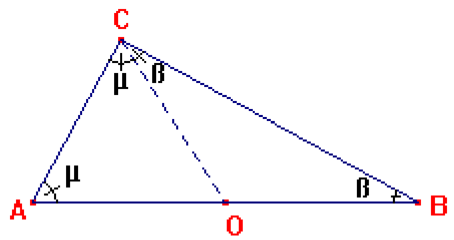
15^a GARA MATEMATICA "Città di Padova" 25 marzo 2000
SOLUZIONI

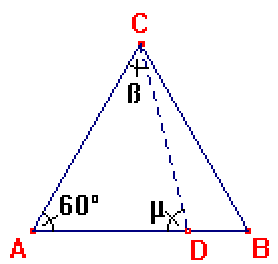
1.- La linea è divisa in 12 tratti dalle 11 fermate intermedie e misura dunque
m 500 x 12 = m 6.000; perciò dopo aver percorso Km 12 la vettura ritorna al capolinea A.
46,7 : 12 = 3 col resto di 10,7 , perciò dopo Km 46,7 la vettura deve percorrere ancora Km (12 - 10.7) = Km 1,3 per ritornare in A e quindi si trova a Km 1.3 da A, tra la seconda stazione (a 1 Km da A) e la terza.
Ogni 12 Km passa 1 volta per B e 2 volte per ogni stazione intermedia,
perciò dopo 12 x 3 + 10,7 Km la vettura è passata 3 +1 = 4 volte per il capolinea B, 3 x 2 + 1 = 7 volte per la n-sima stazione intermedia se $n < 3$,
3 x 2 + 2 = 8 volte per la n-sima stazione intermedia se $n \geq 3$.

2.- A. Vero ; infatti, prendiamo un triangolo rettangolo ABC (vedi figura); si ha $\mu + \beta = 90°$.



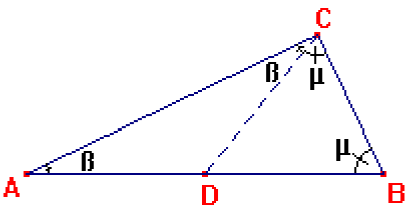
Divido allora l'angolo retto (in C) in due angoli di misure, rispettivamente, μ e β e vedo che ABC è biisoscele
.

D. Falso ; infatti se spezzo un triangolo (vedi figura) equilatero in due triangoli mediante un segmento che abbia un estremo p.e. in C , vedo che nessuno dei due triangoli che ottengo è isoscele

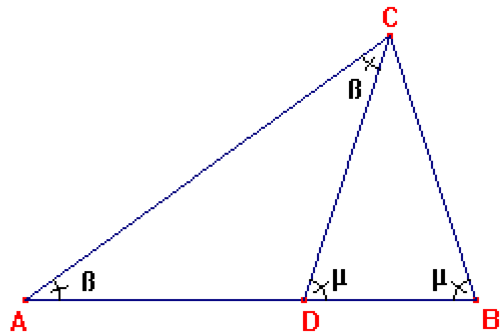


poiché essendo $\mu + \beta + 60° = 180°$ risulta $\mu + \beta = 120°$, ed essendo $\beta < 60°$, si ha $\mu > 60°$ .Dunque i tre angoli di ADC sono a due a due diversi.
.

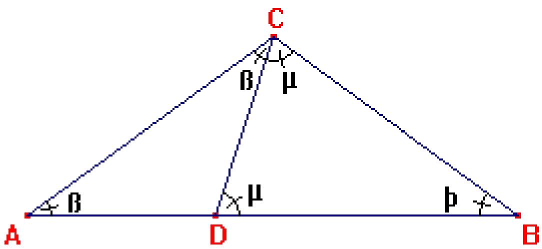
C. Falso (vedasi D).
Per rispondere ora all'ultima domanda, consideriamo dapprima gli schemi di suddivisione di un triangolo biisoscele :



a)



b)



c)

Non ce ne sono altri poiché dei due angoli in D uno è $\geq 90°$ e quindi il relativo triangolo può essere isoscele solo se gli angoli uguali sono gli altri due. Nel caso a) $\beta + \mu + \beta + \mu = 180°$, quindi $\beta + \mu = 90°$: è il caso del triangolo rettangolo (vedi A) , questo è isoscele se $\beta = \mu = 45°$.
Nel caso b) $\mu = 2\beta$ e il triangolo è isoscele se e solo se l'angolo in C è $= \mu$, da cui
$2\mu + \beta = 180°$, $5\beta = 180°$, $\beta = 36°$, $\mu = 72°$.
Nel caso c) $\mu = 2\beta$ e l'angolo þ = angolo in C $= \mu + \beta$, da cui $2(\mu + \beta) + \beta = 180°$,
$7\beta = 180°$;
oppure þ $= \beta$, e $\beta + \beta + \delta +$ þ $= 180°$, $5\beta = 180°$, $\beta = 36°$.
Abbiamo cosi' verificato anche che la B è falsa.

