

CURVE NEL PIANO COMPLESSO

Umberto Marconi

INTRODUZIONE ALLE SINUS SPIRALI

piano euclideo = piano complesso

z = numero – punto – vettore del piano complesso

j = unità immaginaria , $j^2 = -1$

$z = x + jy$; $z^ = x - jy$; $|z|^2 = z \cdot z^*$; x, y coordinate reali*

forma polare per $z \neq 0 \rightsquigarrow z = |z| \exp j\vartheta = |z|(\cos \vartheta + j \sin \vartheta) \rightsquigarrow$

$z^ = |z| \exp j(-\vartheta)$*

$\vartheta = \text{Arg } z = \widehat{1, z}$; $A(z) = \exp j\vartheta = \text{fattore argomento} = \frac{z}{|z|}$

$$(\exp j\vartheta)^2 = \exp 2j\vartheta = \frac{z}{z^*}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2j} \log \left(\frac{z}{z^*} \right)$$

$$\overrightarrow{z_1 z_2} = z_2 - z_1$$

$$\widehat{z_1, z_2} = \text{Arg} \frac{z_2}{z_1} = \text{Arg } z_1^* z_2 = \text{Arg } z_2 - \text{Arg } z_1$$

$$z_1^* z_2 = z_1 \circ z_2 + j(z_1 \times z_2)$$

Chiamiamo:

O-rette le rette non passanti per O;

O-circoli i circoli passanti per O.

Qualsiasi O-retta si trasforma mediante una roto-omotetia $w = p^* z$ nella retta

$$w + w^* = 2 \text{ ovvero } w = 1 + jt \text{ , } t \text{ reale}$$

$$p^* z + pz^* = 2 \text{ retta obliqua}$$

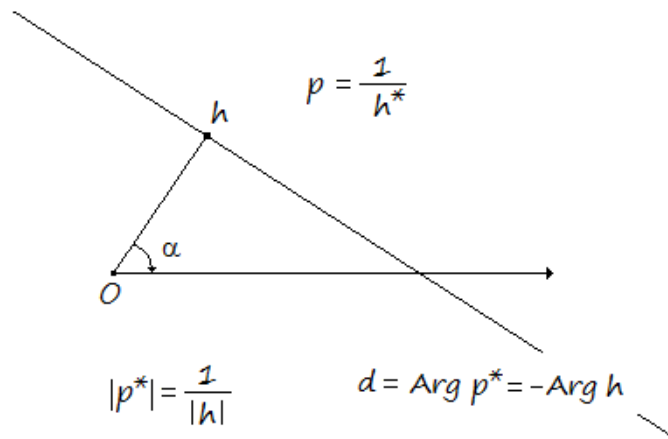


fig. 1

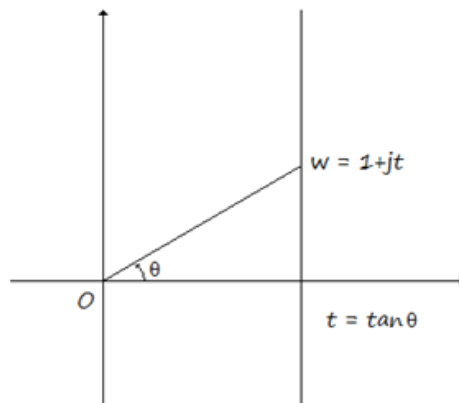
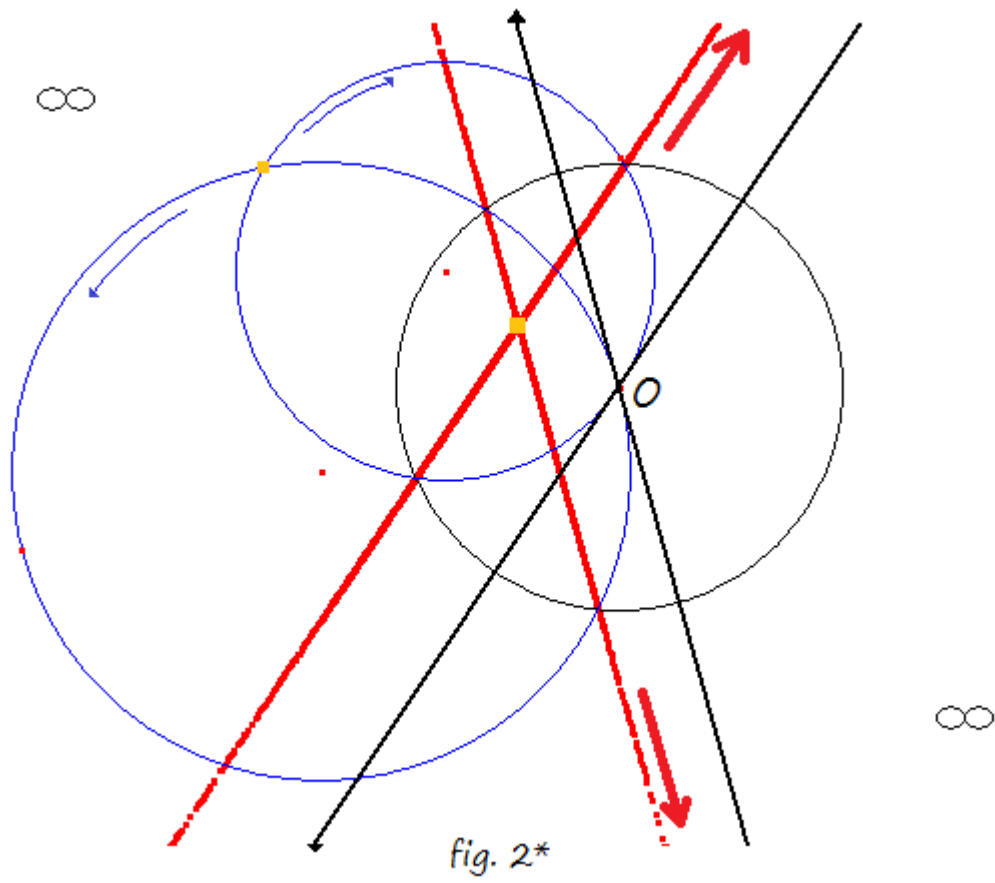


fig. 2

L'inversione rispetto al circolo unitario Γ di centro O e raggio 1 è la trasformazione

$$z \mapsto z' = \frac{1}{z^*} \quad |z| \exp j\vartheta \mapsto \frac{1}{|z|} \exp j\vartheta$$

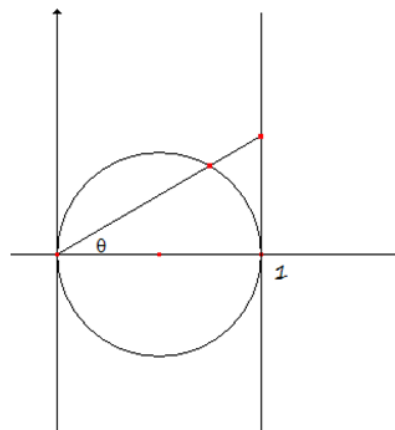
- è involutoria e tiene puntualmente fisso il circolo di inversione Γ ;
- manda in sé qualsiasi retta per O ;
- trasforma qualsiasi O -retta nel circolo passante per $1/h^*$ e con tangente in O parallela alla retta data e viceversa ; di conseguenza l'angolo in O fra due O -circoli è isogonico con l'angolo formato tra le corrispondenti O -rette all'infinito.



$$w = p^*z = 1 + jt$$

$$w' = \frac{1}{pz^*} = \frac{1}{1 - jt} = \frac{1}{1 + t^2} + j \frac{t}{1 + t^2}$$

$$\frac{1}{z^*} = pw'$$



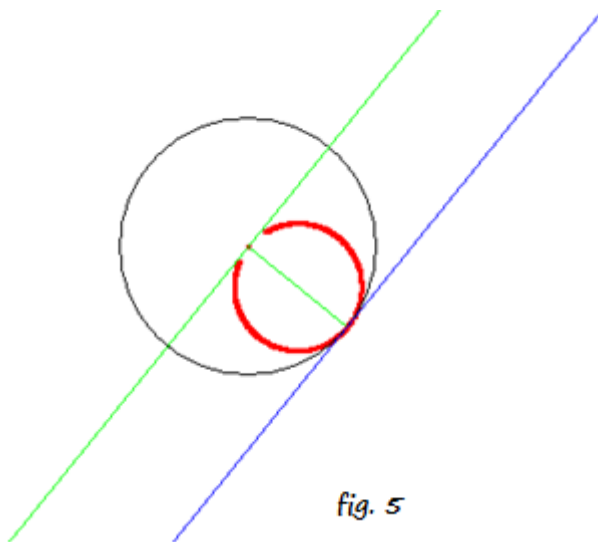
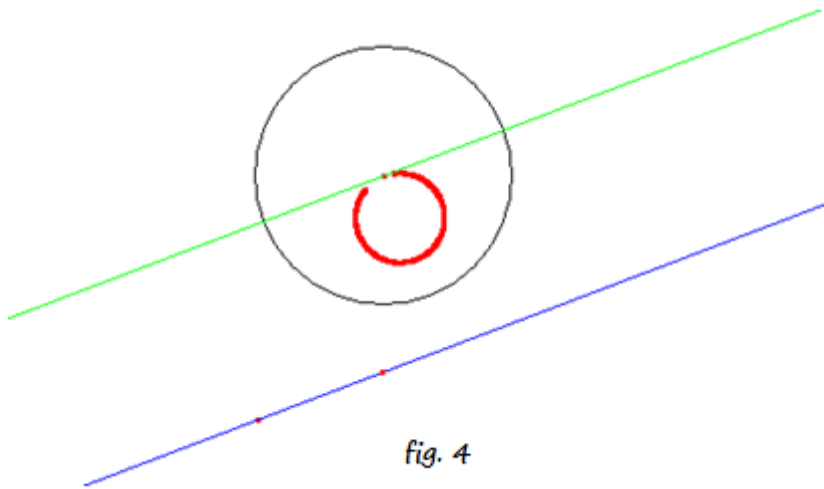
Le funzioni

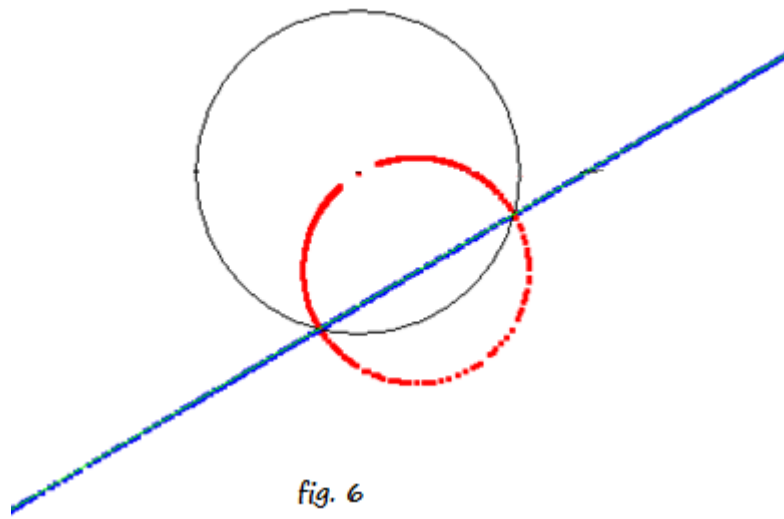
$$z = \frac{1}{\cos \vartheta} \exp j\vartheta \quad ; \quad z = \cos \vartheta \exp j\vartheta$$

sono periodiche di periodo π ; se

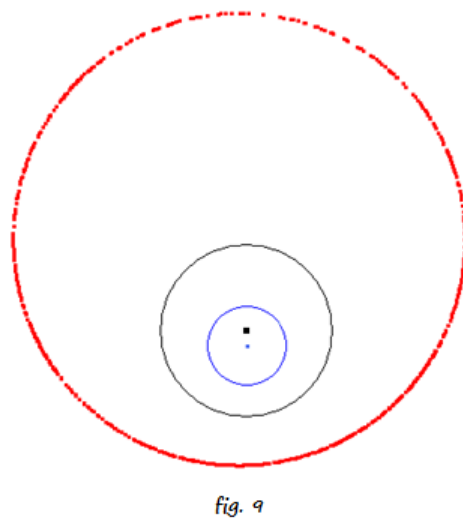
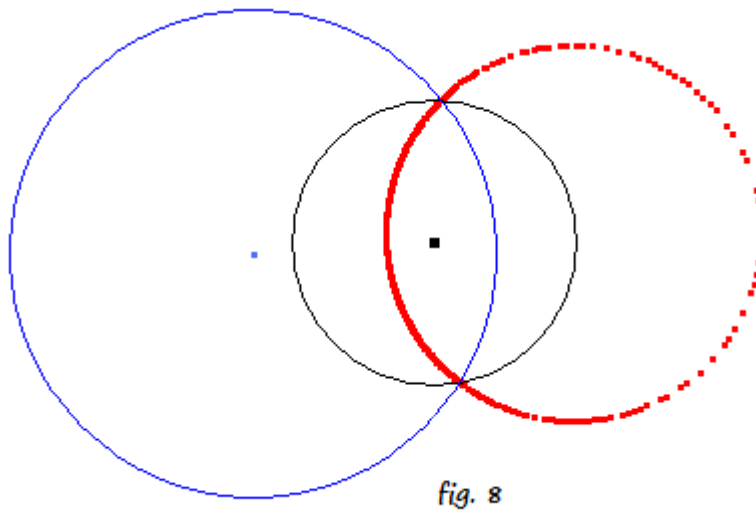
$$\vartheta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

esse costituiscono una parametrizzazione biettiva tramite l'argomento.





