20^a GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA" 19 MARZO 2005

SOLUZIONI DEI QUESITI

1.-) Il più piccolo numero di 6 cifre diverse è 102345 ; o esso è divisibile per 11 e per 5 (e quindi, essendo i due numeri primi tra loro, risulterà divisibile per 55) oppure il numero che cerchiamo (se esiste) sarà più grande.
Dividendo 102345 per 55 si ottiene : $102345 = 1860 \cdot 55 + 45$.
Se aggiungo 10 (dato che $10 = 55 - 45$) a 102345 ottengo 102355, numero divisibile per 55 , il più piccolo maggiore di 102345; ma esso ha due cifre uguali.
Aggiungo allora 55 e trovo 102410 e mi va ancora male; ma il successivo multiplo di 55 è 102465 che ha tutte le cifre diverse, ed è quindi il numero cercato.

Un altro modo di affrontare il quesito è il seguente : 102345 è divisibile per 5 (l'ultima cifra è 5) ma non per 11, infatti dal criterio di divisibilità per 11 : $1 + 2 + 4$ e $0 + 3 + 5$ non hanno per differenza un multiplo di 11 oppure 0 ; modifichiamo allora le ultime cifre : all'ultimo posto lascio il 5 affinché il numero resti divisibile per 5 (se mettessi lo 0 all'ultimo posto si dovrebbe metter la cifra 2 al secondo, aumentando così il numero di quasi 20000), ho il numero 102xy5 e devo fare in modo che per esempio sia $1 + 2 + y = 0 + x + 5$ con x, y diversi da 0,1, 2, 5 .
Trovo che potrei sostituire $x = 4$, $y = 6$ oppure $x = 6$, $y = 8$.
Scelgo la prima coppia e pertanto il numero cercato è 102465 **.**

2.-) Un piano parallelo alla base taglia la piramide $\boldsymbol{P}$ in due parti di cui una è una piramide $\boldsymbol{p}$ omotetica alla prima e l'altra un tronco di piramide $\boldsymbol{T_p}$.
Si avranno quindi le due possibilità:

$$\text{i) } \mathrm{Vol}(\boldsymbol{p}) : \mathrm{Vol}(\boldsymbol{T_p}) = 7 : 1$$
$$\text{ii) } \mathrm{Vol}(\boldsymbol{T_p}) : \mathrm{Vol}(\boldsymbol{p}) = 7 : 1.$$

Nel secondo caso si ha anche (componendo) :

$$(\mathrm{Vol}(\boldsymbol{T_p}) + \mathrm{Vol}(\boldsymbol{p})) : \mathrm{Vol}(\boldsymbol{p}) = (7 + 1) : 1 \Rightarrow \mathrm{Vol}(\boldsymbol{P}) : \mathrm{Vol}(\boldsymbol{p}) = 8 : 1 = 2^3 : 1$$

Siccome i volumi dei solidi simili stanno tra loro come i cubi delle dimensioni lineari basterà passare alle radici cubiche per avere i rapporti delle dimensioni lineari, nel nostro caso 2 : 1 e se indichiamo con $\boldsymbol{H_p}$ l'altezza della piramide $\boldsymbol{P}$ e con $\boldsymbol{h_p}$ quella della piramide $\boldsymbol{p}$ avremo :

$$\boldsymbol{H_p} : \boldsymbol{h_p} = 2 : 1$$

cosicché $\boldsymbol{h_p} = \boldsymbol{H_p} / 2 \Rightarrow \boldsymbol{h_p} = 8 / 2 = 4$ e $\boldsymbol{h_p}$ è d'altra parte la distanza del vertice dal piano di base.
Nell'altro caso avremo :

$$\mathrm{Vol}(\boldsymbol{p}) : \mathrm{Vol}(\boldsymbol{P}) = 7 : 8$$

e, passando alle altezze : $\boldsymbol{h_p} : \boldsymbol{H_p} = \sqrt[3]{7} : 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h_p} = 4\sqrt[3]{7}$.
Le distanze dei due piani dal vertice della piramide sono rispettivamente 4 e $4\sqrt[3]{7}$ **.**