3.- Se il numero primo p ha due gemelli, questi sono p-2 e p+2. Consideriamo allora i 5 numeri successivi

p-2 ; p-1; p; p+1; p+2;

con p , p-2 e p+2 primi.
Ora, di tre numeri interi successivi uno è divisibile per 3 . Allora uno dei tre numeri p-2 , p-1 , p è divisibile per 3 :

(i) se p-2 è divisibile per 3 , risulta = 3 poiché è primo ; in questo caso p = 5 , p+2 = 7 che sono primi ; siamo nel caso del 5 con i due gemelli 3 e 7;

(ii) se p-1 fosse divisibile per 3 , lo sarebbe anche p-1+3 = p+2 , e si avrebbe p+2 = 3 e p-2 = -1 che non è un numero naturale , e ciò non è possibile

(iii) se p fosse divisibile per 3 , e quindi = 3 perché primo, si avrebbe p-2 = 1 , ma il numero 1 (come si sa) non è un numero primo ; anche questo caso non è possibile

L'unico caso possibile è perciò quello della terna 3 , 5 , 7 .

4.- Siccome ognuno dei quattro lati del rettangolo contiene uno dei vertici del triangolo, ci sarà uno dei vertici che appartiene a due lati del rettangolo ; sia esso A. Disegnato il triangolo, per costruire uno dei rettangoli circoscritti si consideri un angolo retto ab di vertice A che contiene il triangolo e si traccino le due rette a' , b' parallele a b ed a per B e C , rispettivamente (vedi figura 1).

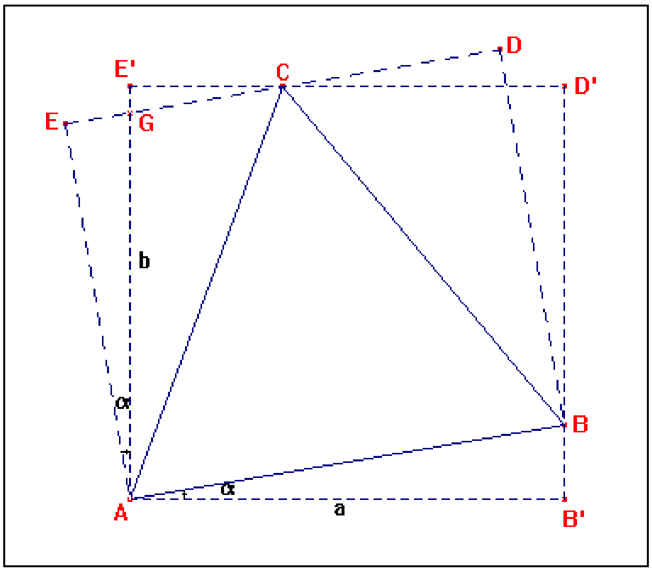
Si intuisce che, per ragioni di simmetria, il rettangolo ABDE è di area minima , tra quelli circoscritti, e il quadrato AFBE (vedi la figura successiva) e' di area massima.
Infatti confrontando ABDE con un altro rettangolo circoscritto, p.e. AB'D'E' si ha :
il triangolo CD'B ha area maggiore di quella di CDB in quanto D' è più vicino che D al punto medio del semicircolo CDD'B, inoltre AB'B > AEG (i due triangoli sono simili e l'ipotenusa del primo AB = AC > AE' > AE = ipotenusa del secondo), inoltre ACE' $\supset$ ACG , dunque AB'B+AE'C>AGE+AGC = AEC, risulta quindi AB'D'E'>ABDE.
Confrontiamo ora il quadrato AFBE con un altro rettangolo circoscritto, p.e. AB'D'E' ; si ha : CDB > CD'B (il primo ha altezza = l/2, che è maggiore di quella del secondo), inoltre i quattro triangoli rettangoli AFH , AGE' , CEG , BB'H sono simili , e risulta
AFH > AGE' poiché FA=AE>AG>AE' , CEG > BB'H poiché CE=FB>HB>BB'.
Si ha pertanto AFH + CEG > AGE'+ BB'H e quindi il quadrato ha area maggiore del rettangolo.

