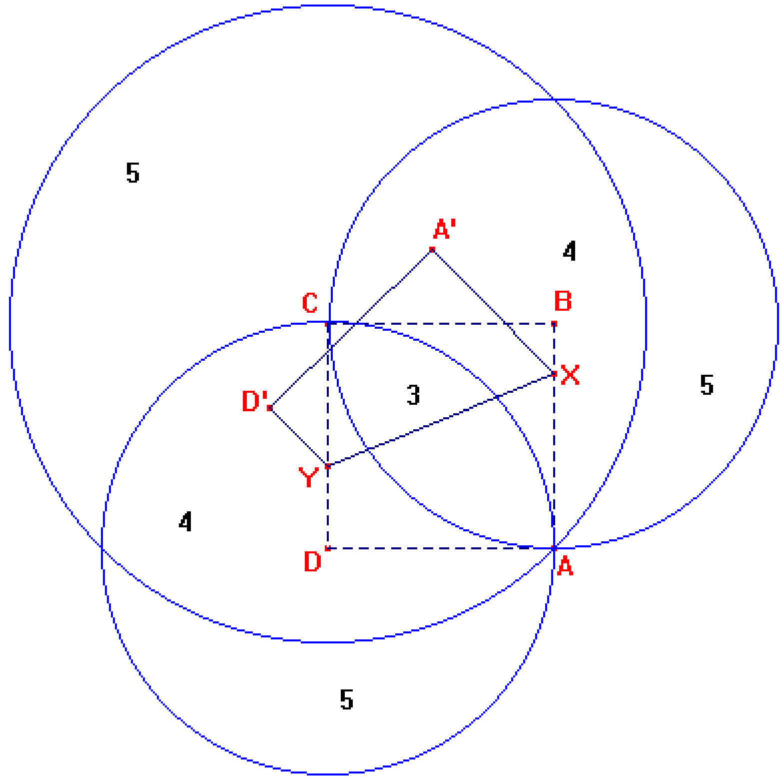
Soluzioni della 16ª Gara Matematica "Città di Padova"   24 Marzo 2001



1.- La piega è l'asse del segmento AA' e interseca due lati distinti del quadrato, nei punti X, Y. Se X (o Y) appartiene al lato AB (oppure AD) allora A' è contenuto nel cerchio che passa per A e ha centro in X (rispettivamente Y) e quindi, a maggior ragione, è contenuto nel cerchio che passa per A e ha centro in B (rispettivamente D). In questo caso il vertice B (rispettivamente D) non viene "mosso" dalla piega. Se X (o Y) appartiene al lato BC (oppure DC) allora A' è contenuto nel cerchio passante per A di centro C e il vertice B (rispettivamente D) viene "mosso".
Dopo la piega, si vede un triangolo (nero) se l'unico vertice mosso è A, quindi se A' sta in tutti e tre i cerchi.
Si vede un quadrangolo se si muovono i vertici A e B ma non C e D, oppure A e D ma non B e C , quindi se A' è contenuto in due ma non tre dei cerchi precedenti.
Infine si vede un pentagono se si muovono tre dei vertici, ma non il quarto, e dunque se A' è contenuto in uno solo dei tre cerchi.

2.- Dividiamo il polinomio P(x) per il polinomio x^2-3 ; otterremo un quoziente Q(x) ed un resto R(x) [R(x) = 0 , oppure di grado < 2 , cioè R(x) = ax + b] e si avrà

$$P(x) = (x^2-3)\,Q(x) + ax + b\ .$$

Quando si fa la divisione tra due polinomi si opera sui loro coefficienti solo con operazioni di quoziente, prodotto, somma e differenza (nel nostro caso, avendo il divisore coefficiente direttivo = 1 , solo con prodotti, somme e differenze). Ne consegue che, essendo P(x) e x^2-3 polinomi a coefficienti razionali, anche Q(x) e R(x) saranno a coefficienti razionali; in particolare a e b saranno numeri razionali.
Siccome P(x) è divisibile per $x+\sqrt{3}$, $P(-\sqrt{3}) = 0$. Si ha allora

$0 = P(-\sqrt{3}) = (3-3)\,Q(-\sqrt{3}) - a\sqrt{3} + b$, e quindi $-a\sqrt{3} + b = 0$.

Non può essere $a \neq 0$, perché allora sarebbe

$\sqrt{3}$ = b/a = razionale , assurdo ; quindi $a = 0$ e dunque $b = 0$.

Risulta allora

$$P(x) = (x^2-3)\ Q(x) = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\ Q(x)$$

e $P(x)$ è divisibile anche per $x-\sqrt{3}$.

3.- Sia l la lunghezza della scala. La velocità v_s della scala è allora $v_s = l/15$; la velocità del signor S nello scendere a scala ferma è $v_S = l/10$.
Ma allora la velocità v del signor S sulla scala in movimento è uguale alla sua velocità rispetto alla scala, v_S meno la velocità propria della scala v_s

$$v = v_S - v_s = l/10 - l/15 = l/30 .$$

Il tempo impiegato dal signor S per scendere la scala mentre questa è in funzione è quindi di 30 secondi.