3.-) Consideriamo nel piano le rette che uniscono a due a due i $\boldsymbol{2n}$ punti . Esse sono in numero finito, quindi esistono rette non parallele ad alcuna di queste. Scegliamo allora una di tali rette, **r**, che non passi inoltre per alcuno dei $\boldsymbol{2n}$ punti. Se in uno dei semipiani di origine **r** ci sono $\boldsymbol{k}$ dei $\boldsymbol{2n}$ punti, nell'altro semipiano ci sono i rimanenti $\boldsymbol{2n - k}$:
se $\boldsymbol{k = n}$ siamo a posto, altrimenti trasliamo la retta **r** nella direzione ad essa ortogonale e nel verso del semipiano che contiene il maggior numero di punti. Nella traslazione la retta **r** incontra uno alla volta i punti considerati (non è parallela ad alcuna retta che ne contiene due !) che passano quindi uno alla volta da una parte della retta all'altra. In un certo momento perciò la retta avrà tanti di questi punti da una parte quanti dall'altra.
Indichiamo ora con $\boldsymbol{I}$ l'insieme dei $\boldsymbol{2n}$ punti della sfera, con $\boldsymbol{D}$ l'eventuale sottoinsieme di $\boldsymbol{I}$ formato da punti diametralmente opposti. Presi due punti di $\boldsymbol{I - D}$ c'è un unico piano per il centro O della

sfera che li contiene (poiché non sono diametralmente opposti). Consideriamo tutti i siffatti piani (per O e per due punti di $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}$), essi sono in numero finito ; anche i punti di $\boldsymbol{D}$ sono in numero finito. Possiamo allora scegliere un diametro AB della sfera che non giaccia in alcuno dei piani prima considerati (così nessun piano per AB può contenere due punti di $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}$) e tale inoltre che né A né B appartengano all'insieme $\boldsymbol{I}$. Fissiamo un piano $\boldsymbol{\pi}$ per AB che non contenga alcun punto dell'insieme $\boldsymbol{I}$; esso passa per O (poiché AB è un diametro) e un certo numero $\boldsymbol{k}$ di punti dell'insieme $\boldsymbol{I}$ si troverà da una parte del piano e i rimanenti $\boldsymbol{2n}-\boldsymbol{k}$ dall'altra :
per ogni coppia di punti diametralmente opposti di $\boldsymbol{D}$ uno sta da una parte rispetto al piano $\boldsymbol{\pi}$ e l'altro dall'altra (anzi se $\boldsymbol{D}$ è formato da $\boldsymbol{s}$ coppie di punti diametralmente opposti ogni piano per O che non passi per alcuno di essi ne lascia giusto $\boldsymbol{s}$ da una parte ed $\boldsymbol{s}$ dall'altra).
Facciamo ora ruotare il piano $\boldsymbol{\pi}$ attorno all'asse AB in un certo verso : nella rotazione il piano incontra uno alla volta i punti di $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}$ (poiché nessun piano per AB ne contiene due !) che passano quindi uno alla volta da una parte del piano all'altra.
Dopo una rotazione di 180° il piano ritorna nella posizione di partenza ma i due semispazi individuati dal piano $\boldsymbol{\pi}$ si sono scambiati l'un l'altro. Così quello che conteneva $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{s}$ punti di $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}$ dopo la rotazione è diventato il sottospazio che contiene $\boldsymbol{2n}-\boldsymbol{s}-\boldsymbol{k}$ punti di $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}$; ma nel ruotare $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{s}$ è diventato $\boldsymbol{2n}-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{s}$ con variazioni di una unità alla volta (in più o in meno) e sono stati ottenuti dunque tutti i valori compresi tra $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{2n}-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{s}$ e quindi anche il valor medio $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}$. Ma allora per quella posizione del piano $\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{n}$ punti di $\boldsymbol{I}$ appartengono ad un semispazio ed $\boldsymbol{n}$ all'altro (di essi $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}$ di $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{s}$ di $\boldsymbol{D}$) **.**