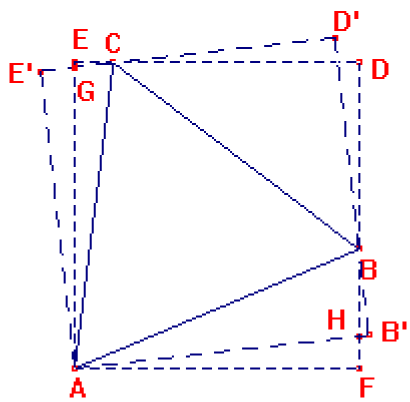
C'è anche un modo più sbrigativo per rispondere a questo quesito, usando però un po' di trigonometria.
Con riferimento alla figura 1 , si ha a = l cos þ ; b = l cos(30- þ) , e dunque l'area del rettangolo circoscritto AB'D'E' = l cos þ cos(30- þ) =

(siccome $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$)

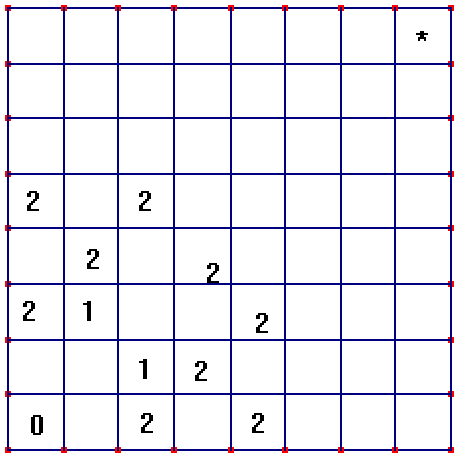
= 1/2 l (cos 30 + cos(2 þ -30)).

L'area sarà massima o minima quando lo sarà cos(2þ-30) , tenuto conto che l'angolo þ varia tra 0 e 30 . Ora il massimo di cos(2þ-30) è 1 e corrisponde a 2 þ -30 = 0 , cioè þ = 15 , e il minimo , visto che 2 þ -30 varia tra -30 e 30 , si ottiene per 2 þ -30 = -30 , cioè per þ = 0 .



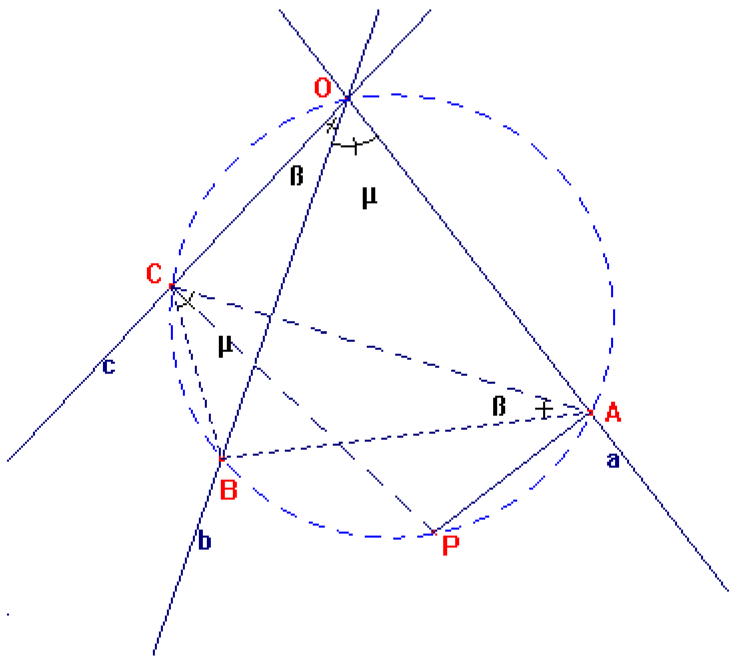


5.- Se inizialmente il cavallo si trova nella casella d'angolo contrassegnata con lo 0, con una sola mossa può arrivare soltanto in una delle due caselle contrassegnate con