- l'inversione manda circoli non per O in circoli non per O ;



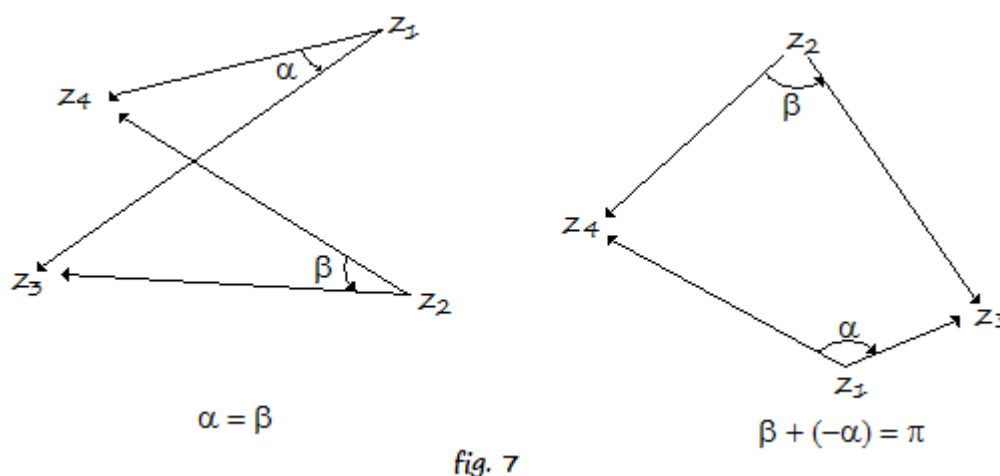
a) l'inversione coniuga il birapporto:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2}$$

perché il birapporto è invariante per passaggio al reciproco ;

b) il birapporto è reale se e solo se gli argomenti dei due rapporti coincidono *mod* π ;

c) quattro punti stanno in un circolo –retta se e solo se il birapporto è puramente reale ;



• dall'identità di Möbius

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = 1 - (z_1, z_3, z_2, z_4)$$

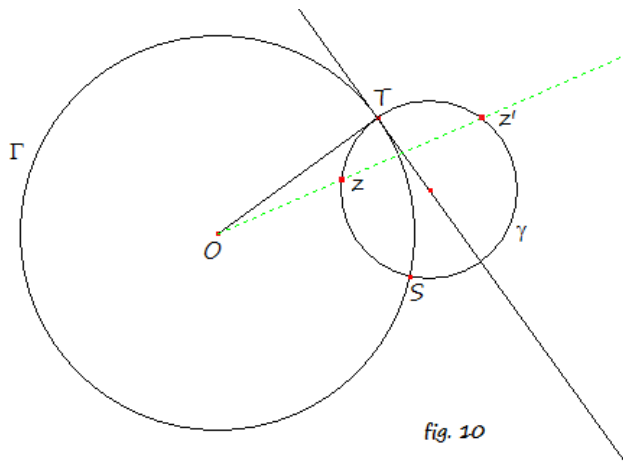
si ottiene il teorema di Tolomeo : in un quadrilatero inscritto in un circolo il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti.

• poiché la trasformazione $1/z$ ruota di

$$\text{Arg} \left(-\frac{1}{z_0^2} \right)$$

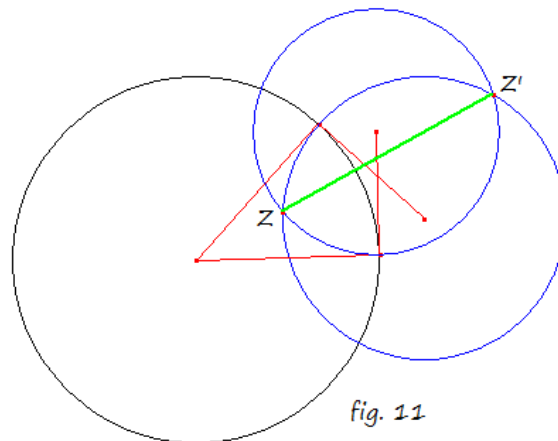
il vettore tangente a una curva passante per z_0 , l'inversione ribalta gli angoli orientati conservandone il valore assoluto; quindi conserva l'ortogonalità tra curve (ovviamente la tangenza);

- l'inversione manda in sé circoli-rette ortogonali a Γ :



$$\frac{1}{\gamma'} = \gamma \text{ perché passa per } T, S \text{ ed è ortogonale a } \Gamma \text{ in } T$$

- due circoli passanti per Z e ortogonali a Γ si intersecano nel punto inverso Z'



- due inversioni

$$z' = \frac{R^2}{z^*}$$

rispetto a circoli di centro O si ottengono una dall'altra applicando una omotetia di rapporto

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

Osservazione

Poiché le trasformazioni del piano ampliato in sé

$$\frac{1}{z} \text{ e } \frac{1}{z^*}$$

mandano circoli-rette in circoli-rette, anche le trasformazioni di Möbius

$$\frac{az + b}{cz + d}$$

e le antiomografie

$$\frac{az^* + b}{cz^* + d}$$

mandano circoli-rette in circoli-rette. È vero anche il viceversa: ogni trasformazione iniettiva del piano ampliato in sé che manda circoli-rette reali in circoli-rette reali è una trasformazione di Möbius oppure una antiomografia.

Osservazione

L'inversa della spirale di Archimede

$$f(\vartheta) = \vartheta \exp j\vartheta$$

è la spirale iperbolica

$$g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta} \exp j\vartheta$$

L'inversa della spirale logaritmica

$$f(u) = \exp(u + jbu)$$

è la spirale logaritmica

$$g(u) = \exp(-u + jbu) = (f(-u))^*$$

Nota

Con abuso di simbolismo, con l'equazione polare

$$|z| = f(\vartheta)$$

intendiamo l'equazione parametrica

$$z = f(\vartheta) \exp j\vartheta$$

in tal caso

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \vartheta & \text{se } f(\vartheta) > 0 \\ \vartheta - \pi & \text{se } f(\vartheta) < 0 \end{cases}$$

SINUS SPIRALI

Sono curve di equazione polare

$$|z|^n = q^n \cdot \cos n\vartheta, n \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{R}^+$$

Cerchiamo l'equazione parametrica

$$z = |z| \exp j\vartheta \rightsquigarrow z^n = q^n \cos n\vartheta \cdot \exp jn\vartheta = q^n \cdot \frac{1 + j \tan n\vartheta}{1 + \tan^2 n\vartheta}$$

da cui, ponendo $t = -\tan n\vartheta$ viene

$$z = q \cdot \frac{1}{(1 + jt)^{\frac{1}{n}}}$$

la curva è simmetrica rispetto all'asse reale.

Se $|n| = p/q$ la curva ha p rami, piazzati nei settori in cui $\cos n\vartheta > 0$.

Sia Γ il ramo associato alla determinazione

$$|\vartheta| < \left| \frac{\pi}{2n} \right| = \frac{q}{p} \cdot \frac{\pi}{2}$$

gli altri rami si trovano applicando successivamente a Γ rotazioni di argomento $2\pi/p$.

Per valori opposti di n , i rami relativi ad uno stesso settore si ottengono uno dall'altro per inversione circolare.

Un ramo è tangente ai lati del proprio settore in O per $n > 0$ oppure in ∞ per $n < 0$.

Da :

$$\text{ampiezza di un ramo} = \frac{q}{p} \pi$$

$$\text{ampiezza della rotazione} = \frac{2}{p} \pi$$

Si ottiene

$q = 1$	<i>i rami occupano i settori alterni di un $2p$-angolo regolare</i>
$q = 2$	<i>i rami occupano tutti i settori di un p-angolo regolare; se $p = 1$ l'unico ramo compie un giro completo ed ha un punto cuspidale a tangente orizzontale</i>
$q > 2$	<i>l'ampiezza di un ramo è maggiore dell'ampiezza della rotazione che porta uno nel successivo, quindi i rami si sovrappongono; se $p = 1$ l'unico ramo percorre più di un giro ed ha un punto doppio</i>

$n = -1$ <i>linea retta</i>	$n = 1$ <i>circolo</i>
$n = -\frac{1}{2}$ <i>parabola</i>	$n = \frac{1}{2}$ <i>cardioide</i>
$n = -2$ <i>iperbole equilatera</i>	$n = 2$ <i>lemniscata</i>
$n = -\frac{1}{3}$ <i>cubica di Tschirnhausen</i>	$n = \frac{1}{3}$ <i>sestica di Cayley</i>

Se calcoliamo il vettore tangente otteniamo

$$n\dot{z} = q \cdot \frac{-j}{\left[(1+jt)^{\frac{1}{n}}\right]^{n+1}}$$

Se moltiplichiamo per $+j$ (ruotiamo di $+\pi/2$ il vettore $n\dot{z}$), abbiamo come vettore normale

$$\vec{u} = q \left(\frac{1}{(1+jt)^{\frac{1}{n}}} \right)^{n+1}$$

Da cui

$$v = \text{Arg } \vec{u} = \text{Arg} \left(\frac{1}{(1+jt)^{\frac{1}{n}}} \right)^{n+1} = (n+1)\text{Arg } z$$

Cioè

$$v = \text{argomento della normale}$$

$$\vartheta = \text{argomento del raggio vettore } \vec{Oz}$$

$$v = (n+1)\vartheta ; \frac{v}{\vartheta} = n+1 \neq 1$$

Nella spirale logaritmica $\nu - \vartheta = \text{costante} \neq 0$.

Nel seguito poniamo $t = \tan(|n|\theta)$ e scriviamo le sinus spirali nella forma

$$z = \gamma_n(t) = q \frac{1}{(1 + jt)^{\frac{1}{n}}} \quad \text{quando } n < 0$$

$$z = \gamma_n(t) = p \frac{1}{(1 - jt)^{\frac{1}{n}}} \quad \text{quando } n > 0$$

in modo che per valori opposti dell'esponente otteniamo punti associati nell'inversione circolare per lo stesso parametro t ; inoltre in entrambi i casi l'argomento $\nu = (n + 1)\vartheta$ si ottiene aggiungendo $-\pi/2$ all'argomento τ di z .

Esempi

(i)

$$n = -1 ; t = \tan \vartheta ; \nu = 0$$

$$z = q \frac{1}{(1 + jt)^{-1}} = q(1 + jt)$$

Equazione cartesiana $z + z^* = 2q$

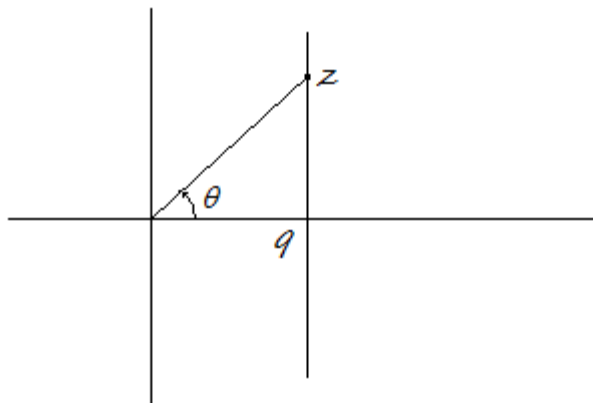


fig. 12

Qualsiasi retta non per O ha equazione cartesiana $p^*z + pz^* = 2$ ove $z \mapsto p^*z$ è opportuna roto-omotetia

$$p = \frac{1}{h^*}, \text{Re}(p^*z) = 1$$

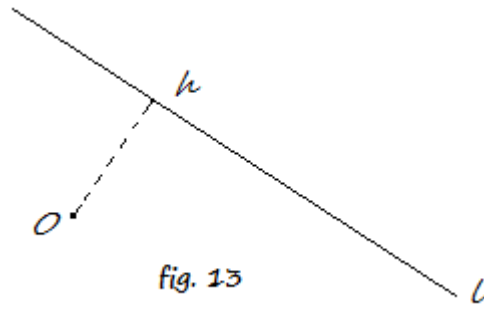


fig. 13

Equazione polare

$$|z| = \frac{q}{\cos \vartheta}$$

(ii)

$$n = 1, \quad t = \tan \vartheta, \quad v = 2\vartheta$$

Inversione rispetto al circolo di raggio q

$$z = q \cdot \frac{1}{1 - jt} = q \left(\frac{1}{1 + t^2} + j \frac{t}{1 + t^2} \right)$$

Se usiamo il parametro θ otteniamo

$$z = q(\cos^2 \vartheta + j \sin \vartheta \cos \vartheta) = q \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(j2\vartheta) \right)$$

Sappiamo già che si tratta del circolo che passa per O e per $q + j0$ e tangente in O alla retta di equazione $Re z = 0$

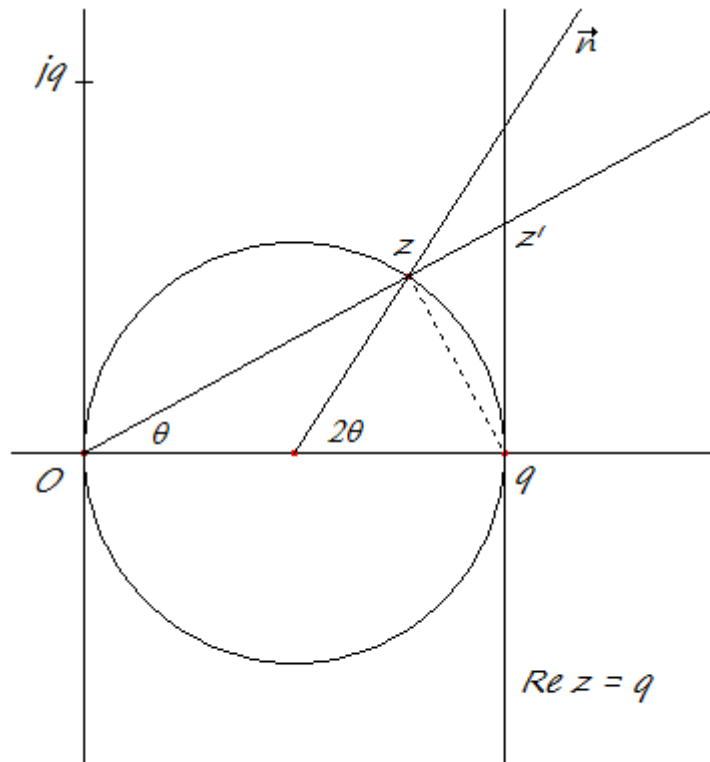


fig. 14

Equazione polare

$$|z| = q \cos \vartheta$$

Osservazione generale

Posto $r = |z|$ l'equazione polare si scrive $r = r(\vartheta)$ da cui si ha

$$z = r(\vartheta) \exp j\vartheta$$

Calcolando

$$\frac{dz}{d\vartheta} = \left(\frac{dr}{d\vartheta} + jr \right) \exp j\vartheta$$

La condizione $v = (n + 1)\vartheta$ con qualche conto porta all'equazione differenziale

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\vartheta} = -\tan(n\vartheta)$$

Da cui

$$\log r = \frac{1}{n} \log \cos n\vartheta + \log q^n$$

Ovvero

$$r^n = q^n \cos n\vartheta$$

Quindi le *sinus-spirali* sono caratterizzate dal fatto che il rapporto fra l'argomento della normale e l'argomento del raggio vettore è costante $\neq 1$ con ($n \neq 0$).

