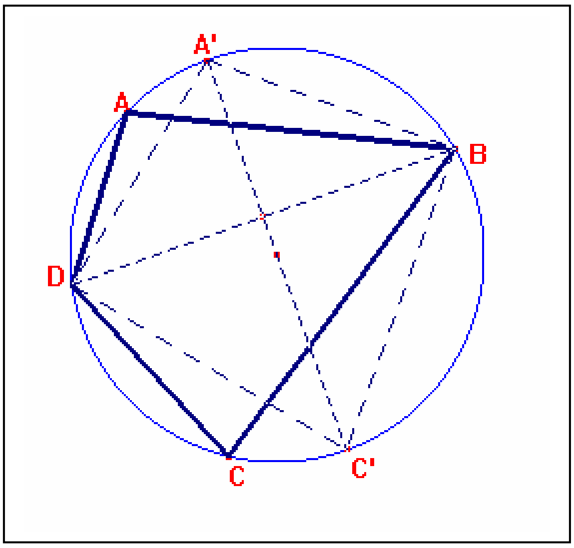
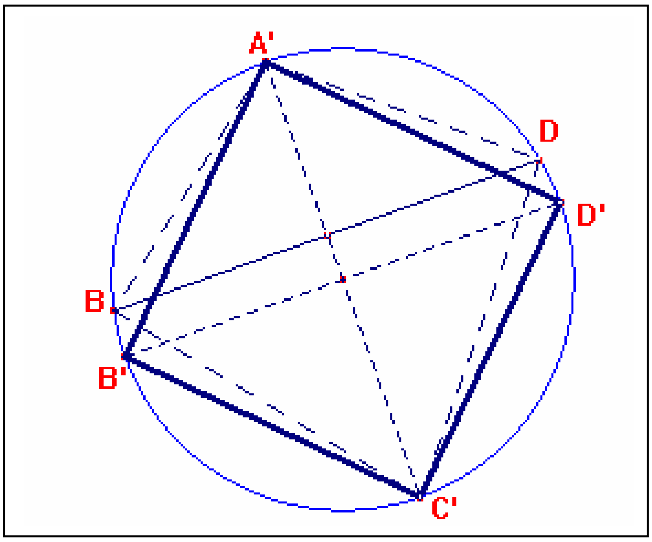
# 19ª GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA" 27 MARZO 2004

## SOLUZIONI DEI QUESITI

**1.-** Dato un qualunque quadrilatero ABCD inscritto nel circolo, consideriamo una sua diagonale, p.e. BD e tracciamo il diametro A'C' ortogonale ad essa. Il quadrilatero A'BC'D è un deltoide inscritto nel circolo, ed ha area ≥ di quella di ABCD poiché il triangolo BA'D ha altezza relativa al lato BD maggiore ( o al più uguale, se A=A' ) di quella ( relativa a BD ) del triangolo BAD ed ha dunque area ≥ di quella di BAD, e lo stesso vale per BC'D e BCD.

Consideriamo ora il diametro B'D' ortogonale ad A'C' . Il quadrilatero A'B'C'D' è un quadrato inscritto nel circolo, ed ha area ≥ di quella del deltoide A'BC'D per le stesse ragioni di prima. Tutti i quadrati inscritti nel circolo hanno poi la stessa area e dunque i quadrati sono, tra i quadrilateri inscritti in un circolo, quelli di area massima.




**2.-** $6^n = 2^n \cdot 3^n$ ed essendo $n > 2$ è certamente divisibile per $72 = 2^3 \cdot 3^2$ . Basta quindi vedere che $8^n + 10^n$ è divisibile per 72. Entrambi i numeri sono divisibili per $2^3$ (poiché $n > 2$), d'altra parte essendo n dispari :

$$8^n + 10^n = (8 + 10) \cdot (8^{n-1} - 8^{n-2} \cdot 10 + 8^{n-3} \cdot 10^2 - \ldots + 10^{n-1}) = 18 \cdot (\ldots)$$

ed è quindi divisibile per 9. c.v.d.

