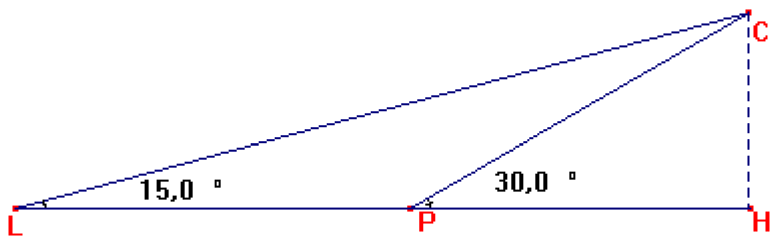
Gara Matematica "Città di Padova" - 29 Marzo 2003 –

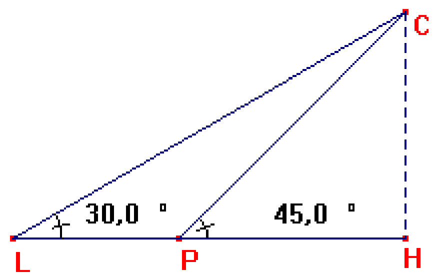
Soluzioni

1.- La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto; si ha allora :

$15° + \hat{P} + \hat{C} = 180°$ e anche $15° + 180° - 30° + \hat{C} = 180°$ da cui segue $\hat{C} = 15°$ e $\overset{\Delta}{LPC}$ isoscele , perciò LP = PC = 500 m. $\overset{\Delta}{PHC}$ è la metà di un triangolo equilatero e dunque $CH = \frac{PC}{2} = 250$ m.



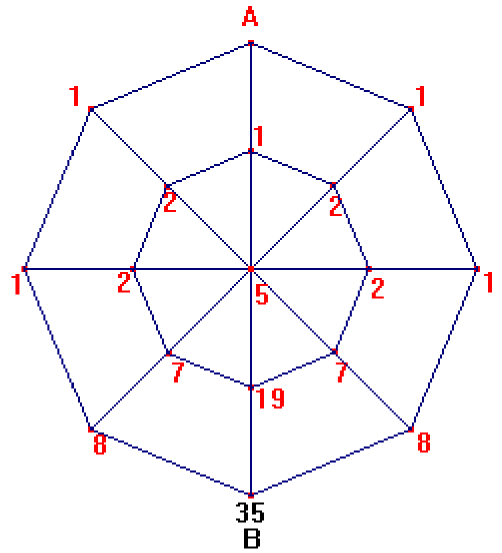
Nell'altro caso $\overset{\Delta}{LHC}$ è la metà di un triangolo equilatero, quindi LC = 2h e $\overset{\Delta}{PHC}$ è isoscele, quindi PH = h . Per il teorema di Pitagora si ha allora $(500+h)^2 + h^2 = 4h^2$, $500 + h = \sqrt{3}h$ e quindi :
$h = \frac{500}{\sqrt{3}-1} = 250(\sqrt{3}+1) \cong 679$ m.



2.- Supponiamo dapprima che il numero naturale n sia dispari, si potrà allora scrivere nella forma n = 2k+1. In questo caso si ha n = k+(k+1) con k e k+1 primi tra loro e se k è maggiore di 1, n non è tra i numeri richiesti. Tra i numeri dispari restano perciò esclusi 1 e 3:
Se n è pari, sarà del tipo n = 2k e distingueremo due casi : k pari, k dispari.
Se k è pari risulta che k-1 è k+1 sono primi tra loro poiché essendo dispari un loro divisore comune sarà dispari e dividerà anche la loro differenza che è 2, dunque il divisore comune è 1, ma vale 2k = (k-1)+(k+1) .
Se k è dispari, analogamente, sono primi tra loro k-2 e k+2 ed ancora 2k = (k-2)+(k+2).
Tra i numeri pari non sono quindi tra i numeri richiesti gli n = 2k, con k pari >3 oppure k dispari >4.
Tra i numeri pari restano quindi esclusi i numeri : 0, 2, 4, 6.