(iii)

$$n = -\frac{1}{2}, \quad t = \tan \frac{\vartheta}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2} \vartheta$$

La normale divide a metà l'angolo fra il raggio vettore \vec{Oz} e la direzione orizzontale per z , proprietà di riflessione della parabola

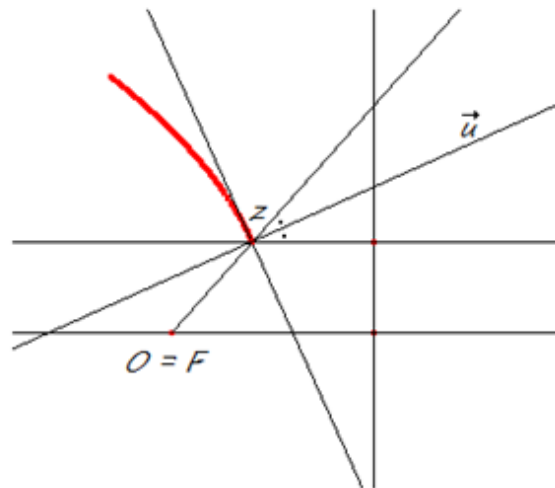


fig. 15

$$z = \frac{p}{2} \frac{1}{(1+jt)^{-2}} = \frac{p}{2} (1+jt)^2 = \frac{p}{2} (1-t^2 + 2jt)$$

poiché

$$t = \tan \frac{\vartheta}{2} \rightsquigarrow z = \frac{p}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \exp j\vartheta$$

abbiamo l'equazione polare

$$|z| = p \frac{1}{1 + \cos \vartheta}$$

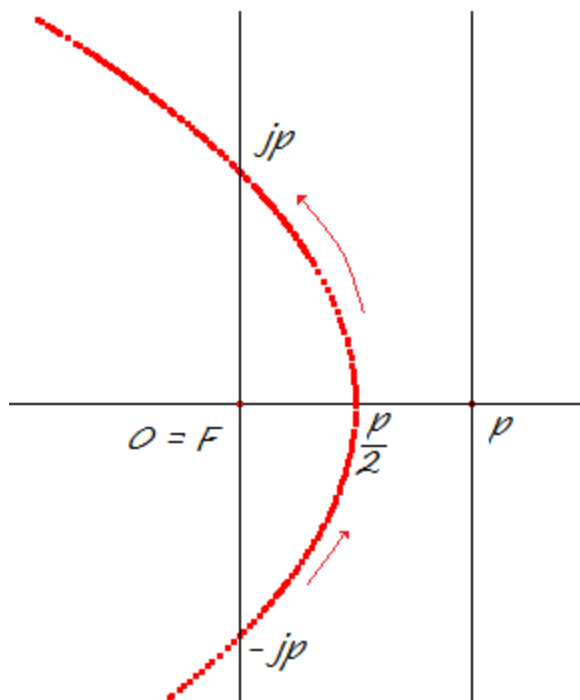


fig. 16

Conviene scegliere $-\pi < \vartheta < \pi$ perché così i parametri t, ϑ hanno lo stesso carattere di monotonia .

Equazione cartesiana

$$2px = p^2 - y^2$$

(iv)

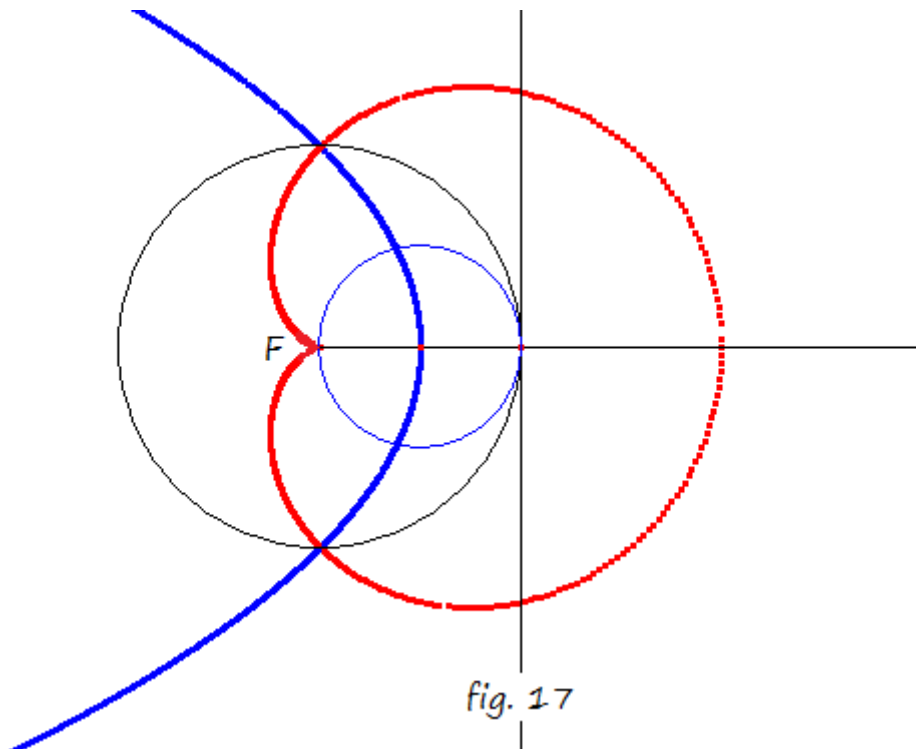
$$n = \frac{1}{2}$$

Facciamo ora l'inversione rispetto al circolo Γ di centro F e raggio p , che ha $\pm jp$ come punti uniti.

Intanto sappiamo che la direttrice va a finire nel circolo

$$\text{di centro } \frac{p}{2} \text{ e di raggio } \frac{p}{2}$$

che chiamiamo circolo fisso Λ .



Scriviamo le condizioni/equazioni della curva ottenuta per inversione della parabola rispetto al circolo di raggio p e centro $F=O$

$$n = \frac{1}{2}, t = \tan \frac{\vartheta}{2}, v = \frac{3}{2}\vartheta$$

$$z = 2p \frac{1}{(1-jt)^2} \rightsquigarrow |z| = 2p \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = p(1 + \cos \vartheta)$$

Dall'equazione polare riconosciamo la cardioide, ma vogliamo dimostrare alcune proprietà.

Equazione parametrica mediante argomento

$$z = |z| \exp j\vartheta = (p \cos \vartheta + p) \exp j\vartheta$$

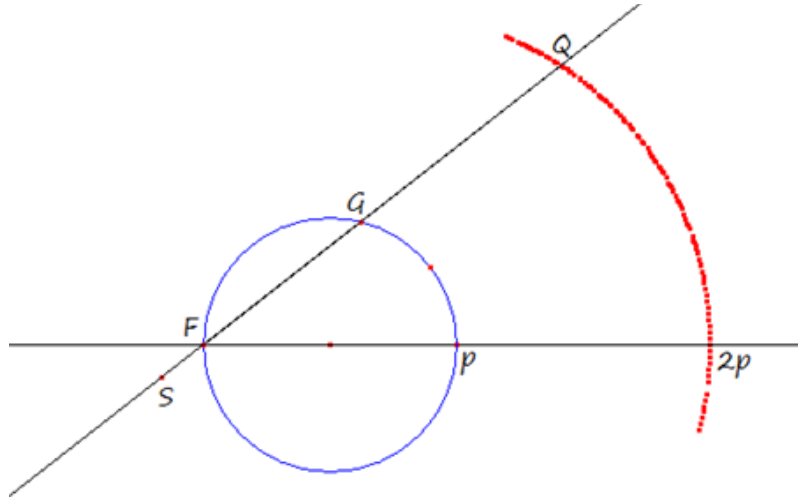


fig. 18

Poiché $z(\vartheta + \pi) = (p \cos \vartheta - p) \exp j\vartheta$ si ha che, detto G il punto di intersezione della retta per F con il cerchio fisso, i punti S e Q a distanza p da G su tale retta stanno sulla cardioide.

Quindi la cardioide è una particolare concoide a base circolare (=lumaca).

$$\overrightarrow{FG} = p \cos \vartheta \exp j\vartheta \quad \overrightarrow{GQ} = p \exp j\vartheta$$

$$\overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GQ} \quad Q \text{ sta sulla cardioide}$$

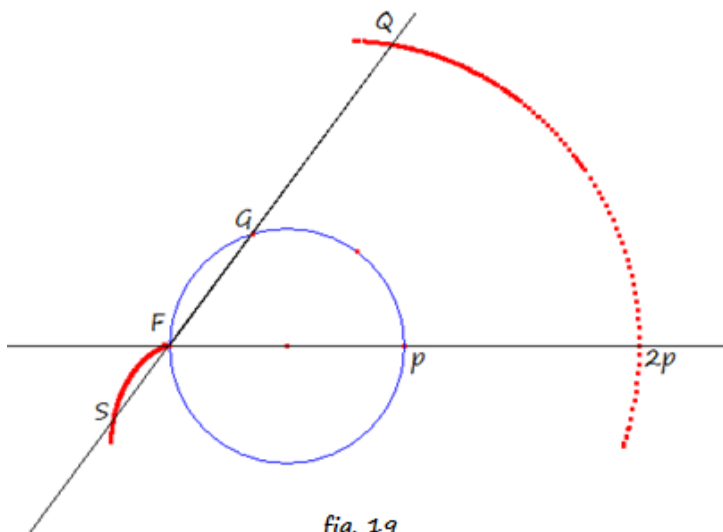


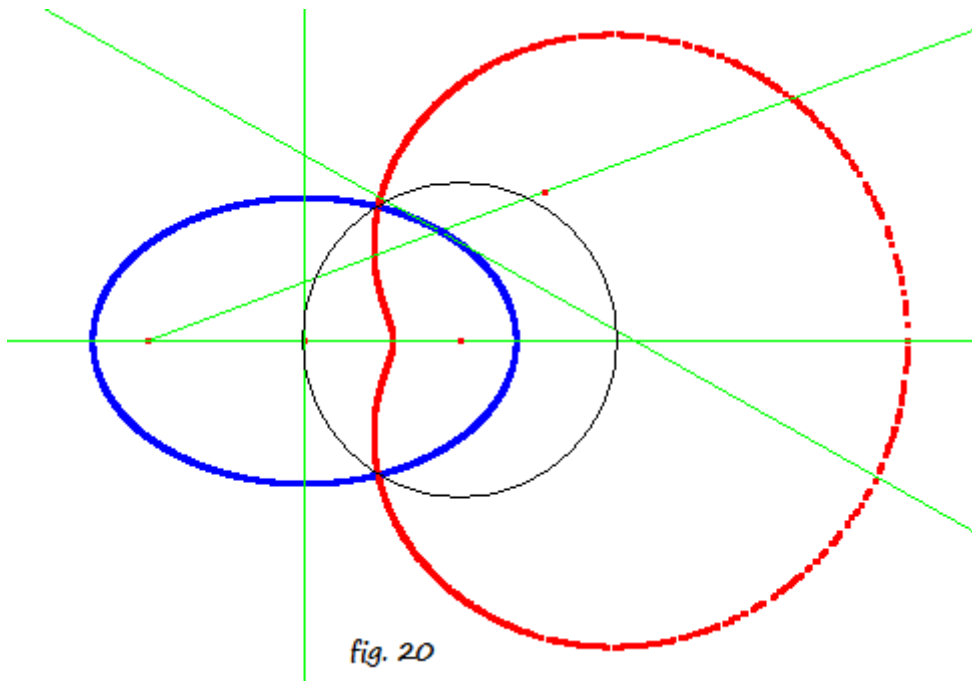
fig. 19

Se prendiamo S e Q punti a distanza ℓ da G, al variare di ϑ , otteniamo la lumaca

$$z = (p \cos \vartheta + \ell) \exp j\vartheta$$

Si osservi che tutte le lumache si ottengono dall'equazione kepleriana di una conica tramite inversione circolare di centro un fuoco :

lumaca con punto isolato	ellisse
cardioide	parabola
lumaca con cappio	iperbole



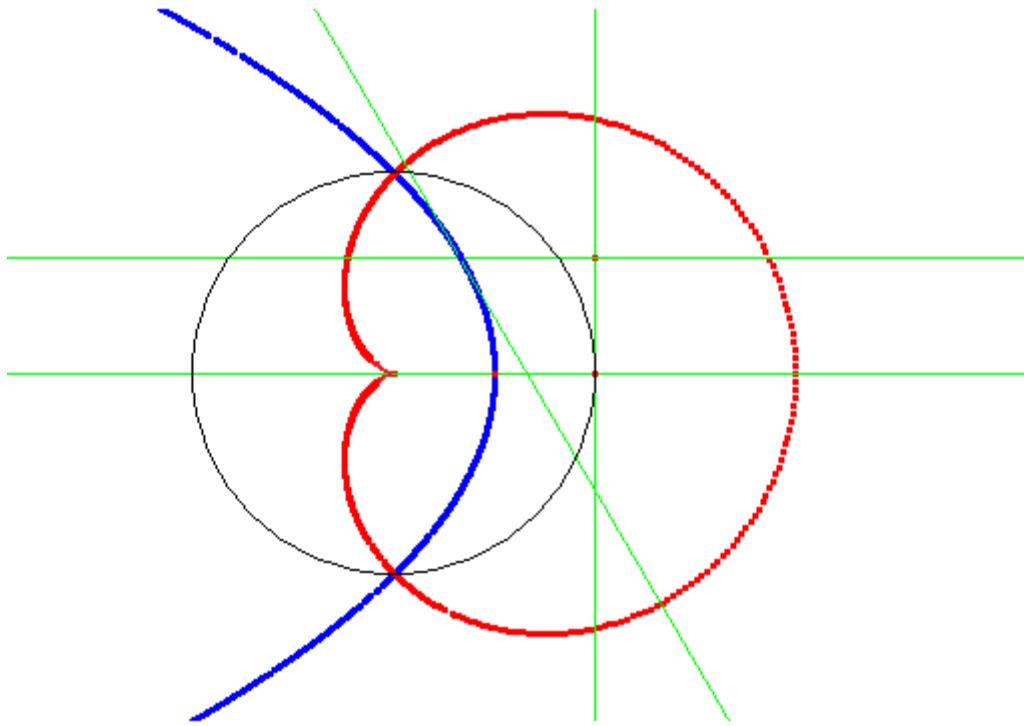


fig. 21

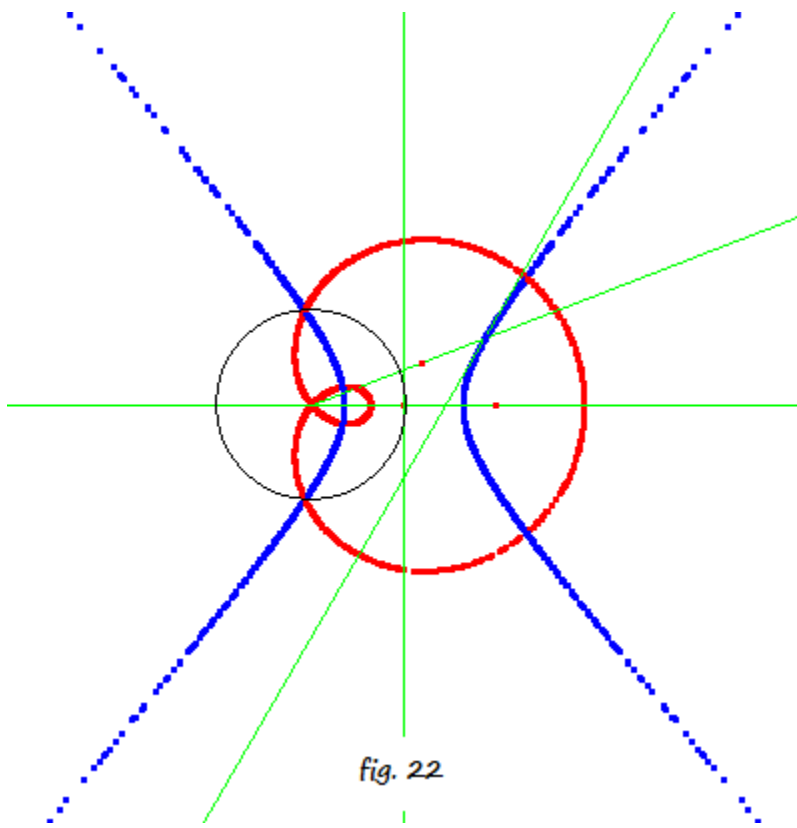


fig. 22

Attenzione - L'inversione circolare di una iperbole equilatera rispetto al suo centro è una lemniscata.