**3.-** Sia V(0, 0, 8) il vertice della piramide.

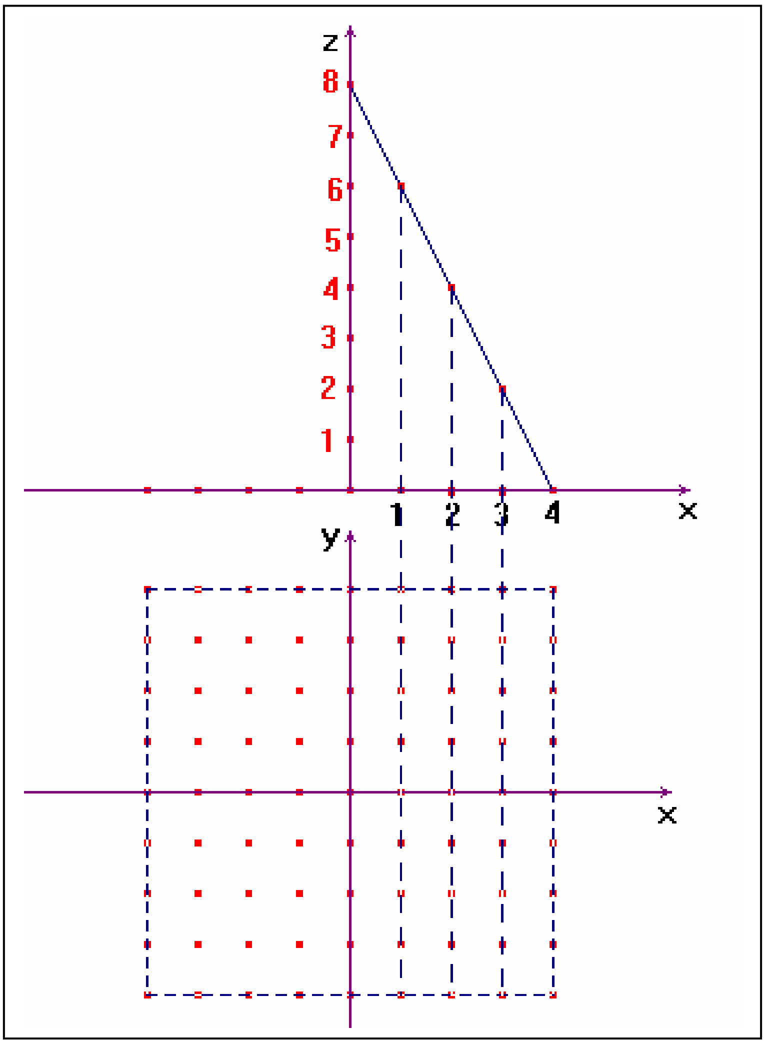
I punti di coordinate intere che appartengono alla piramide hanno, in particolare, la terza coordinata intera e dunque appartengono ai vari piani di equazione $z = k$ con $k = 0, 1, \ldots, 8$.

Il piano di equazione $z = 0$ interseca la piramide nel quadrato avente lato di base uguale a 8 e che contiene $9 \cdot 9 = 81$ punti di coordinate intere, tutti sulla superficie della piramide.

Il piano di equazione $z = 1$ sega la piramide in un quadrato di lato 7 che contiene $7 \cdot 7 = 49$ punti a coordinate intere, tutti interni alla piramide.

Il piano di equazione $z = 2$ ha $5^2$ punti interni e $6 \cdot 4$ punti sulla superficie della piramide.

Così proseguendo otteniamo la seguente tabella:




| | Punti interni | Punti sulla superficie |
|---|---|---|
| Z = 0 | - | 81 |
| Z = 1 | $7^2$ | - |
| Z = 2 | $5^2$ | $6 \cdot 4$ |
| Z = 3 | $5^2$ | - |
| Z = 4 | $3^2$ | $4 \cdot 4$ |
| Z = 5 | $3^2$ | - |
| Z = 6 | $1^2$ | $2 \cdot 4$ |
| Z = 7 | $1^2$ | - |
| Z = 8 | - | 1 |

In totale 119 punti interni e 130 punti sulla superficie della piramide.

**4.-** Osserviamo dapprima che $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$ .
Il Teorema del resto ( o di Ruffini ) dice che il resto della divisione di un polinomio P(x) per (x – u ) è P(u); dunque P(2) = 2 , P(3) = 3 .
Dividendo P(x) per $(x^2 - 5x + 6)$, si ottiene :