4.-) Indichiamo con $\mathbf{v_d}$ la velocità del corridore in discesa, con $\mathbf{v_s}$ quella in salita.
La velocità media v_m è uguale per definizione allo spazio percorso S diviso il tempo impiegato t, così $v_m = S / t$. Siccome il corridore al ritorno fa la stessa strada L che all'andata, si ha che S = 2L, ed inoltre il percorso in salita ha la stessa lunghezza L di quello in discesa.
Il tempo che impiega in salita è $t_s = L / v_s$, quello che impiega in discesa $t_d = L / v_d$.
Si ha allora :

$$v_m = \frac{S}{t} = \frac{2L}{t_s + t_d} = \frac{2L}{\frac{L}{v_s} + \frac{L}{v_d}} = \frac{2}{\frac{1}{v_s} + \frac{1}{2v_s}} = \frac{4v_s}{3} .$$

Il rapporto richiesto è quindi $\frac{4}{3}$ **.**

5.-) Le squadre sono 4, ognuna gioca tre partite, quindi le partite sono in tutto 4 · 3 : 2 = 6.
Ogni pareggio frutta in totale 2 punti (un punto per ciascuna delle due squadre che giocano), ogni vittoria 3 (= 3 + 0).
Detto x il numero dei pareggi , y quello delle vittorie, si ha :
x + y = 6
2x + 3y = 15 da cui x = y = 3 .
Indichiamo con A la prima squadra, con B, C, D le altre.
A ha vinto 2 partite, nella terza o ha perso oppure ha pareggiato; ha quindi o 6 o 7 punti.
Facciamo degli schemi :

	B	C	D
A	s	v	v

Oppure :

	B	C	D
A	p	v	v

Dove abbiamo indicato con v la vittoria, con p il pareggio, con s la sconfitta.
Completiamo il primo schema :

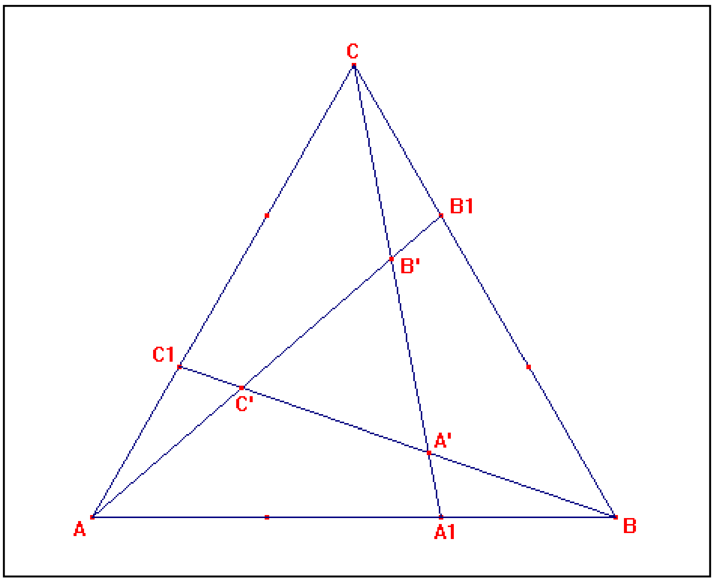
	A	B	C	D
A	*	s	v	v
B	v	*		
C	v		*	
D	v			*

Le tre partite mancanti sono i tre pareggi, quindi nelle sei caselle vuote devo mettere p. Mi accorgo che allora due delle squadre, C e D, vengono ad avere lo stesso punteggio 2 in contrasto con quanto richiesto. La squadra A non può quindi aver totalizzato 6 punti.
Completiamo ora il secondo schema :

	A	B	C	D
A	*	p	v	v
B	p	*		
C	s		*	
D	s			*

La terza vittoria è o di B su C (o su D, ma è lo stesso per la simmetria tra C e D) o di C su B (o di D su B, lo stesso) o di C su D (o di D su C, lo stesso).
Nel primo caso i punteggi sono : 7, 5, 1, 2; nel secondo caso : 7, 2, 4, 2 (e ciò è in contrasto con le richieste), nel terzo caso : 7, 3, 4, 1 .
Le possibili classifiche finali sono dunque due : prima squadra 7 punti, ultima 1, la seconda e la terza o 5 e 2 punti, o 4 e 3 punti rispettivamente **.**