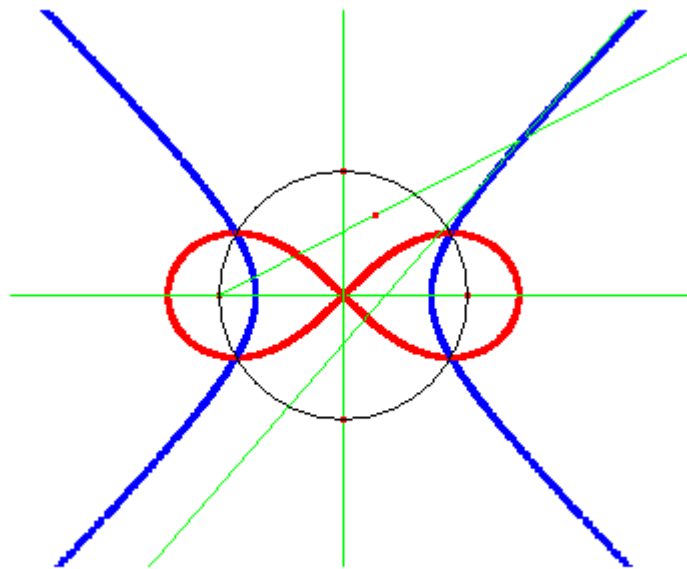


fig. 23

Riprendiamo la cardioide, cioè $\ell = p$.

Da alcuni valori di ν e dalle proprietà dell'inversione possiamo abbozzare un grafico

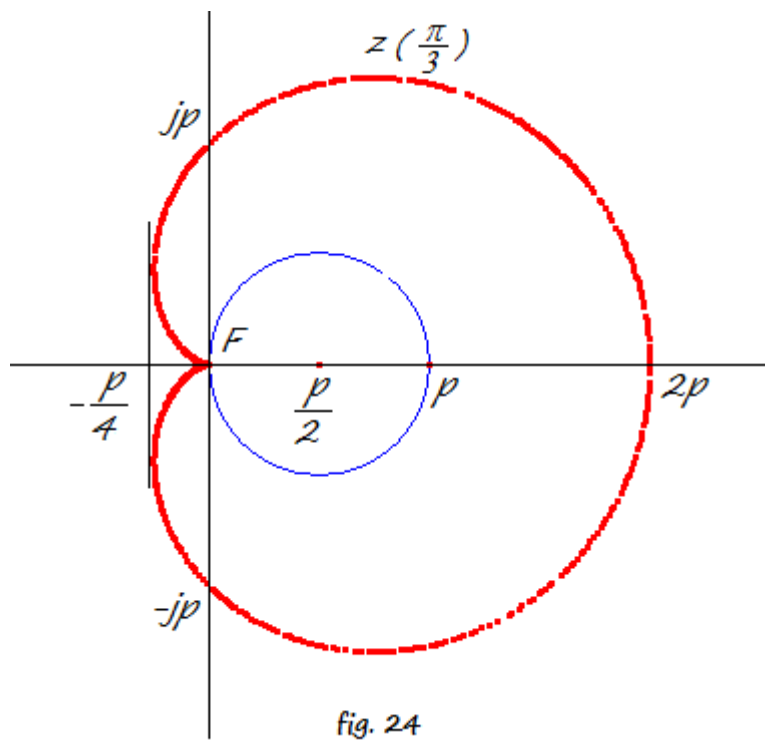
θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	π^-	$-\pi^+$
ν	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi^-$	$-\frac{3}{2}\pi^+$
	Re z = max	Im z = max		Re z = min	Discontinuità in F	

L'argomento del vettore tangente ($p = 1$)

$$\dot{z} = -(\sin \vartheta + \sin 2\vartheta) + j(\cos \vartheta + \cos 2\vartheta)$$

Ha una discontinuità in F perché la parte reale cambia segno e la parte immaginaria è infinitesimo di ordine superiore.

Punto cuspidale F a tangente orizzontale



Dalla parametrizzazione tramite l'argomento

$$z = z(\vartheta) = p(1 + \cos \vartheta) \exp j\vartheta = p \left(1 + \frac{1}{2} (\exp j\vartheta + \exp(-j\vartheta)) \right) \exp j\vartheta$$

$$z - \frac{p}{2} = p \cdot \exp j\vartheta + \frac{p}{2} \cdot \exp 2j\vartheta$$

cioè il vettore

$$z - \frac{p}{2}$$

si ottiene sommando il vettore $p + j0$ ruotato di un argomento ϑ con il vettore

$$\frac{p}{2} + j0$$

ruotato di un argomento 2ϑ .

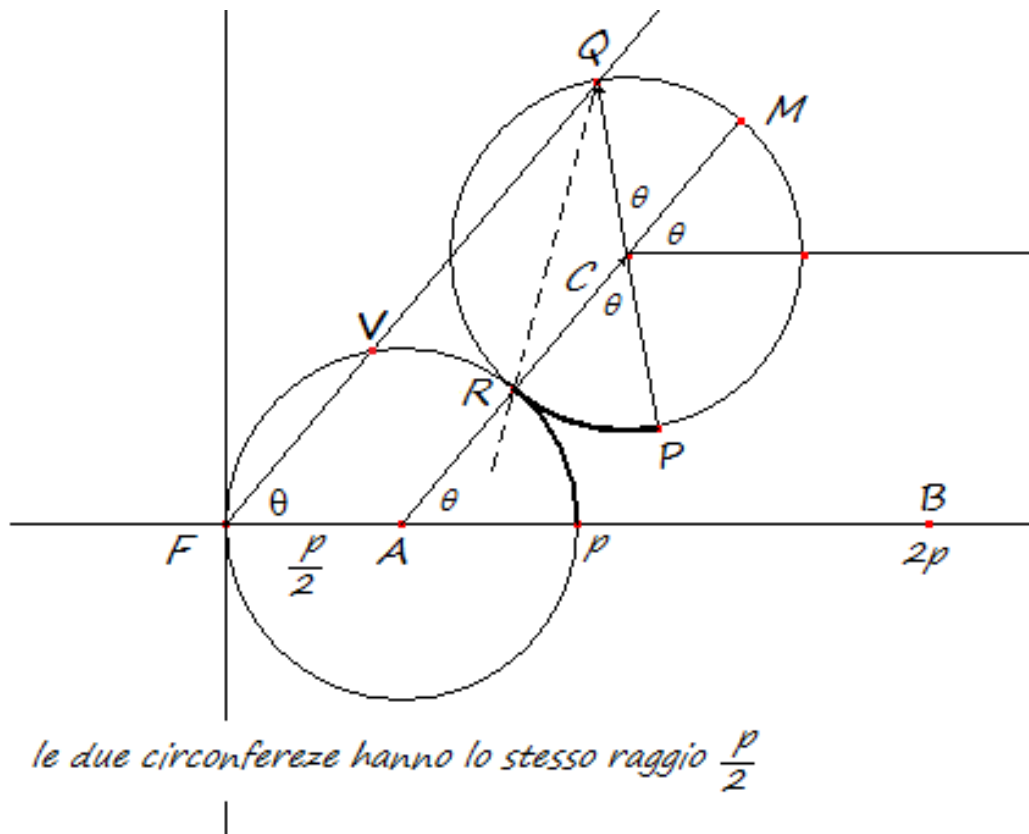


fig. 25

$$\overrightarrow{AQ} = Q - A = z - \frac{p}{2} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} \quad \text{ove } Q = Q(z)$$

La cardioide è la curva tracciata da un punto Q di una rotella di raggio $p/2$ che ruota attorno al cerchio fisso rimanendo tangente esternamente; nel nostro caso il punto Q è quello che passa attraverso i punti uniti $\pm jp$ o equivalentemente attraverso il punto $2p + j0$.

È facile vedere che ϑ è anche l'argomento del raggio vettore \overrightarrow{FQ} , e quindi tutto torna.

Il punto R è centro di rotazione istantanea del punto Q e quindi il vettore \overrightarrow{RQ} , di argomento $\frac{3}{2}\vartheta$, è normale alla cardioide in Q .

La semiretta QR è anche bisettrice dell'angolo \widehat{CQF} e quindi la cardioide riflette il raggio luminoso \overrightarrow{CQ} nel raggio luminoso \overrightarrow{QF} ; ma il raggio \overrightarrow{CQ} si ottiene per riflessione del raggio orizzontale che colpisce in C il cerchio di centro A e raggio p (uso della cardioide per produrre un'immagine anastigmatica, strumento costruito da Siedentopf nel 1908).

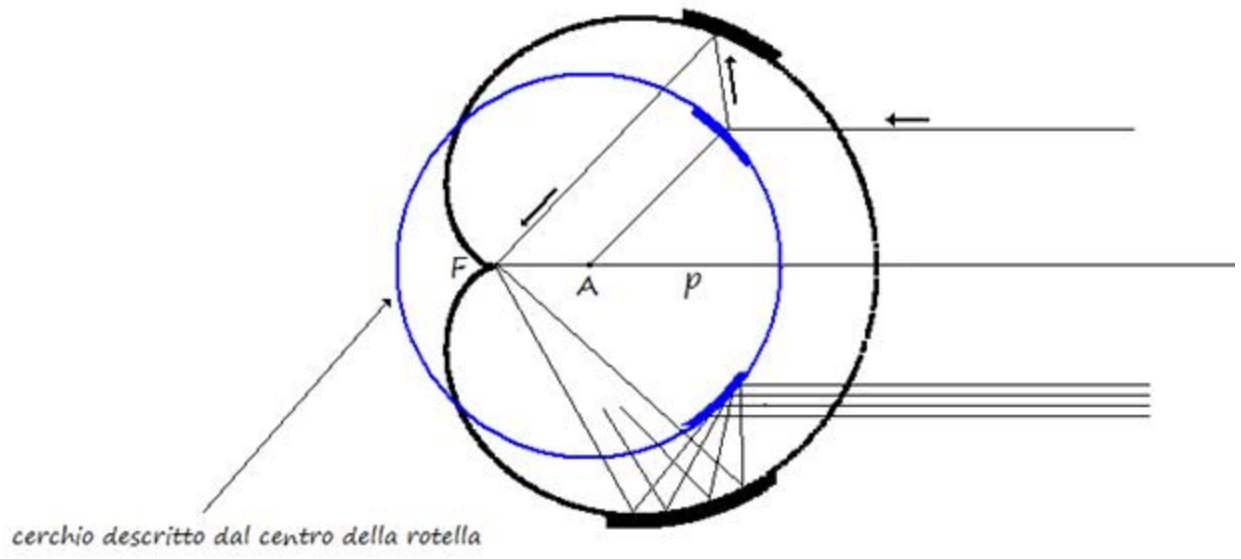


fig. 26

Se applichiamo la proprietà commutativa e scriviamo

$$\overrightarrow{AQ} = z - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} \exp j2\vartheta + p \exp j\vartheta = \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{VQ}$$

scopriamo che la cardioide è anche la pericicloide generata dalla rotazione attorno al cerchio Λ di un hula hoop di raggio doppio = p come mostra la figura seguente

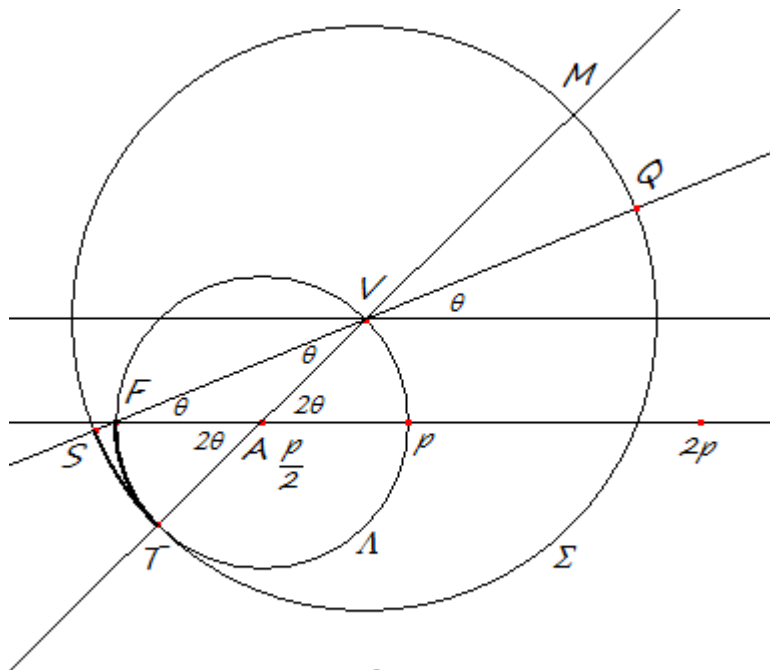


fig. 27

V centro del cerchio Σ che rotola tangente a Λ .

$$\widehat{TF} = \frac{p}{2} \cdot 2\vartheta = p\vartheta = \widehat{TS} , \quad VS = VQ = p$$

I punti S e Q si scambiano quando ϑ compie mezzo giro, perché in tal caso il diametro VT del cerchio fisso compie un giro completo attorno al suo centro A.

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{VQ} \quad \text{se } z = z(Q)$$

$$z - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} \exp j2\vartheta + p \exp j\vartheta$$

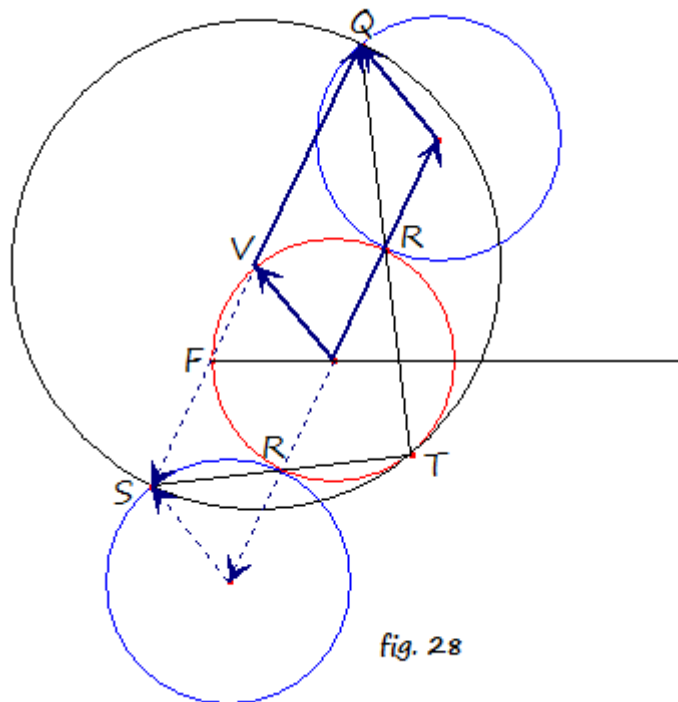
Ogni corda passante per il fuoco F è bisecata dalla sua intersezione V con il cerchio fisso.

