17ª Gara Matematica " Città di Padova " 23 Marzo 2002
SOLUZIONE DEI QUESITI

1.- Fattorizzando il polinomio a primo membro, risulta :

$$(x + y)(x - 2y) = 10$$

per cui :

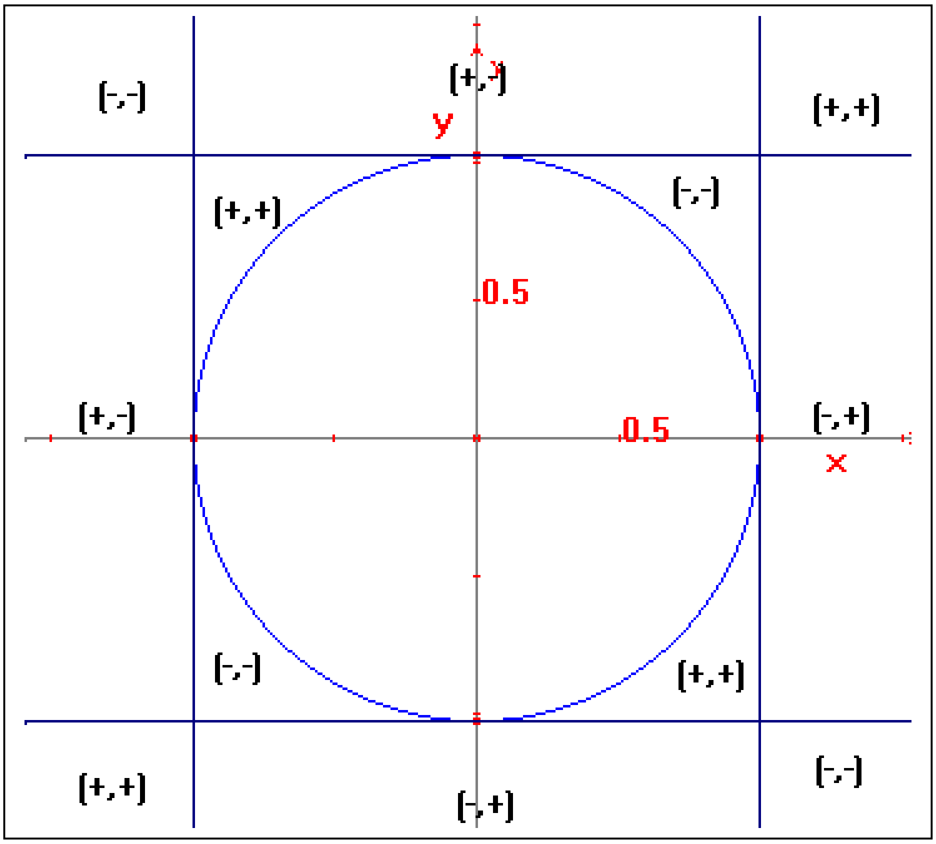
i) o $x + y = 1$ e $x - 2y = 10$, o $x + y = 2$ e $x - 2y = 5$;

ii) o $x + y = 5$ e $x - 2y = 2$, o $x + y = 10$ e $x - 2y = 1$;

oppure gli altri quattro sistemi ottenuti cambiando il segno ai termini noti.
Le soluzioni dei quattro sistemi sono, rispettivamente, (4,-3), (3,-1), (4,1) e (7,3). Gli altri quattro sistemi hanno per soluzioni le coppie opposte : (-4,3), (-3,1), (-4,-1) e (-7,-3).
Le otto coppie sono dunque le coppie cercate.
Nel secondo caso abbiamo quattro possibili sistemi :

$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ e gli altri due coi termini noti negativi ; in ogni caso, sottraendo membro a membro dalla prima equazione la seconda, si ha $3y = \pm 4$ e non ci sono quindi soluzioni intere.

2.- I punti in questione saranno esterni alla circonferenza (per quelli interni non passa alcuna tangente, per quelli sulla circonferenza una sola). Consideriamo allora le due coppie di rette parallele agli assi e tangenti la circonferenza; osserviamo che i punti di queste rette non appartengono al luogo cercato, e che esse suddividono l'insieme dei punti esterni alla circonferenza in regioni tali che, in tutti i punti di una regione i segni dei coefficienti angolari delle due tangenti non variano al variare del punto; e se un punto passa da una regione ad un'altra ad essa contigua (cioè che confini con la prima lungo un "lato"), cambia il segno del coefficiente angolare di una delle due tangenti.
E' facile ora distinguere le regioni con le coppie (+,+), (+,-), (-,+), (-,-) dei coefficienti angolari delle tangenti : la zona da ombreggiare sarà quella formata dalle regioni di tipo (+,+).