$$P(x) = (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot Q(x) + R(x)$$

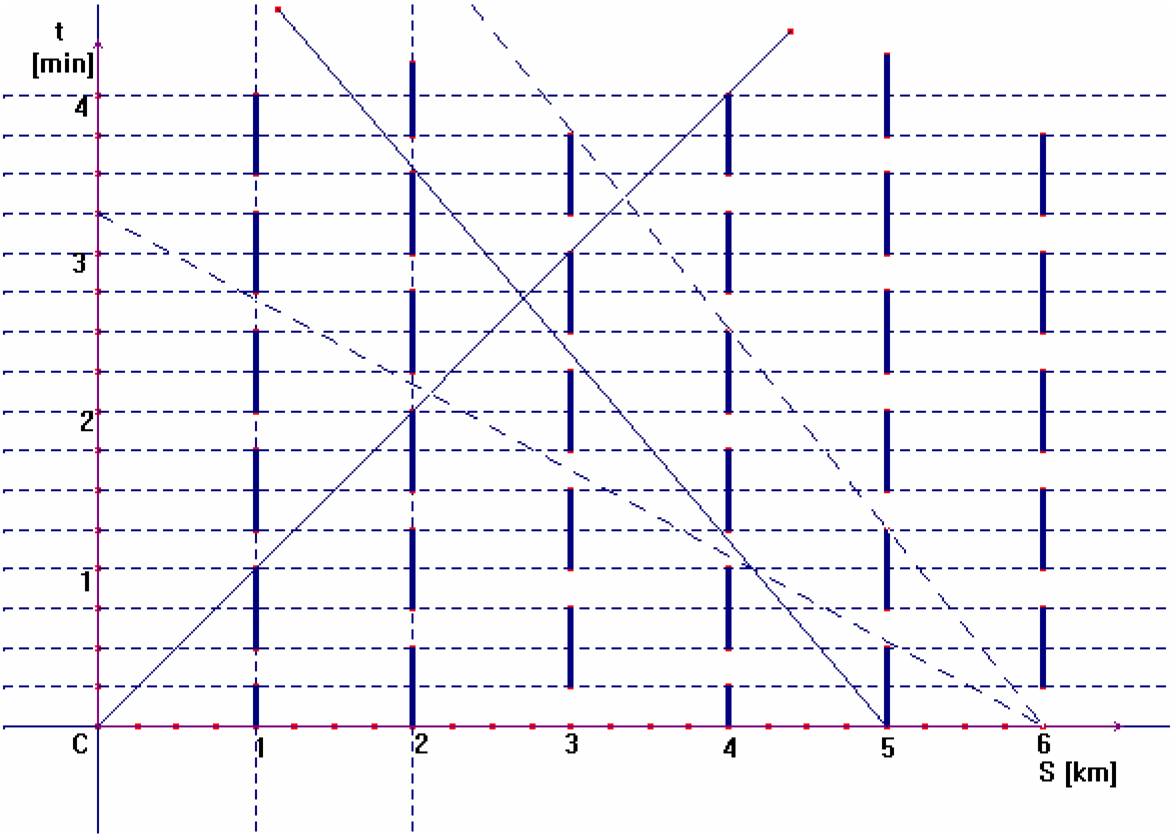
dove Q(x) è il quoziente ed R(x) il resto, con R(x) polinomio di grado minore di 2, quindi R(x) = ax + b .
Si ha allora :

$$P(2) = 0 \cdot (2\text{-}3) \cdot Q(2) + R(2) = 2a + b = 2$$
$$P(3) = (3\text{-}2) \cdot 0 \cdot Q(3) + R(3) = 3a + b = 3$$

da cui sottraendo otteniamo a = 1 e b = 0, quindi R(x) = x.

**5.-** Per $n > 1 \rightarrow \log_n(n+1) > 1$.
Supponiamo ora, per assurdo, che $\log_n(n+1) = a / b$, con a e b interi e $b \neq 0$; anzi, per quanto detto, possiamo supporre a e b > 0.
Si avrebbe allora, per definizione di logaritmo :
$n^{a/b} = n + 1 \rightarrow n^a = (n + 1)^b$
ma ciò è impossibile poiché n e n + 1 sono primi tra loro : $n > 1$, $b \neq 0$.

**6.-** L'automobile che va a 60 km/h, percorre 1 km in 1 minuto. Per andare da C a S, se trova il primo semaforo verde, impiega dunque 6 minuti, altrimenti si deve aggiungere il tempo t di attesa affinché il primo semaforo diventi verde; dunque per andare da C a S impiega 6 min + t, con $0 \leq t \leq 30$ secondi.