Da

$$z(\theta) = p(1 + \cos \vartheta) \exp j\vartheta$$

si ottiene

$$\frac{1}{2}(z(\vartheta) + z(\vartheta + \pi)) = p \cos \vartheta \exp j\vartheta = V$$



$$Q = z(\vartheta) = \frac{p}{2}(1 + \exp j\vartheta)^2 = \frac{p}{2} + p \exp j\vartheta + \frac{p}{2} \exp j2\vartheta$$

$\vartheta =$ argomento di cui ha ruotato la rotella rispetto al suo centro =
 $=$ argomento di cui ha ruotato l'hula hoop rispetto al suo centro =
 $=$ argomento del raggio vettore \overrightarrow{FQ} (raggio focale)

$S = z(\vartheta + \pi)$ è diametralmente opposto a Q rispetto al centro V dell'hula hoop; V sta sul cerchio fisso; la corda SQ passa per F ; ogni corda che passa per F è tagliata a metà dall'altro punto di intersezione con il cerchio fisso (punto V , proprietà concoidale)

$T = T(\vartheta) = T(\vartheta + \pi)$ punto di tangenza dell'hula hoop

T è diametralmente opposto a V rispetto al cerchio fisso quindi $\overrightarrow{TR}(\vartheta)$ è normale alla cardioide in Q e $\overrightarrow{TR}(\vartheta + \pi)$ è normale alla cardioide in S, inoltre sono normali tra loro in T perché SQ è diametro dell'hula hoop.

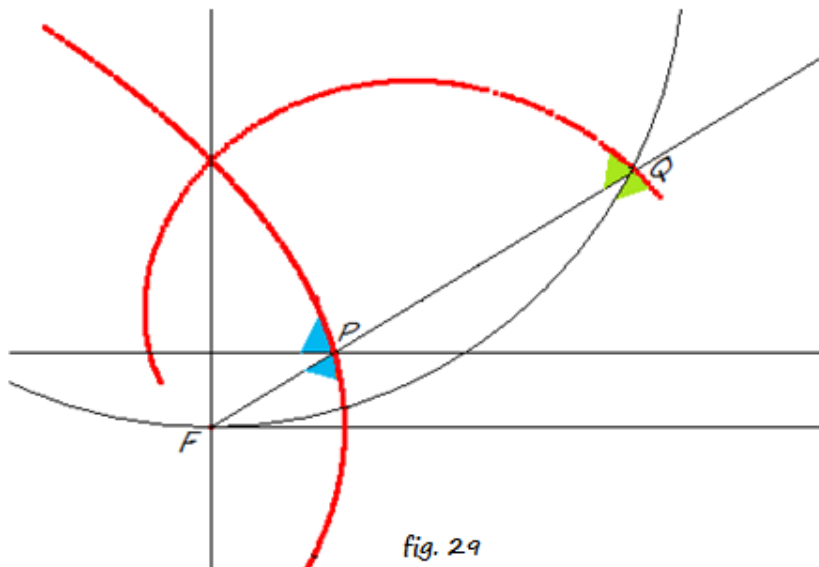
$R = R(\vartheta)$ punto di tangenza della rotella

T e $R(\vartheta)$ sono centri di rotazione istantanea del punto Q

T e $R(\vartheta + \pi)$ son centri di rotazione istantanea del punto S

Proprietà di riflessione

La proprietà di riflessione della parabola in un suo punto P si traduce nella seguente proprietà di riflessione della cardioide in un suo punto Q :
l'angolo fra la cardioide e il segmento FQ è uguale all'angolo tra la cardioide e l'arco FQ del cerchio tangente in F all'asse della cardioide.



Esercizio

Dimostrare che due F-circoli mutualmente ortogonali tangenti alla cardioide si intersecano in un punto del cerchio fisso.

L'esagono rettangolo

Dal fatto che

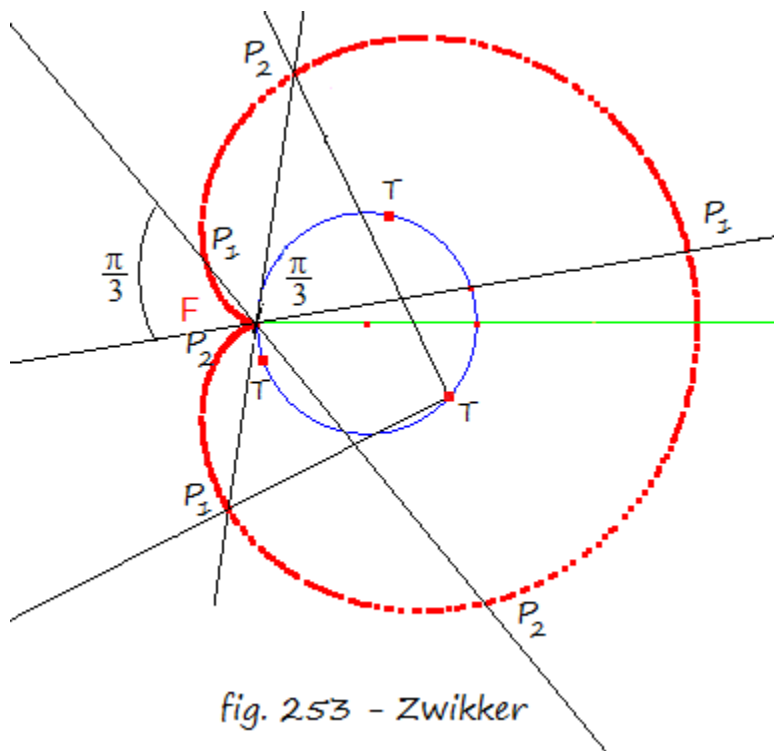
$$v(\vartheta) = \frac{3}{2}\vartheta$$

Si deduce che

$$v\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) = v(\vartheta) + \frac{\pi}{2}$$

E questa relazione ci fornisce coppie di tangenti (o normali) perpendicolari.

Se consideriamo tre rette passanti per F e formanti tra loro angoli di $\frac{\pi}{3}$, le tangenti alla cardioide nei punti di intersezione con queste rette sono perpendicolari per punti consecutivi nell'ordine circolare, e quindi anche per i due punti che appartengono ad una stessa retta.



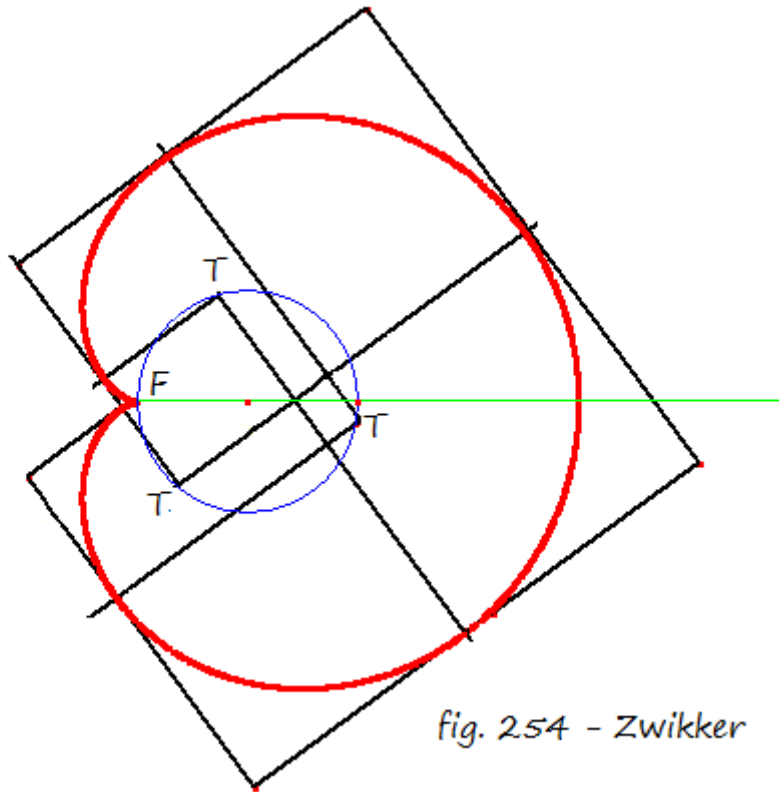


fig. 254 - Zwickler

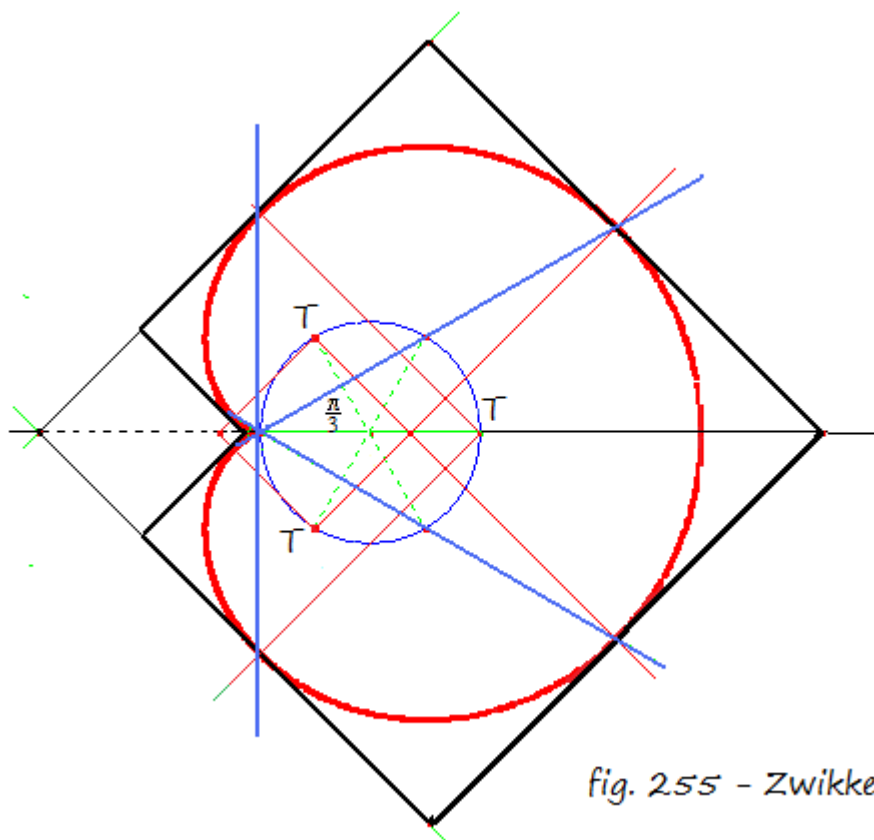


fig. 255 - Zwickler

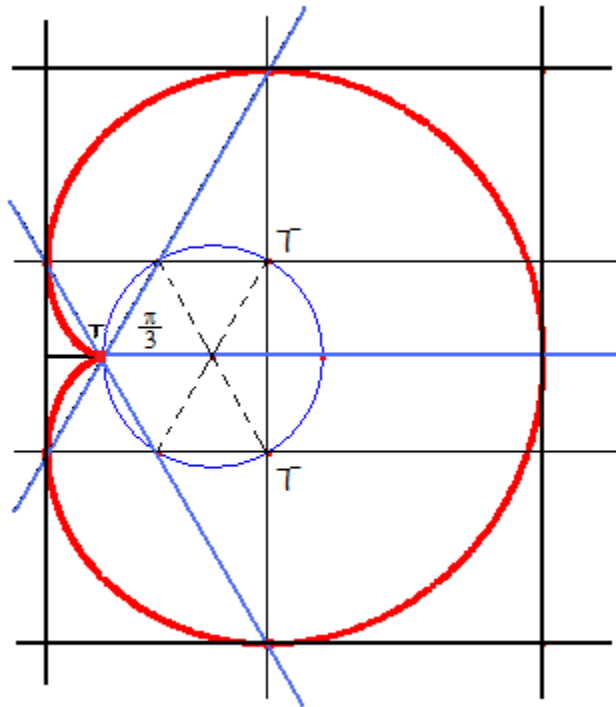


fig. 256 - Zwikker

Queste tre rette intersecano il cerchio fisso in tre punti i cui archi hanno ampiezza $\frac{2}{3}\pi$.

Ogni punto T diametralmente opposto ad uno di questi (nel cerchio fisso) è punto di intersezione di una coppia ortogonale di normali alla cardioide in punti di una stessa retta (estremi di una corda per F).