3.- Per arrivare in B il ragno dovrà passare o per C, o per D, o per E. Quindi il numero dei percorsi che portano in B è uguale alla somma del numero di quelli che portano in C, di quelli che portano in D e di quelli che portano in E. Così ad ogni nodo possiamo associare un numero che è la somma dei

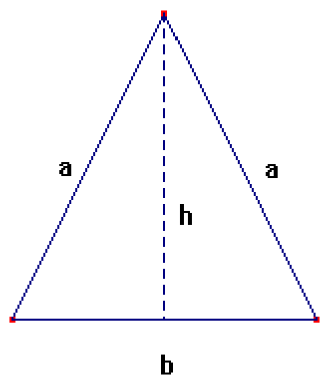
numeri associati ai nodi immediatamente precedenti che altri non è che il numero dei cammini che ivi arrivano da A.
Partiamo dai nodi immediatamente successivi ad A, ai quali risulterà associato il numero 1 e proseguiamo tenendo conto della regola precedente : arriveremo in B con 35 percorsi.



4.- Con riferimento alla figura sottostante si ha : $A = \dfrac{bh}{2}$ e $h^2 = a^2 - \dfrac{b^2}{4}$ per cui avremo :

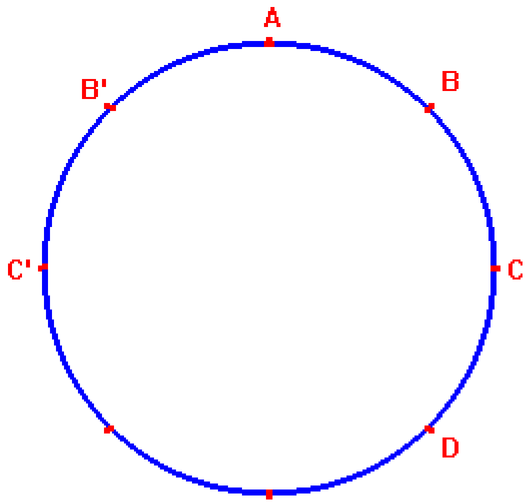
$$16A^2 = b^2(4a^2 - b^2)$$

Essendo b dispari anche b^2 sarà dispari e, se a è intero, anche $4a^2$-b^2 sarà dispari, ma allora il loro prodotto risulterà dispari mentre, se A fosse intero, avremmo $16A^2$ pari : assurdo. A non può essere intero e non esiste alcun triangolo del tipo richiesto.
Di più, abbiamo dimostrato che non esiste alcun triangolo isoscele che abbia per misura della base un numero dispari e per misure del lato e dell'area numeri interi.



5.- Se il signore arriva in B quando è appena passata una delle vetture, l'altra sarà appena partita da B' ed il signore la aspetterà 30 minuti o 10 minuti a seconda che essa giri in un verso o nell'altro. In ogni altro caso l'attesa sarà minore di 30 minuti.

Se il signore arriva in C quando è appena passata una delle vetture, l'altra sarà appena partita da C' ed arriverà in C dopo 20 minuti : questo è (in tal caso) il tempo massimo d'attesa.
Il caso della stazione D è uguale a quello della stazione B : tempo massimo d'attesa 30 minuti.

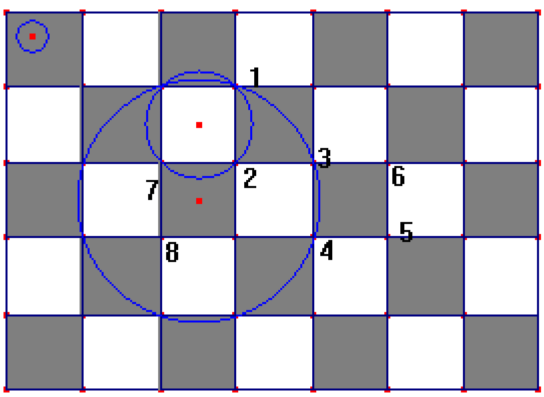


6.- Le circonferenze tutte contenute in una casella nera vanno bene : i loro raggi sono $\leq \frac{1}{2}$.