3.- I punti a coordinate intere della circonferenza sono : (5,0), (4,3), (3,4), (0,5) e gli altri otto che si ottengono cambiando il segno alle loro ascisse e/o ordinate.

Contiamo dapprima i quadrati che hanno i lati paralleli agli assi :

- quelli di lato 1 : $8 \cdot 6 + 6 \cdot 2 = 10 \cdot 6 = 60$ (6 righe centrali di otto, 1^a e 2^a riga di 6)
- quelli di lato 2 : $7 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 9 \cdot 5 = 45$ (analogamente, conto i centri)
- quelli di lato 3 : $6 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 8 \cdot 4 = 32$
- quelli di lato 4 : $5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 7 \cdot 3 = 21$
- quelli di lato 5 : ……………. $6 \cdot 2 = 12$
- quelli di lato 6 : …………… $5 \cdot 1 = 5$.

I n tutto sono 175.

Contiamo ora quelli con le diagonali parallele agli assi (contiamo sempre i centri) :

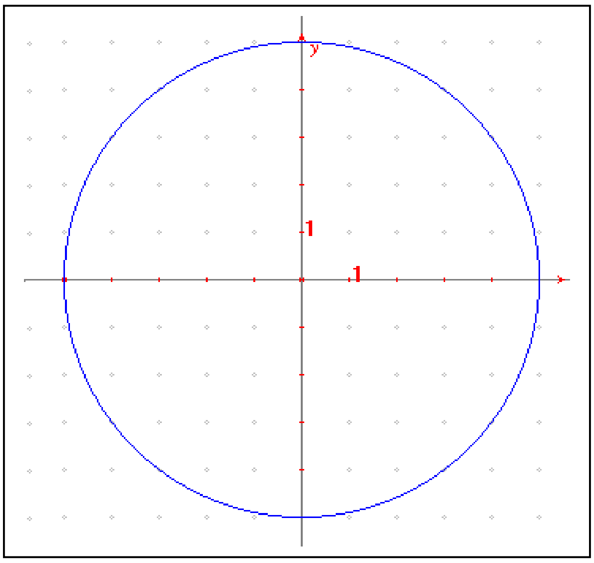
- quelli di diagonale uguale a 10 : 1
- quelli di diagonale uguale a 8 : 1 + 4 = 5
- quelli di diagonale uguale a 6 : 9 + 4 = 13
- quelli di diagonale uguale a 4 : 25 + 4 = 29
- quelli di diagonale uguale a 2 : 49 + 4 = 53

In totale sono 101.

Ci sono poi quelli con i lati "obliqui" :

- 2 di lato $\sqrt{50}$;
- 2 di lato $\sqrt{40}$;
- 8 di lato $\sqrt{37}$;
- 18 di lato $\sqrt{26}$;
- 16 di lato 5 ;
- 26 di lato $\sqrt{20}$;
- 32 di lato $\sqrt{17}$;
- 40 di lato $\sqrt{13}$;
- 58 di lato $\sqrt{10}$;
- 80 di lato $\sqrt{5}$.

In totale sono 292.



Complessivamente i quadrati sono quindi : 175 + 101 + 292 = 568 .

4.- Si verifica facilmente che la tangente in un punto P(a,b) della nostra circonferenza ha equazione $ax + by - 1 = 0$. Se il punto P è razionale anche i coefficienti dell'equazione della sua tangente sono razionali.
Per comodità chiameremo <u>razionale</u> una retta che ammetta un'equazione a coefficienti razionali.
Se A e B sono razionali, le rispettive tangenti sono razionali, e anche C è razionale perché tali sono le sue coordinate in quanto soluzione del sistema delle equazioni delle due tangenti, sistema in cui tutti i coefficienti sono razionali, e quindi anche la sua soluzione (in quanto si trova operando sui coefficienti con le quattro operazioni razionali).
Se A e C sono razionali, la retta CO è razionale, e così pure la sua normale **n** per A.
Data la simmetria della figura, B è il simmetrico di A rispetto alla retta CO. Ma allora, detto S il punto comune alle rette **n** e CO, S risulta razionale per le argomentazioni già fatte, e la ascissa di B si ottiene sommando a quella di S la differenza tra quella di S e quella di A; analogamente per l'ordinata : le coordinate di B risultano pertanto razionali. Ciò è quanto si voleva verificare.