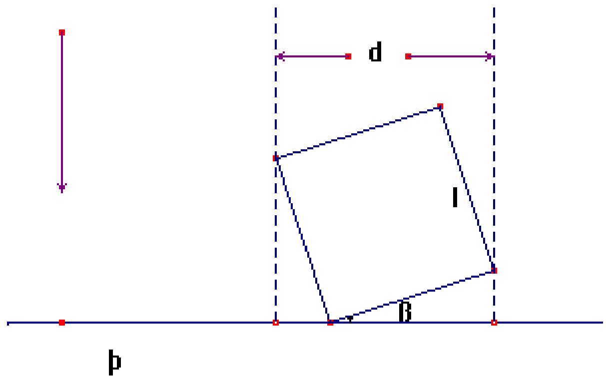


numero 1 ; con due mosse in una delle caselle dove c'è il 2 , ecc. Completando lo schema si vede che per arrivare alla casella con la stella occorrono 6 mosse, mentre in tutte le altre ci si può arrivare con meno di 6 mosse : la risposta è 6.

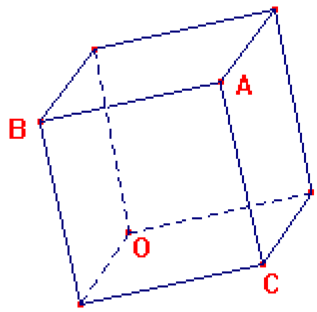
6.- Consideriamo il circolo di diametro OP. Siccome OAP = OBP = OCP = 90° i punti A, B, C appartengono a tale circolo, sicché (vedi la figura) α = COB = CAB (angoli alla circonferenza che insistono sul medesimo arco CB) e analogamente γ = BOA = BCA.
Ma lo stesso si può dire se invece che dal punto P si parte da un altro punto Q : α = C'A'B' , γ = B'C'A'. I due triangoli, avendo due coppie di angoli uguali CAB = C'A'B' , BCA = B'C'A' sono dunque simili.



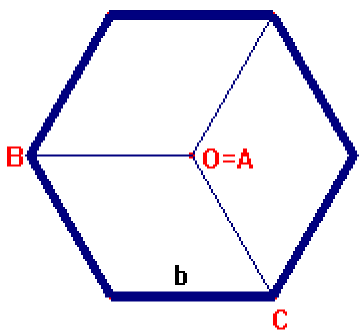
7.- Per fissare le idee pensiamo di appoggiare il cubo sul piano þ ortogonale ai raggi del Sole, traslandolo nella direzione dei raggi, sicché l'ombra non cambia.
Se il cubo ha tutta una faccia F sul piano π, il Sole vede solo la faccia opposta del cubo e l'ombra è un quadrato di lato l .



Se invece il cubo si appoggia al piano π solo lungo uno spigolo s, allora il Sole vede due facce del cubo, e l'ombra risulta un rettangolo di cui un lato misura l e l'altro d, con $l < d \leq l\sqrt{2}$ (vedi figura), in particolare $d = l\sqrt{2}$ quando $\alpha = 45$.



Se infine il cubo si appoggia al piano su di un solo punto O (un suo vertice), allora il Sole vede tre facce del cubo e l'ombra è un esagono (nella figura il piano π è quello del foglio).
Nel caso particolare in cui la diagonale OA del cubo sia parallela ai raggi solari l'ombra di A coincide con O e l'esagono risulta regolare. In questo caso il segmento BC è parallelo a π ed ha quindi lunghezza uguale alla sua ombra su π . Ora $BC = l\sqrt{2} = b\sqrt{3}$, per cui il lato b dell'esagono è uguale a $l\sqrt{2}/\sqrt{3}$.



8.- Se risulta $x^2 + ax + b = (ex + f)(gx + h)$, con e, f, g, h reali, il numero reale $-f/e$ è soluzione dell'equazione $x^2 + ax + b= 0$; e viceversa se un numero reale q è soluzione dell'equazione $x^2 + ax + b = 0$, il polinomio $x - q$ è un fattore del primo membro, e risulta, per il teorema di Ruffini,

$$x^2 + ax + b = (x- q)(x+a+q) \ .$$

Quindi dire che il polinomio a coefficienti reali $x^2 + ax + b$ è irriducibile è come dire che non ha radici (reali), è come dire che la parabola di equazione $y = x^2 + ax + b$ non interseca l'asse x , è come dire che la funzione $f(x) = x^2 + ax + b$ è sempre positiva. Ma allora la risposta è sì poiché la somma di due funzioni positive è positiva.