4.- I numeri con almeno tre cifre distinte sono di due tipi:

I° tipo : xyzt con x,y,z e t quattro cifre distinte

II° tipo : xxyz con x, y e z tre cifre distinte e con

tutte le possibili variazioni di posizione per le due cifre x ripetute.

Prima soluzione :

Per la costruzione dei numeri del I° tipo scegliamo per prima la cifra x, diversa da 0, delle migliaia, per seconda la cifra y delle centinaia, per terza la cifra z delle decine e per ultima la cifra t delle unità.
Per x abbiamo nove possibili scelte da 1 a 9 . Tenendo presente che per y, z e t può essere scelto anche lo 0, rimangono successivamente nove scelte per y, otto per z e sette per t. Le possibili scelte risultano quindi $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ numeri con quattro cifre diverse.
Per la costruzione dei numeri del II° tipo con due cifre ripetute, osserviamo che nel ripetere la seconda cifra la scelta è una sola e che la cifra delle migliaia è diversa da 0 e quindi ammette solo nove scelte. Le possibili variazioni delle posizioni delle cifre sono :

xxyz	con le rispettive scelte	$9 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8$
xyxz	con le rispettive scelte	$9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 8$
xyzx	con le rispettive scelte	$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1$
yxxz	„ „ „ „	$9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 8$
yxzx	„ „ „ „	$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1$
yzxx	„ „ „ „	$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1$

In totale $6 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1 = 3888$.
I numeri dei due tipi ammontano complessivamente a $4536 + 3888 = 8424$.

Seconda soluzione :

Contiamo i numeri da 1000 a 1999 , cioè i numeri di quattro cifre che iniziano per 1, che soddisfano alla nostra condizione.
Quelli del I° tipo sono 1yzt, dove yzt è una qualsiasi terna con cifre distinte e diverse da 1 e quindi sono tante quanto le disposizioni semplici di nove elementi della classe tre e cioè $D_{9,3}$.
Quelli del secondo tipo o hanno ripetuta la cifra 1 , p.e. 11yz , o una delle altre, p.e. 1xxy con x e y distinte e diverse da 1. Nel primo caso il secondo 1 può occupare tre posizioni diverse: quella delle centinaia, quella delle decine e quella delle unità e xy è una qualunque delle coppie di elementi distinti diversi da 1 e quindi in numero di $D_{9,2}$. I numeri di questo caso sono $3\ D_{9,2}$.

Nel secondo caso ci sono $D_{9,2}$ scelte per la coppia xy e y può occupare tre posizioni diverse (centinaia, decine e unità). Si hanno 3 $D_{9,2}$ raggruppamenti.
I numeri richiesti compresi tra 1000 a 1999 sono complessivamente $D_{9,3} + 3 D_{9,2} + 3 D_{9,2} = 936$.
Ripetendo la costruzione per tutte le successive migliaia si può concludere che i numeri di almeno tre cifre distinte sono $9 \cdot 936 = 8424$.

Al lettore la facoltà di cercare una terza soluzione sottraendo dai 9000 numeri compresi tra 1000 e 10.000 quelli con tre cifre uguali, con quattro cifre uguali e con due coppie di cifre uguali.

5.- Ognuno degli n industriali consegna n-1 biglietti da visita (uno ad ognuno degli altri n-1 industriali) : i biglietti scambiati sono in tutto n(n-1).
Facciamo la seguente tabella :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ultima cifra di n(n-1)	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

Osserviamo poi che l'ultima cifra di n(n-1) dipende soltanto dall'ultima cifra di n .
Si ha quindi che l'ultima cifra decimale di n(n-1) è 0 o 2 o 6 .
Quando n varia da 1 a 50 la seconda riga della tabella si ripete 5 volte e la somma dei relativi numeri è allora

$$5 \cdot 20 = 100 .$$

6.- Osserviamo che essendo I_1 l'insieme dei poligoni che si ottengono come intersezione di due elementi di I_0 , tali poligoni sono intersezione di due triangoli, e possono avere 3, 4, 5 o 6 lati; analogamente I_2 è l'insieme dei poligoni che si ottengono come intersezione di due elementi di I_1 e sono quindi intersezione di 4 triangoli ed hanno o 3 o 4 o . . . o 12 lati, I_3 l'insieme dei poligoni intersezione di 8 triangoli, ... I_n l'insieme dei poligoni che si ottengono come intersezione di 2^n triangoli, ed hanno o 3 o 4 , o 5 , o . . . . . o $3 \cdot 2^n$ lati.
Ora si vede subito che, essendo i triangoli poligoni convessi, ogni poligono intersezione di triangoli è convesso, quindi se prendo un poligono non convesso questo non può appartenere ad alcun insieme I_n .
Che poi I_n sia contenuto in I_{n+1} risulta dal fatto che ogni poligono è contenuto in un triangolo ed ogni triangolo in I_n .
Siccome $3 \cdot 512 = 3 \cdot 2^9 < 2001 = 3 \cdot 667 < 3 \cdot 2^{10} = 3 \cdot 1024$
risulta, per quanto detto, che I_9 non contiene poligoni con 2001 lati, invece I_{10} si .
Non sempre un poligono convesso con 3k lati è intersezione di k triangoli; p.e. l'esagono della fig. 1 non è intersezione di 2 triangoli:

fig.1

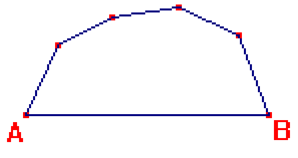
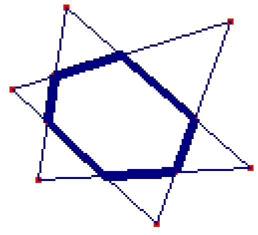


fig. 2



i lati dei due eventuali triangoli dovrebbero essere prolungamenti dei lati dell'esagono (come p. e. in fig.2), ma se prendo tre lati $\neq$ AB del primo esagono, il triangolo che questi individuano non contiene l'esagono. Così p.e. il poligono convesso di m lati che ha per vertici A, B e altri m-2 punti di una delle due semicirconferenze di diametro AB è intersezione di 1 + (m-3)/2 triangoli (e non di meno) se m è dispari e di m/2 (e non di meno) triangoli se m è pari; questo perché c'è sempre un triangolo che va bene e ha per lati tre lati del poligono, però le altre terne di lati individuano triangoli che non contengono il poligono; così ci si deve accontentare poi di triangoli che abbiano soltanto due lati prolungamenti dei lati del poligono.
Se m = 2001, il relativo poligono sarà dunque intersezione di (2001-1)/2 = 1000 triangoli, e siccome :

$$512 = 2^9 < 1000 < 2^{10} = 1024$$

si ha che il più piccolo indice j tale che I_j contenga tutti i poligoni convessi di 2001 lati è 10.

7.- Indichiamo con B il numero delle vetture da verniciare in bianco, con M quelle da metallizzare, con b e con m il tempo che si impiega, rispettivamente, per verniciare in bianco o per metallizzare una vettura.
Il tempo totale impiegato nei due casi è lo stesso, e dunque

$Bb = Mm$. Si ha inoltre

$Mb = 20h$ e $10m = 1210$ m

$Bm = 28h$ e $10m = 1690$ m . Risulta allora

$MbBm = 11^2 \cdot 13^2 \cdot 10^2 = (bB)^2 = (Mm)^2$, da cui

$Bb = Mm = 11 \cdot 13 \cdot 10$;

$Bb/Mb = 11 \cdot 13 \cdot 10 / 11^2 \cdot 10 \qquad B/M = 13/11$, e quindi

$B = 13\,k$, $M = 11\,k$. Essendo B ed M interi (e positivi), k sarà intero (e positivo).

$M + B = 24\,k$, e k può essere 1, 2, 3, 4, ...

Ma 24 k è minore di 400, quindi k minore o uguale a 400 : 24 = 16.
Ma allora le automobili in totale sono al più $24 \cdot 16 = 384$, quelle bianche al più $13 \cdot 16 = 208$, quelle da metallizzare al più $11 \cdot 16 = 176$.

8.- Sia ABCD il quadrato (di lato l) in questione che, per comodità, supponiamo su un piano orizzontale, sicché le quattro rette a, b, c, d per i quattro vertici saranno verticali.
Consideriamo un eventuale tetraedro A'B'C'D' che risolva il problema, con A' su a, B' su b, C' su c, D' su d, e scegliamo uno dei vertici che abbia quota minima; salvo girare le lettere, possiamo supporre che sia B'. Le distanze di B' da A' e da C' (e da D') sono uguali, perciò, per il Teorema di Pitagora, la differenza di quota h tra A' e B' è uguale alla differenza di quota h' tra C' e B'; infatti deve risultare

$$(A'B')^2 = h^2 + l^2 = h'^2 + l^2 = (B'C')^2 ,$$

ed essendo h e h' maggiori o uguali a 0, risulta h = h'.
Ma allora A' e C' sono alla stessa quota ed il segmento A'C' è orizzontale e misura dunque quanto AC : risulta $A'C' = l\sqrt{2}$. Ma allora anche $A'B'= B'C'= l\sqrt{2}$ e dunque h = h'= l ; e D' ha la stessa quota di B': $D'B'= l\sqrt{2}$.
Si vede subito d'altronde che una tale scelta dei punti A',B',C',D' risolve il problema.
I tetraedri regolari che soddisfano le condizioni richieste sono dunque tutti e soli quelli che hanno due vertici alla stessa quota rispettivamente sulle rette a, c e due sulle rette b, d entrambi ad una quota di l inferiore (o superiore).
Essi hanno tutti lo spigolo che misura $l\sqrt{2}$ ed hanno perciò lo stesso volume.