5.- I. Prendiamo due palline di peso diverso : A e B . Se il loro colore è diverso esse sono diverse sia per peso che per colore, e siamo a posto. Altrimenti hanno lo stesso colore <u>c</u> . Ma non tutte le altre palline hanno il colore <u>c</u> (poiché in tal caso tutte le palline dell'insieme avrebbero lo stesso colore) e quindi ce n'è almeno una, chiamiamola D, con colore diverso da c : se il peso di D è diverso da quello di A, allora la coppia A,D risolve il problema; altrimenti lo risolve la coppia B,D.

II. Può andar bene il seguente esempio (con ovvio significato dei simboli) :
$Ap_1c_1d_2$ $\quad Bp_1c_2d_1$ $\quad Cp_2c_1d_1$.

6.- Tenuto conto delle condizioni del quesito, risulta :
f(0) = [f(-1) + 8]/2 (se f(-1) è pari) → 0 = f(-1) + 8 → f(-1) = -8
f(0) = f(-1) + 7 (se f(-1) è dispari)→ 0= f(-1) + 7 → f(-1) = -7.
Entrambi i valori trovati sono accettabili.
Possiamo proseguire, ottenendo :
-8 = f(-1) = [f(-2) + 8]/2 (se f(-2) è pari) → -16 = f(-2) + 8 → f(-2) = -24
-8 = f(-1) = f(-2) + 7 (se f(-2) è dispari) → f(-2) = -15 .
Entrambi i valori trovati sono accettabili e proseguendo ancora :
-7 = f(-1) = [f(-2) + 8]/2 (se f(-2) è pari) → -14 = f(-2) + 8 → f(-2) = -22
-7 = f(-1) = f(-2) +7 (se f(-2) è dispari) → f(-2) = -14 (non accettabile perché pari)
Pertanto i valori accettabili per f(-2) sono : -24, -15, -22.

7.- Sia t = 0 nell'istante in cui il primo treno passa per Padova e $t = t_1$ nell'istante in cui arriva a Vicenza, s sia la strada percorsa. Sarà $s = kt_1$ (con velocità costante = k).
Considerando il moto dell'altro treno si avrà $s = \frac{1}{2}at_1^2$ (con accelerazione costante = a).
Sia $t = t_2$ nell'istante in cui i due treni si incontrano; l'uno avrà percorso il tratto $s_2 = kt_2$, mentre l'altro avrà percorso il tratto $s^* = \frac{1}{2}at_2^2$ e la somma dei due valori dà l'intero tratto Padova – Vicenza e possiamo perciò scrivere :

$$kt_2 + \frac{1}{2}at_2^2 = s$$

Dividiamo ciascuno dei tre termini per $s = kt_1 = \frac{1}{2}at_1^2$ e otteniamo :

$$\frac{t_2}{t_1} + \frac{t_2^2}{t_1^2} = 1$$

da cui le soluzioni : $\frac{t_2}{t_1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e delle due si avrà cura di scegliere quella positiva, poiché t_1 e t_2 sono positivi.
Essendo inoltre $\frac{s_2}{s} = \frac{kt_2}{kt_1} = \frac{t_2}{t_1}$, risulta che la frazione del tratto Padova – Vicenza percorsa dal primo treno è $\frac{s_2}{s} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ con s_2 sezione aurea del tratto s.

8.- Una qualunque coppia (non ordinata) di elementi di S appartiene ad uno (e uno solo) dei 7 sottoinsiemi e ciascuno di questi ha 3 coppie. In tutto le coppie di elementi di S sono 3 • 7 = 21.
Siccome il numero delle coppie formate con gli elementi di un insieme di n oggetti è $\frac{n(n-1)}{2}$
risulta $\frac{n(n-1)}{2} = 21$ e ne segue che n = 7.

ogni oggetto fa parte di 6 coppie di elementi di S e di due coppie di elementi in ciascuno dei sottoinsiemi di ***F*** che lo contengono. Non essendoci ripetizioni di coppie, ci sono 6/2 = 3 dei 7 sottoinsiemi di ***F*** che contengono un dato elemento di S.