Ascissa curvilinea e curvatura

$$z = z(t) ; ds = |\dot{z}|dt ; \dot{z} = |\dot{z}| \exp j\tau ; \tau = \text{Arg } \dot{z}$$

$$\frac{\dot{z}}{\dot{z}^*} = \exp 2j\tau \rightsquigarrow \tau = \frac{1}{2j} \log \frac{\dot{z}}{\dot{z}^*}$$

Dalla figura possiamo definire il raggio di curvatura con l'identità $ds = \rho d\tau$

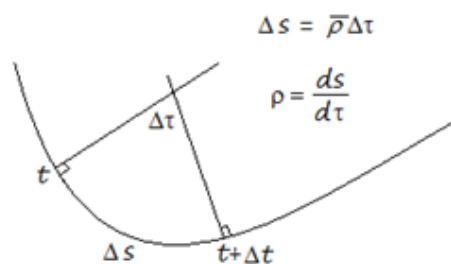


fig. 30

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\tau}{dt}} \quad \text{con} \quad \frac{1}{\rho} = \text{curvatura}$$

Vediamo per la cardioide $r = p(1 + \cos \vartheta)$

$$z = r \exp j\vartheta \rightsquigarrow \dot{z} = \frac{dz}{d\vartheta} = \dot{r} \exp j\vartheta + rj \exp j\vartheta$$

$$|\dot{z}| = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\vartheta \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$\begin{aligned} s = s(\vartheta) - s(0) &= \int_0^\vartheta (p^2(1 + \cos \vartheta)^2 + p^2 \sin^2 \vartheta)^{\frac{1}{2}} d\vartheta = \\ &= p \int_0^\vartheta \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \vartheta} d\vartheta = 2p \int_0^\vartheta \cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta = 4p \sin \frac{\vartheta}{2} \end{aligned}$$

Per la curvatura cerchiamo la formula generale

$$\tau = \frac{1}{2j} \log \frac{\dot{z}}{\dot{z}^*} \rightsquigarrow \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2j} \frac{\dot{z}^* \ddot{z} \dot{z}^* - \ddot{z}^* \dot{z}}{(\dot{z}^*)^2}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{|\dot{z}|^2} \text{Im} \dot{z}^* \ddot{z} = \frac{1}{|\dot{z}|^2} \dot{z} \times \ddot{z}$$

Nel nostro caso

$$\dot{z} = \dot{r} \exp j\vartheta + rj \exp j\vartheta$$

$$|\dot{z}|^2 = r^2 + \dot{r}^2 = 4 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot p^2$$

$$\ddot{z} = \ddot{r} \exp j\vartheta + 2j\dot{r} \exp j\vartheta - r \exp j\vartheta$$

$$\text{Im} \dot{z}^* \ddot{z} = -r\ddot{r} + r^2 + 2\dot{r}^2$$

Da cui

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d\tau}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\text{Im} \dot{z}^* \ddot{z}}{|\dot{z}|^3} = \frac{-r\ddot{r} + r^2 + 2\dot{r}^2}{8p^3 \cos^3 \frac{\vartheta}{2}}$$

$$r = p(1 + \cos \vartheta) \rightsquigarrow \dot{r} = -p \sin \vartheta \rightsquigarrow \ddot{r} = -p \cos \vartheta$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \dot{z}^* \ddot{z} &= p^2 [\cos \vartheta + \cos^2 \vartheta + 1 + \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta + 2 \sin^2 \vartheta] = \\ &= p^2 \cdot 3 \cdot (1 + \cos \vartheta) = 6p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \end{aligned}$$

Da cui

$$\rho = \frac{4}{3} p \cos \frac{\vartheta}{2}$$

$$s = 4p \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$s^2 + 9\rho^2 = 16p^2$$

Nota

Se poniamo $v = |\dot{z}|$ abbiamo

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

E derivando l'espressione polare $\dot{z} = v \cdot \exp j\tau$ otteniamo

$$\ddot{z} = \dot{v}(\exp j\tau) + vj(\exp j\tau) \frac{d\tau}{dt}$$

Ovvero

$$\ddot{z} = \dot{v} \exp j\tau + \frac{v^2}{\rho} j \exp j\tau$$

La cardioide come caustica

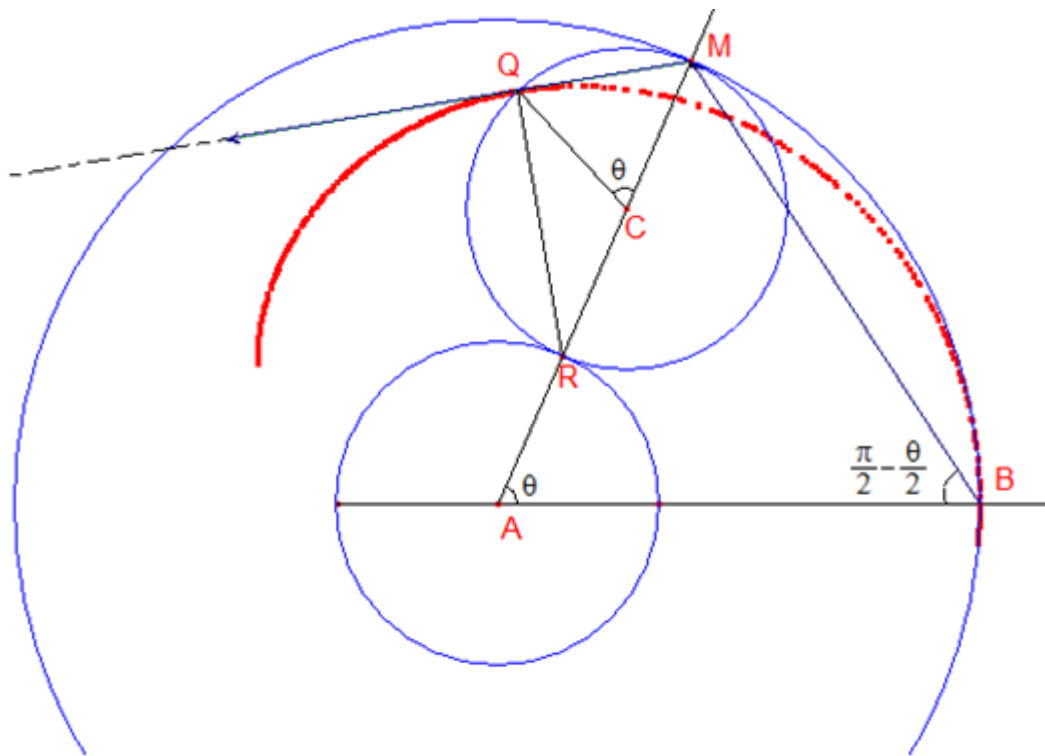


fig. 31

Un raggio luminoso emesso da una sorgente in B che colpisca il cerchio di centro A e raggio triplo ($= \frac{3}{2}p$) si riflette nella semiretta MQ, perché entrambi formano angoli pari a $\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}$ con la normale AM al cerchio.

Poiché MQ è tangente alla cardioide in Q si conclude che la cardioide è una caustica, curva involuppo dei raggi riflessi da un cerchio di raggio triplo rispetto alla rotella ed emessi da una sorgente luminosa posta sul cerchio.

Si osservi che

$$BM = 3p \sin \frac{\vartheta}{2} ; \quad MQ = p \sin \frac{\vartheta}{2}$$

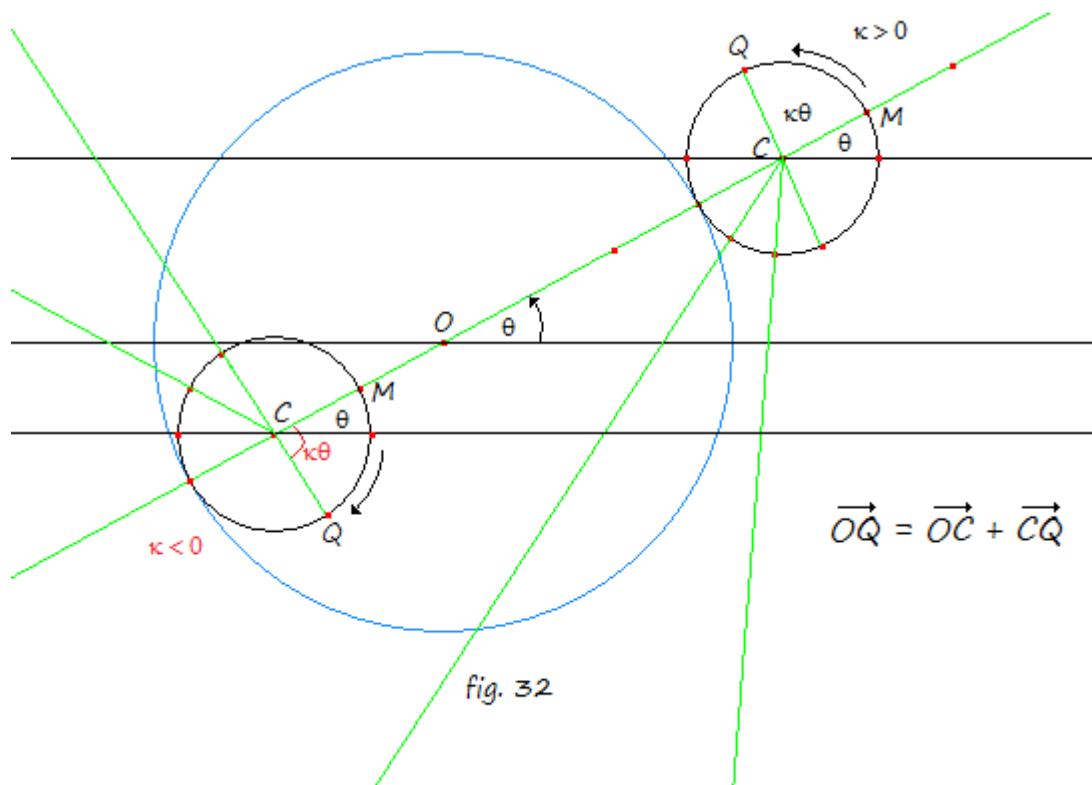
$$BM + MQ = 4p \sin \frac{\vartheta}{2} = s(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} |\dot{z}| d\vartheta$$

LE CICLOIDI

Se scegliamo il raggio della rotella pari a r e il raggio del cerchio fisso pari a kr otteniamo una cicloide qualsiasi che parametrizzata con l'argomento ϑ descritto dal punto di tangenza rispetto al centro del cerchio fisso e tangenza iniziale $kr + j0$ ha equazione

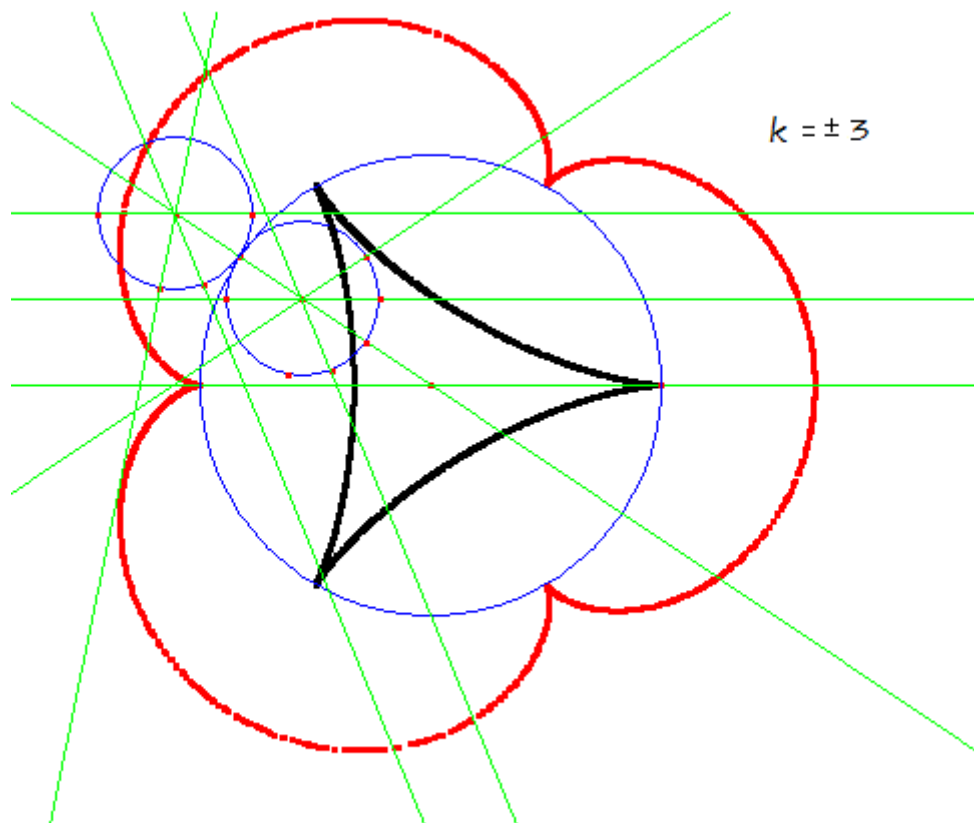
$$z = (k + 1)r \exp j\vartheta + r \exp j(k + 1)\vartheta$$

dove l'origine O è il centro del cerchio fisso e il punto tracciante Q passa per $(k + 2)r + j0$



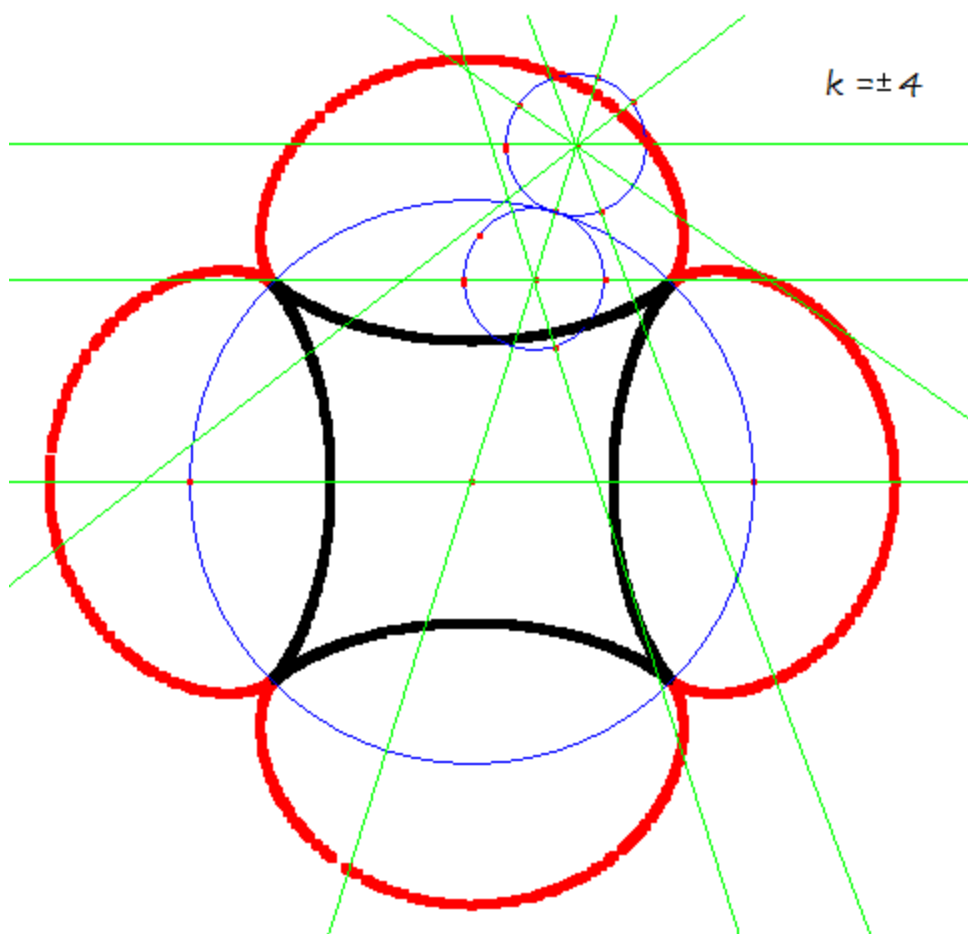
$k = 1$	Cardioide	$\ell = 16r$
$k = 2$	Nefroide	$\ell = 12r$
$k = \infty$	Cicloide normale $z = r(\vartheta + j \exp j\vartheta)$	$\ell = 8r$
$k = -2$	Diametro verticale (Copernico, Cardano)	$\ell = 4r$
$k = -3$	Deltoide di Steiner	$\ell = \frac{16}{3}r$
$k = -4$	Asteroide	$\ell = 6r$
$k = -\frac{5}{2}$	Astropecten	$\ell = \frac{24}{5}r$
$k = k$	Cicloide	$\ell = 8\frac{k+1}{k}r$

- .- se $k > 0$ i cerchi sono tangenti esternamente e abbiamo le epicicloidi;
- .- se $k < 0$ i cerchi sono tangenti internamente e abbiamo le ipocicloidi;
- .- se $-1 < k < 0$ abbiamo una pericicloide (hula-hoop), che è anche epicicloide ponendo $\vartheta' = (k + 1)\vartheta$ e $k' = -k/(k + 1)$.