I segmenti verticali, relativi ai vari semafori posti ai km 1, 2, 3, 4, ... , indicano i tempi in cui i semafori in questione sono rossi.
Per la scelta delle due unità di misura sugli assi, il moto di una macchina che va a 1 km/min ha un grafico che è segmento parallelo alla prima bisettrice se la macchina va da C a S. Se il moto avviene da S a C il grafico è parallelo all'altra bisettrice degli assi.
Così si vede che l'autovettura, se va da S a C alla velocità di 60 km/h, può trovare verdi al più due semafori consecutivi, e ciò avviene precisamente quando essa passa l'i-esimo semaforo quando questo sta per diventare rosso, e così arriva all'(i-1)-esimo quando questo diventa verde.
Le due linee tratteggiate rispondono all'ultima domanda : quella meno inclinata corrisponde ad una velocità di 1 km ogni 30 secondi, cioè 120 km/h (che corrisponde anche alla massima velocità con la quale si può andare da S a C senza doversi fermare a qualche semaforo), l'altra ad una velocità di ! km ogni 75 secondi, cioè 60/75 km/min = 0.8 km/min = 48 km/h.
Poi ci sono ancora tutte le velocità relative a rette che vanno da un punto (i, h) relativo all'i-esimo semaforo al punto $(i-1, h + \frac{1}{2} + k \cdot \frac{3}{4})$ del semaforo precedente, essendo ¾ il periodo di ciascun semaforo: $v = 1/(\frac{1}{2} + k \cdot \frac{3}{4})$ km/min (con k = 2, 3, ...).

**7.-** Il pedone si trova ancora in A dopo due giri della roulette se :
i) o è stato sempre fermo
ii) o è andato prima in un altro angolo della piazza ed è poi tornato in A.
La probabilità di restar fermo per un giro è 5/8, per due giri consecutivi è $5/8 \cdot 5/8 = 25/64$.
La probabilità di muoversi è 3/8, quella di tornare poi al punto di partenza è 1/8; la probabilità di muoversi al primo giro e di ritornare in A al secondo è quindi $3/8 \cdot 1/8 = 3/64$.

La probabilità che il pedone si trovi ancora in A dopo due giri della roulette è allora :

$$\frac{25}{64}+\frac{3}{64}=\frac{28}{64}=\frac{7}{16}.$$

Se il pedone si trova in A dopo tre giri, vuol dire che :

i) o dopo due giri era in A e al terzo giro è rimasto fermo (... probabilità 7/16 · 5/8);

ii) o dopo due giri non era in A e però al terzo giro vi è ritornato (... probabilità : (1-7/16) · 1/8).

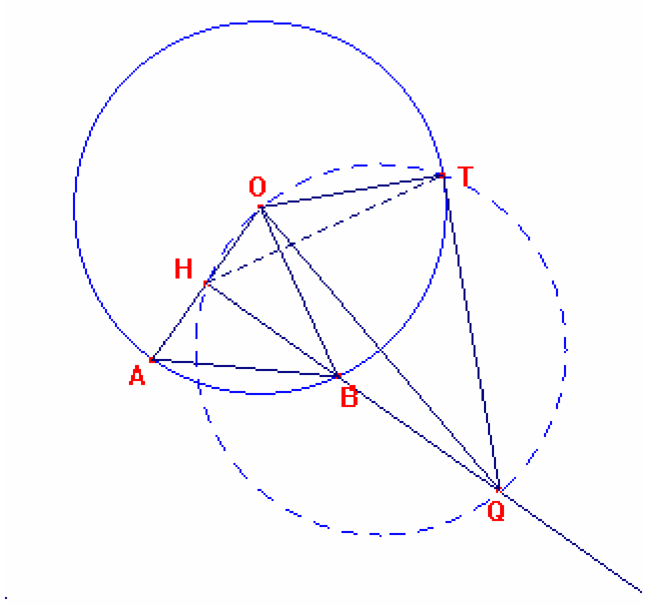
La probabilità che il pedone si trovi ancora in A dopo tre giri è quindi :

$$\frac{35}{128}+\frac{9}{128}=\frac{44}{128}=\frac{11}{32}.$$

La probabilità che, partendo da A si trovi in B dopo un certo numero di giri, è uguale a quella che si trovi in C, e a quella che si trovi in D, e ciò per la simmetria del problema; dunque la probabilità che si trovi in B dopo tre giri è uguale a 1/3 della probabilità che non si trovi in A :

$$\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{11}{32}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{21}{32}=\frac{7}{32}.$$

**8.-** Il triangolo OTQ, rettangolo in T, è metà di un triangolo equilatero (OQ = 2 · OT), quindi l'angolo TOQ misura 60°. Il circolo di diametro OQ passa per T e per H (OH è ortogonale ad HQ), dunque i due angoli THQ e TOQ sono uguali (sono infatti angoli alla circonferenza che insistono sul medesimo arco) e THQ = 60°.




Ma allora TH è ortogonale ad OB, cioè parallela all'altezza relativa al lato OB del triangolo OAB.