Se una delle circonferenze cercate non è tutta contenuta in una casella nera N, deve entrarci (ed uscirci) attraverso uno dei suoi vertici. Se tali vertici sono opposti (p. e. 1 , 3) il vertice successivo sarà il 4 o il 6 (non potendo passare per 1, 3, 5 che sono allineati) e il raggio del circolo è determinato = $\frac{\sqrt{10}}{2}$ essendo unico il cerchio per tre punti.

Se invece i due vertici sono contigui (p. e. 1, 2) il cerchio o passa per il 7 ed il raggio in tal caso vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$, oppure per il vertice 8 e allora ci ritroviamo nel caso precedente.

Dunque i raggi dei circoli cercati sono $\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e tutti i numeri compresi tra 0 e $\frac{1}{2}$.



7.- Tutti i numeri cercati hanno come prima cifra 1. L'insieme delle altre quattro cifre (tutte diverse tra loro !) individuano il numero poiché c'è un'unica maniera di ordinarle in modo crescente e vanno scelte nell'insieme di otto elementi $I = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$.

Tali numeri sono quindi tanti quanti i sottoinsiemi di quattro elementi dell'insieme *I* e sono dunque

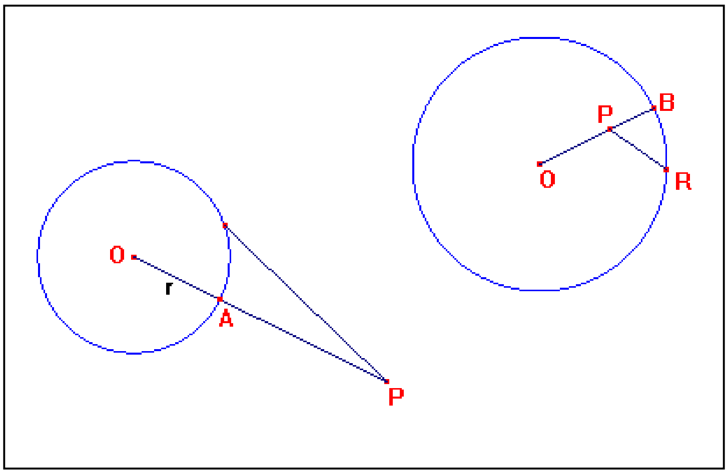
$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{(8-4)!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2} = 2\cdot 7\cdot 5 = 70\,.$$

Che se poi i numeri hanno precisamente due cifre dispari, le cifre pari saranno tre, scelte ovviamente nell'insieme { 2, 4, 6, 8 }; questo insieme ha quattro sottoinsiemi di tre elementi :

S_1 = { 2, 4, 6 } S_2 = { 2, 4, 8 } S_3 = { 2, 6, 8 } S_4 = { 4, 6, 8 }.

Se aggiungo a ciascuno di questi una delle quattro cifre dispari diverse da 1, individuo uno dei numeri cercati, che sono quindi: $4 \cdot 4 = 16$.

8.- Osservo che la distanza di un punto P da un circolo **C** di centro O e raggio r è uguale alla distanza di P da O meno r, se P è esterno al circolo (ogni altro punto di **C** ha da P distanza maggiore di PA), ed è uguale a r meno PO se P è interno al circolo (per ogni altro punto R di **C** si ha : PR > PB).



Se un punto X appartiene al luogo, indicato con X_S la sua distanza dalla retta s, si avrà X_S = X**C** , cioè :
se X è esterno a **C** : X_S = XO – r, e quindi XO = r + X_S;
se X è interno a **C** : X_S = r – XO e quindi XO = r – X_S.
Nel primo caso la distanza di X da O risulta uguale alla distanza di X dalla retta parallela alla retta s, a distanza r da s e, rispetto a s, dalla parte opposta di X .
Ma allora X appartiene alla parabola di fuoco O e direttrice s', oppure alla parabola di fuoco O e direttrice s''; e viceversa.
Analogamente nel secondo caso.
Il luogo cercato è dunque la riunione di queste due parabole.