$k = \pm 3$

fig. 33



$k = \pm 4$

fig. 34

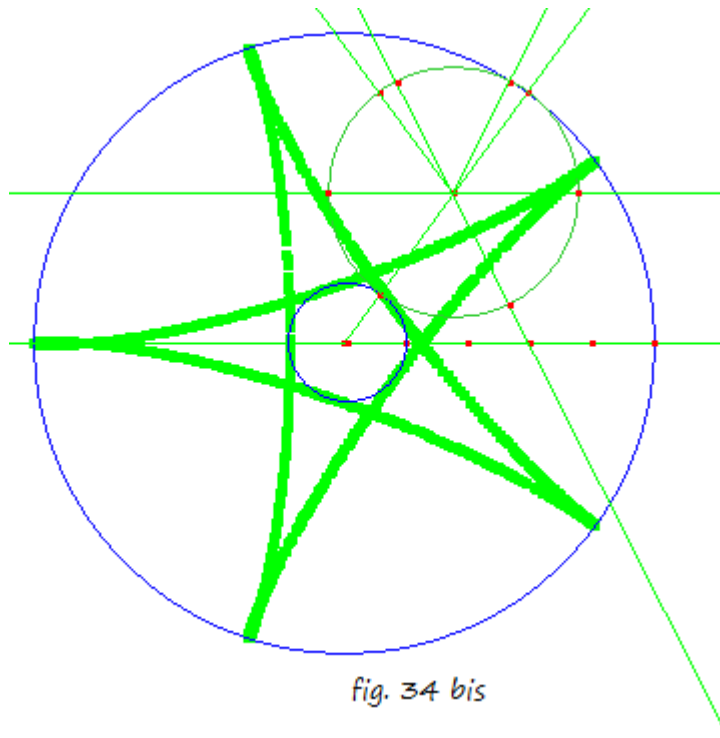


fig. 34 bis

Si può dimostrare che la retta MQ tangente alla cicloide marca le posizioni successive di un diametro della ruota di raggio $2r$ che rotola tangente attorno al cerchio fisso in sincronia periferica con la rotella.

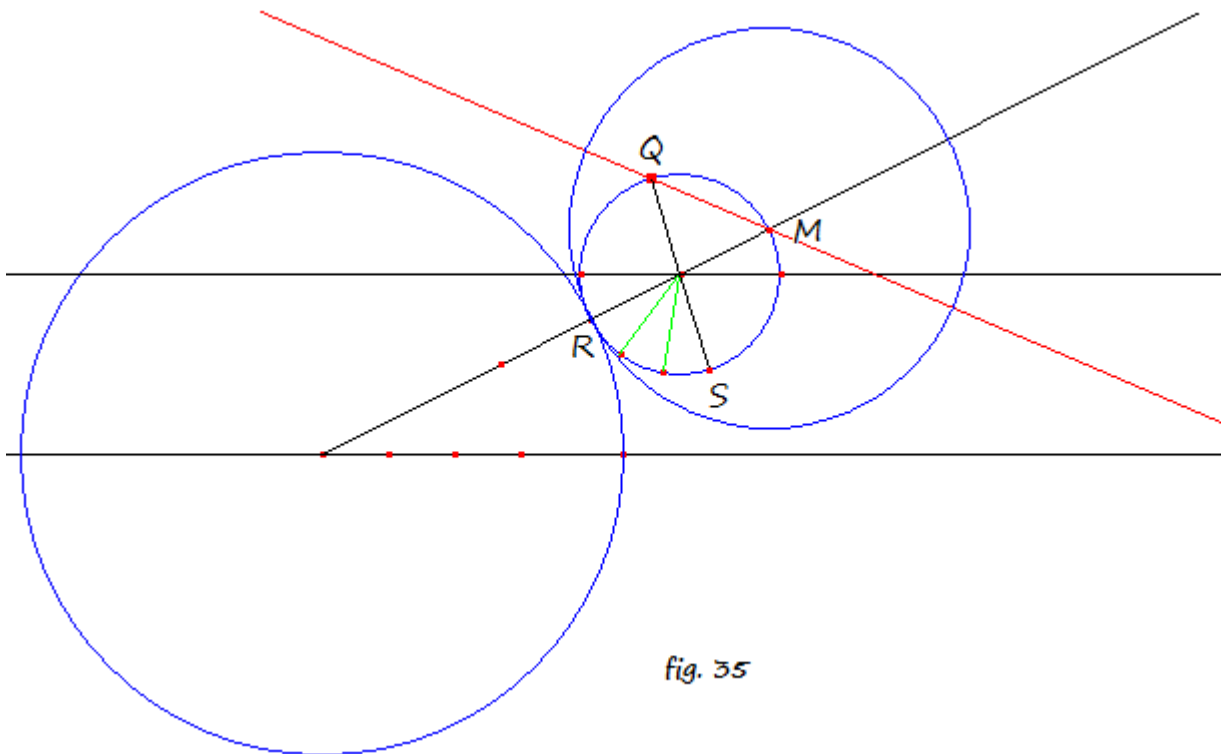


fig. 35

Calcolando per le cicloidi i vettori \dot{z} e \ddot{z} si ottengono le seguenti formule per ascissa curvilinea e raggio di curvatura

$$s = 4 \frac{k+1}{k} r \sin\left(\frac{1}{2} k\vartheta\right)$$

$$\rho = 4 \frac{k+1}{k+2} r \cos\left(\frac{1}{2} k\vartheta\right)$$

per cui

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{b^2} = 1 \quad \text{per opportuni } a, b$$

inoltre il raggio di curvatura è tagliato dal cerchio fisso in rapporto

$$\frac{k+2}{k}$$

Si dimostra che l'evolvente di una cicloide si ottiene ruotandola di mezzo arco e applicando una omotetia di rapporto

$$\frac{k}{k+2}$$

Per la cicloide di Galileo si ha

$$z = r(\vartheta + j \exp j\vartheta)$$

$$s = \int_{\pi}^{\vartheta} |\dot{z}| d\vartheta = 4r \left| \cos \frac{\vartheta}{2} \right|$$

$$\rho = 4r \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$\rho^2 + s^2 = 16r^2$$

Se il punto tracciante solidale con la rotella non sta sulla periferia della rotella ma ad una distanza h (con segno) dal centro della rotella, otteniamo una trocoide

$$z = (k+1)r \exp j\vartheta + h \exp j(k+1)\vartheta$$

Se $k = 1$, ponendo $p = 2h$ e $\ell = 2r$ riconosciamo la lumaca

$$z = \ell \exp j\vartheta + \frac{p}{2} \exp j2\vartheta$$

Che riferita al polo $F = -\frac{p}{2} + j0$ diventa

$$z = (p \cos \vartheta + \ell) \exp j\vartheta$$

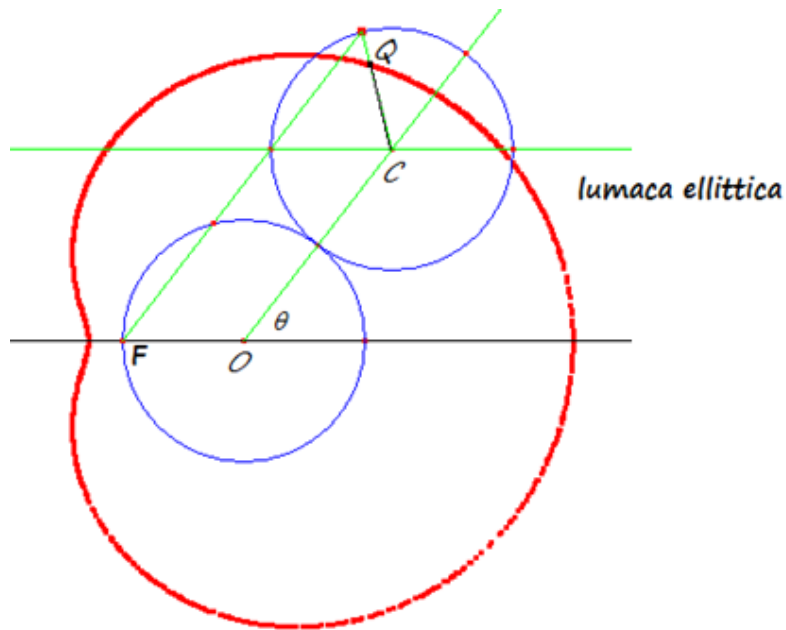


fig. 36

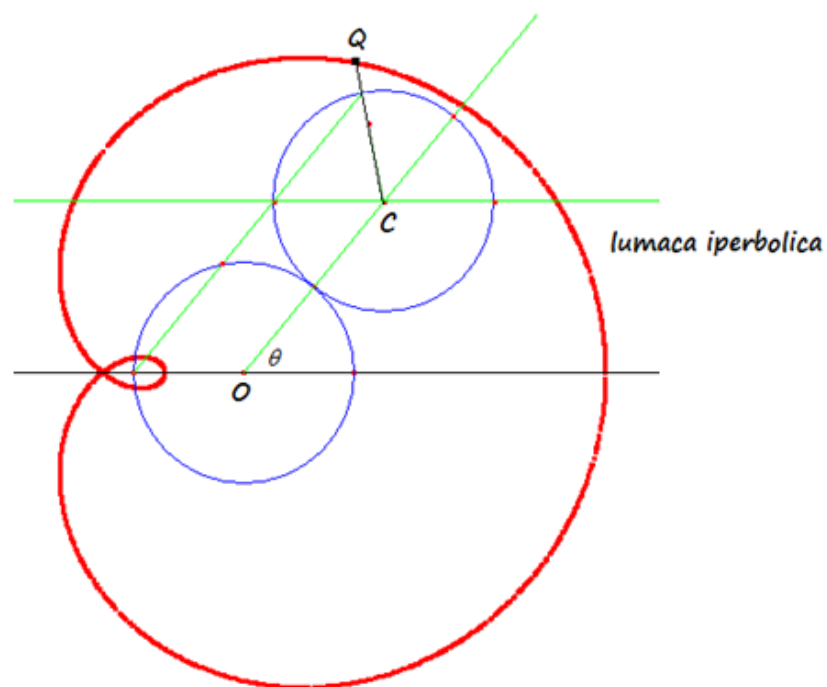


fig. 37

$$\text{raggio circoli} = \frac{\ell}{2} ; CQ = \frac{p}{2}$$

Dall'equazione dell'ellisse tramite il correggiato

$$z = \frac{a+b}{2} \exp j\vartheta + \frac{a-b}{2} \exp(-j\vartheta)$$

Si riconosce che l'ellisse è una trocoide con $k = -2$, raggio del cerchio fisso $4r = a + b$, raggio della rotella tangente internamente uguale $2r = \frac{a+b}{2}$ distanza del punto tracciante dal centro della rotella uguale $h = \frac{a-b}{2}$ con $-2r \leq h \leq 2r$.

Per ogni valore di h otteniamo una ellisse

$$z = f(h, \vartheta) = 2r \exp j\vartheta + h \exp(-j\vartheta)$$

Per ogni valore di ϑ otteniamo invece una retta, su cui gli assi cartesiani intercettano un segmento di lunghezza costante $4r$ (scala che scivola = un diametro della rotella).

Otteniamo ora la curva involuppo esplicitando l'equazione

$$\text{Im} \left(\frac{\partial f}{\partial h} \right)^* \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \exp(-j\vartheta) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = j2r \exp j\vartheta - jh \exp(-j\vartheta)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial h} \right)^* \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) = j2r \exp j2\vartheta - jh = j(2r \cos 2\vartheta - h) - 2r \sin 2\vartheta$$

Da cui $h = 2r \cos 2\vartheta$ e sostituendo in $z = f(h, \vartheta)$ otteniamo la curva involuppo

$$z = 2r \exp j\vartheta + 2r \cos 2\vartheta \exp(-j\vartheta)$$

Cioè

$$z = 3r \exp j\vartheta + r \exp j(-3\vartheta)$$

che è l'astroide ottenuta con $k = -4$ e rotella di raggio r , ruotata di mezzo arco, cioè con le cuspidi sugli assi.

