolare le lunghezze dei due lati $x = |AZ|$ e $y = BZ$ e procediamo in questo modo: dal punto X_1 tiriamo la perpendicolare al lato BC fino ad incontrare il lato BZ nel punto Y_1 e da questo tiriamo la parallela al lato BC fino ad incontrare il lato AZ nel punto X_2 e proseguiamo in modo analogo a costruire i punti X_n e Y_n al crescere indefinitamente dell'indice n. Osserviamo che i triangoli così costruiti, BX_1Y_1, $X_1Y_1X_2$, $Y_1X_2Y_2$, etc., sono tutti simili al triangolo ABC, avendo i tre angoli uguali. Dal rapporto tra le lunghezze dei lati AC e BX_1, si ricavano le lunghezze dei vari lati e, in particolare



$$|BY_1| = \frac{2ac}{b}, \qquad |X_1X_2| = \frac{2a^2c}{b^2}.$$

Al passo successivo, sempre per similitudine, le lunghezze dei lati diventano $|Y_1Y_2| = \frac{2a^3c}{b^3}$ e $|X_2X_3| = \frac{2a^4c}{b^4}$; e, ad ogni passo, le lunghezze corrispondenti vengono moltiplicate per $\frac{a^2}{b^2}$. Dunque le lunghezze dei due lati si ottengono dalla somma della serie geometrica di ragione $\frac{a^2}{b^2} < 1$ e, precisamente,

$$y = |BZ| = \frac{2ac}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{b^{2n}} = \frac{2ac}{b}\frac{b^2}{b^2-a^2} = \frac{2abc}{b^2-a^2}$$

$$x = |AZ| = c + \frac{2a^2c}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{b^{2n}} = c + \frac{2a^2c}{b^2-a^2} = \frac{c(b^2+a^2)}{b^2-a^2}.$$

Applicando il Teorema dei seni al triangolo rettangolo ABZ, si ricava $\sin 2\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2ab}{b^2+a^2}$; inoltre, applicando lo stesso teorema ai triangoli ABC e ABX_1, si ottiene $\sin\beta = \frac{b}{c}$ e $\frac{\sin 2\alpha}{2a} = \frac{\sin\beta}{c} = \frac{b}{c^2}$ da cui si ricava $\sin 2\alpha = \frac{2ab}{c^2}$. Dunque

$$\frac{2ab}{b^2+a^2} = \sin 2\alpha = \frac{2ab}{c^2} \qquad \text{da cui si conclude} \qquad a^2 + b^2 = c^2.$$

Il ragionamento qui descritto non si può applicare al caso particolare in cui il triangolo rettangolo è isoscele ($a = b$) e il lato AX_1 è perpendicolare ad AB, per cui non esiste il punto Z. In tal caso basta osservare che il quadrato di lato il cateto a si ottiene unendo due triangoli isometrici al triangolo dato, mentre il quadrato di lato l'ipotenusa c, si ottiene unendo quattro triangoli. Dunque $c^2 = 2a^2$ come si doveva verificare.