6.-) Indichiamo con A', B', C' i vertici del triangolo individuato e con A_1, B_1, C_1 i corrispondenti appartenenti ai lati del triangolo ABC. Osserviamo che l'area del triangolo A_1BC è 1 / 3 di quella di ABC e così quelle dei triangoli B_1CA e C_1AB . Si ha allora, per quanto riguarda le aree :
$ABC = A_1BC - B_1B'C + B_1CA - C_1C'A + C_1AB - A_1A'B + A'B'C'$ per cui $A'B'C' = 3A_1A'B$.
Ne consegue che $(ABC) : (A'B'C') = (A_1BC) : (A_1A'B)$.
Ora (anche) i due ultimi triangoli sono simili e quindi il rapporto delle loro aree è il quadrato del rapporto tra i loro lati, p.e. A_1C e A_1B. Se scegliamo A_1B come unità di misura $AA_1 = 2$ e $A_1C_1 = \sqrt{3}$ poiché il triangolo AA_1C_1 è la metà di un triangolo isoscele, il triangolo A_1C_1C è rettangolo quindi $A_1C = \sqrt{(C_1C)^2 + (A_1C_1)^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$.
Dunque $A_1C : A_1B = \sqrt{7}$ e quindi $(ABC) : (A'B'C') = 7$.



Se partiamo da un triangolo ***T*** qualunque, c'è sempre una affinità che trasforma ABC in questo triangolo ***T*** ed in questa affinità si corrispondono pure il triangolo A'B'C' e l'analogo relativo a ***T***. Il risultato allora non cambia poiché una affinità conserva il rapporto delle aree delle figure corrispondenti.

7.-) Si ha $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2}$ quindi se $x+\frac{1}{x}$ è intero lo è anche il suo quadrato e lo è il suo quadrato meno 2, cioè $x^2+\frac{1}{x^2}$ **.**

Analogamente $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^3+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+x$ da cui se $x+\frac{1}{x}$ è intero lo è anche $x^3+\frac{1}{x^3}$ **.**

In generale **:**

$$\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^n+\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-2}}+x^{n-2}$$

e quindi se $x^m+\frac{1}{x^m}$ è intero per ogni 0 < m < n , lo è anche per m = n ed allora, per il principio di induzione, per ogni m positivo.

Il caso n = 0 si verifica direttamente ; se poi n < 0 , –n = m > 0 e si ha **:**

$$x^n+\frac{1}{x^n} = x^{-m}+\frac{1}{x^{-m}} = \frac{1}{x^m}+x^m$$

e l'asserto è ancora vero **.**

8.-) *a)* Se consideriamo nel piano cartesiano il segmento :

$$(x, y) \mid x = \sqrt{3} , -\sqrt{3} < y < \sqrt{3}$$

questo è parallelo all'asse y e, ovviamente, non contiene alcun punto razionale poiché tutti i suoi punti hanno ascissa √3 che non è razionale .

Analogamente si vede subito che i tre segmenti :

$$(x, y) \mid x = -\sqrt{3} , -\sqrt{3} < y < \sqrt{3}$$
$$(x, y) \mid y = \sqrt{3} , -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$
$$(x, y) \mid y = -\sqrt{3} , -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

non contengono punti razionali .

I quattro segmenti costituiscono una spezzata chiusa con i lati paralleli agli assi e priva di punti razionali .

b) Consideriamo ora nel piano cartesiano la retta di equazione :

$$x + y = \sqrt{3} .$$

Essa passa per i punti A (√3 , 0) e B (0 , √3) e non contiene alcun punto razionale, poiché se due numeri razionali lo è anche la loro somma .

Pure le tre rette di equazione :

$$x + y = -\sqrt{3} \quad ; \quad x - y = \sqrt{3} \quad ; \quad x - y = -\sqrt{3}$$

non contengono punti razionali .

La prima passa per i punti C (–√3 , 0) e D (0 , –√3) , la seconda per D ed A , la terza per B e C :
La spezzata chiusa A B C D A è priva di punti razionali ed è costituita da segmenti non paralleli agli assi **.**