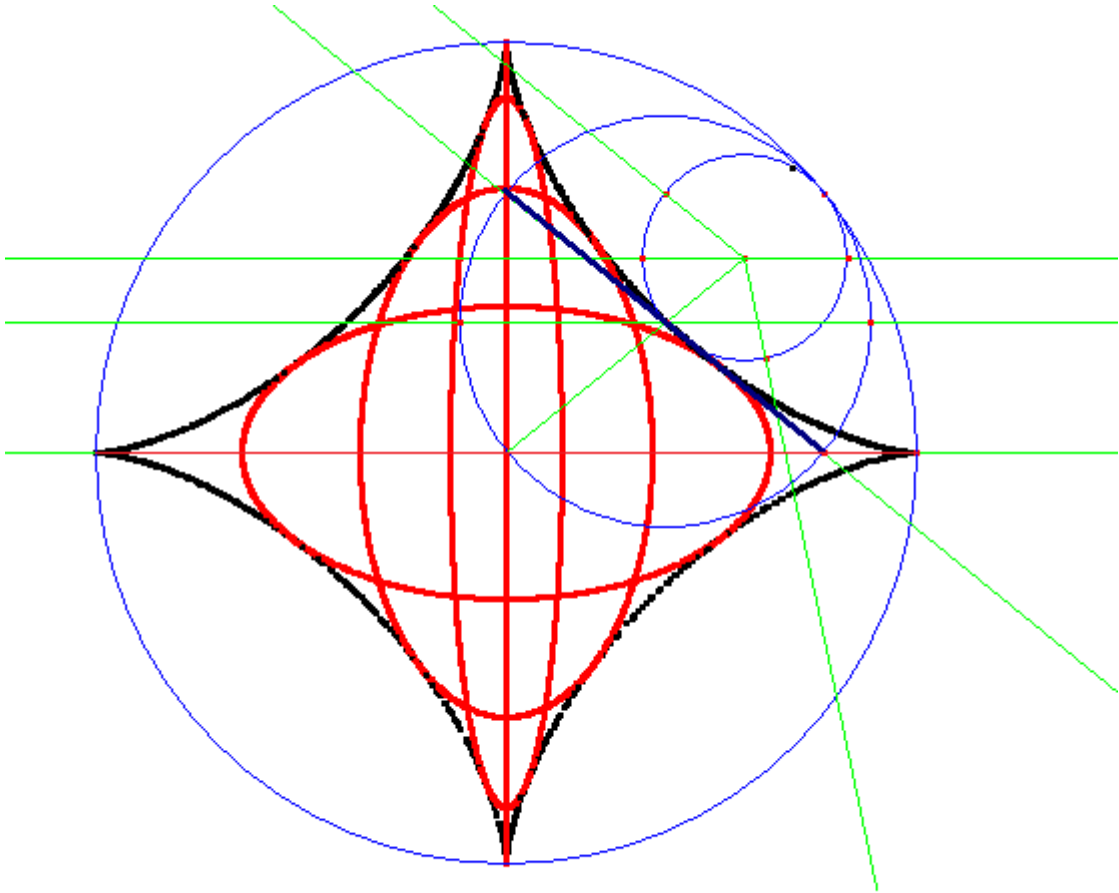


fig. *

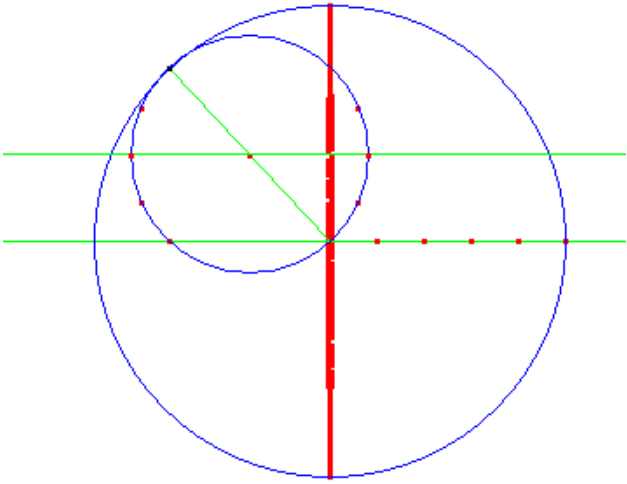


fig. 37 a

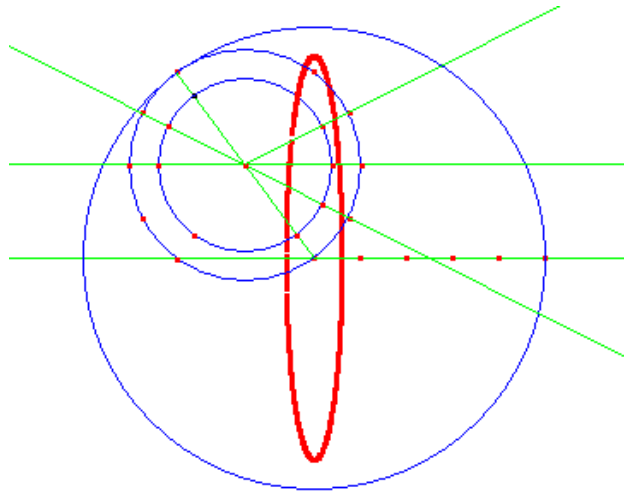


fig. 37 b

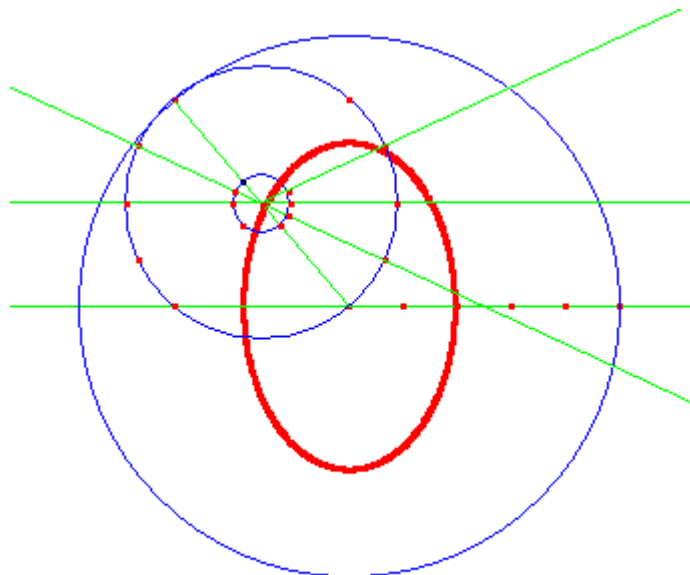


fig. 37 c

È chiaro che ogni trocoide può scriversi come somma di due vettori che ruotano con rapporto costante tra gli argomenti (parallelogramma articolato):

$$z = c_1 \exp j\vartheta + c_2 \exp j(k + 1)\vartheta$$

Oppure come prodotto di un moto circolare attorno a C a cui viene applicato un moto rotatorio attorno ad O (epiciclo-deferente). Possiamo scrivere:

$$z = f(\vartheta) = (\exp j\vartheta)(c_1 + c_2 \exp jk\vartheta)$$

Poiché $\exp jk\vartheta$ è periodica di periodo $2\pi/k$ si ha

$$f\left(\vartheta + \frac{2\pi}{k}\right) = \left(\exp j \frac{2\pi}{k}\right) f(\vartheta)$$

Pertanto gli archi descritti da una rotazione completa del circolo del secondo fattore si ottengono uno dall'altro applicando rotazioni successive di argomento $2\pi/k$.

Fissato un valore $\tilde{\vartheta}$ e il punto $\tilde{z} = f(\tilde{\vartheta})$, gli estremi degli archi completi partendo da \tilde{z} sono costituiti dalla successione

$$z(n) = f\left(\tilde{\vartheta} + n \frac{2\pi}{k}\right) = \left(\exp j n \frac{2\pi}{k}\right) \tilde{z} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

- se $k = \frac{a}{b}$ razionale, allora $\exp j \left(\frac{b}{a} 2\pi n\right)$ ha periodo $a = b \cdot \frac{a}{b}$ e quindi l'arco completo di trocoide si ripete a volte e ricomincia da capo dopo che C ha fatto b giri attorno ad O .
- se k è irrazionale, allora $\frac{2\pi}{k} \mathbb{N} + 2\pi \mathbb{Z}$ semigruppò additivo denso di \mathbb{R} e quindi il semigruppò moltiplicativo del circolo unitario

$$\left\{ \exp j n \frac{2\pi}{k} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

è denso nel circolo.

Di conseguenza la successione

$$\{z(n) : n = 1, 2, 3, \dots\}$$

è densa nella circonferenza di centro O passante per \tilde{z} .

Pertanto il futuro dell'orbita rappresenta un sottoinsieme denso della corona circolare da esso occupata.

Nella teoria di Ipparco su epicicli e deferenti, se ω_1 è la velocità angolare dell'epiciclo sul deferente e $-\omega_2$ è la velocità angolare della Luna sull'epiciclo, si ottiene la trocoide

$$z = R \exp(j\omega_1 t) + r \exp(j(\omega_1 - \omega_2)t)$$

In cui

$$k = -\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Invece Copernico introduce per la Luna una trocoide del secondo ordine:

$$z = R \cdot \exp j\omega_1 t + r \cdot \exp j(\omega_1 - \omega_2)t + s \cdot \exp j(3\omega_1 - \omega_2) t$$

Si chiama ipertrocoide una combinazione infinita di moti circolari uniformi, come per esempio

$$z = \exp j\vartheta + \frac{1}{3} \exp j3\vartheta + \frac{1}{5} \exp j5\vartheta + \dots = \frac{1}{2} \log j \cotan \frac{\vartheta}{2}$$

Un classico esempio in Analisi mostra che effettivamente la somma della serie vale

$$z = f(\vartheta) = \frac{1}{2} \log j \cotan \frac{\vartheta}{2}$$

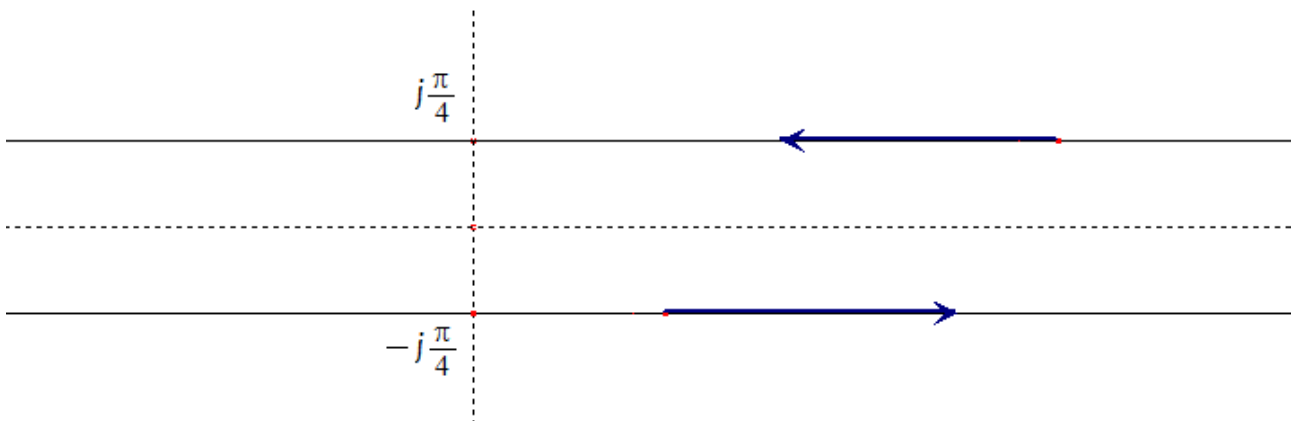
Ove log è il logaritmo principale con argomento compreso tra $-\pi$ e π .

Ponendo

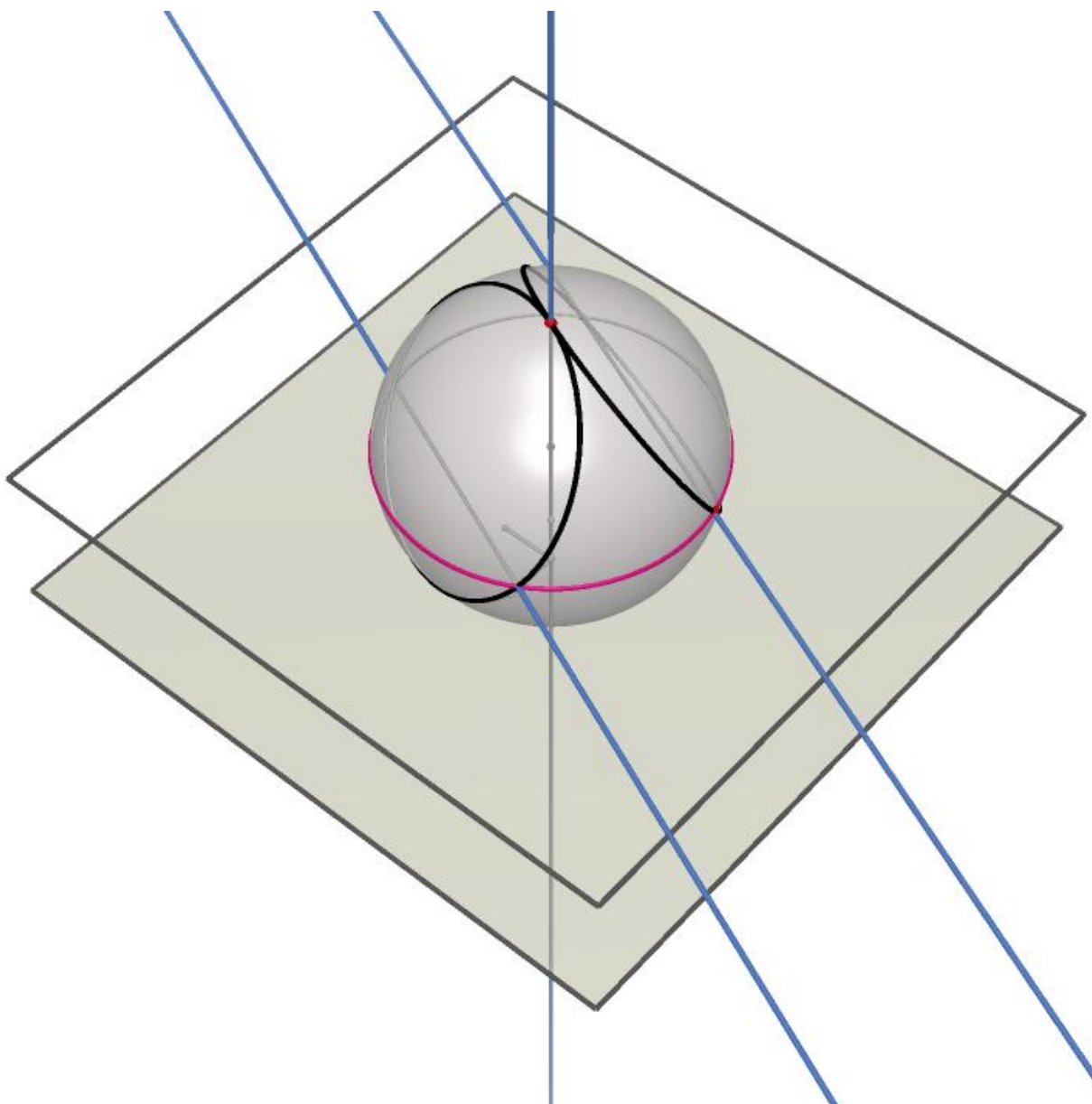
$$t = \frac{1}{2} \log \left| \cotan \frac{\vartheta}{2} \right|$$

Si ottiene la rappresentazione

$$z = \begin{cases} t - j\frac{\pi}{4} & \text{per } -\pi < \vartheta < 0 \\ t + j\frac{\pi}{4} & \text{per } 0 < \vartheta < \pi \end{cases}$$



Nel piano ampliato la curva $z = f(\vartheta)$ copre infinite volte in senso antiorario le due rette attaccate all'infinito ove ogni volta il versore tangente ruota di mezzo giro. (sulla sfera di Riemann si pensi a due cerchi tangenti al polo Nord e simmetrici rispetto al meridiano di tangenza)



Caspar Wessel : << Om directionens analytiske betegning, ...>> (1797 – 99)

Cornelis Zwikker : << The Advanced Geometry of Plane Curves and their Applications>> (1963)

Gino Loria :<< Curve piane speciali algebriche e trascendenti>> Hoepli, 1930

Gino Loria ebbe molto a cuore l'insegnamento della Matematica, a cui dedicò una cura particolare per tutta la vita. Riportiamo alcuni suoi interventi:

<< La Storia della Matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento Secondario e l'insegnamento Universitario>>, (1899);

<< La Scuola Media e la sua attuale crisi di sviluppo >>, (1909);

<< Rapporto generale sulla preparazione teorica e pratica dei Professori di Matematica dell'insegnamento Secondario>>, (1933)