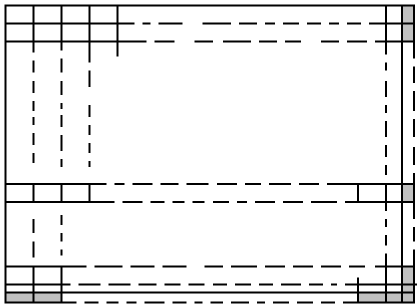
22^a GARA MATEMATICA " CITTÀ DI PADOVA" 17 Marzo 2007

SOLUZIONI DEI QUESITI

1.- Intanto provo a disporre le piastrelle col lato lungo parallelo al lato maggiore del pavimento

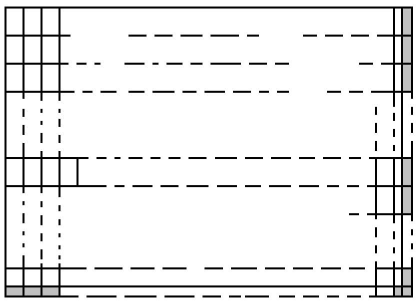


in ogni fila ce ne saranno : $\frac{40}{14} = 28,....$ cioè 28 piastrelle intere + 1 tagliata ;

ed una colonna conterrà $\frac{300}{9} = 33,...$ cioè 33 piastrelle intere + 1 tagliata .

In totale $29 \cdot 34 = 986$ piastrelle.

Se dispongo le piastrelle col lato lungo parallelo al lato minore del pavimento :



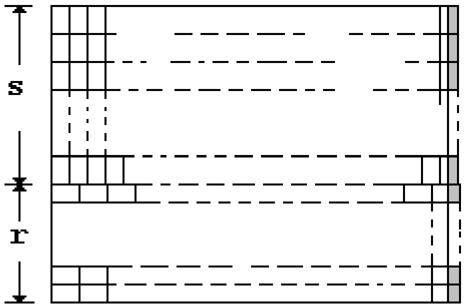
mi occorreranno : $\frac{400}{9} = 44,....$ 44 piastrelle intere + 1 tagliata (per una riga);

e $\frac{300}{14} = 21,....$cioè 22 piastrelle intere + 1 tagliata (per un colonna).

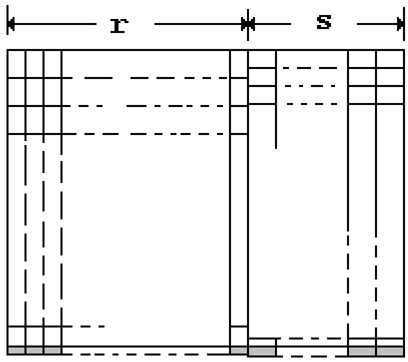
In totale $45 \cdot 22 = 990$ piastrelle .... di più che nell'altro caso.

Ma, anche se un piastrellista non lo farebbe mai, posso fare in modo che sui due lati più lunghi del pavimento non ci sia bisogno di tagliare piastrelle : basterà disporle un po' secondo il lato maggiore e un po' secondo quello minore. Infatti 9 e 14 sono primi tra loro e quindi esistono r, s tali che $9r + 14s = 300$ (le soluzioni sono (24, 6) e (10, 15)).

Appoggiando sul lato minore r piastrelle col lato di 9 cm ed s col lato di 14 cm avrò bisogno di :
(24, 6) $\rightarrow$ $29 \cdot 24 + 6 \cdot 45 = 966$ piastrelle ;
(10, 15) $\rightarrow$ $29 \cdot 10 + 15 \cdot 45 = 965$ piastrelle.

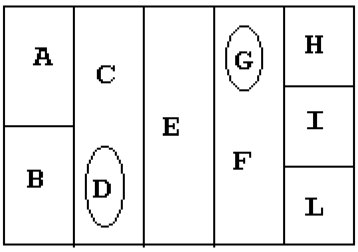


Disponendo, infine, le piastrelle in quest'altro modo :



Dovremo risolvere $9r + 14s = 400$, con soluzioni (32, 8) , (18, 17) , (4, 26) e di conseguenza il numero di piastrelle per ciascun caso sarà :
1) $22 \cdot 32 + 34 \cdot 8 = 976$
2) $22 \cdot 18 + 34 \cdot 17 = 974$
3) $22 \cdot 4 + 34 \cdot 26 = 972$.
Possiamo concludere che il piastrellista avrà bisogno di almeno 965 piastrelle .

2.- Denoto con A, B, C, ... , I, L le dieci regioni, come nel disegno :



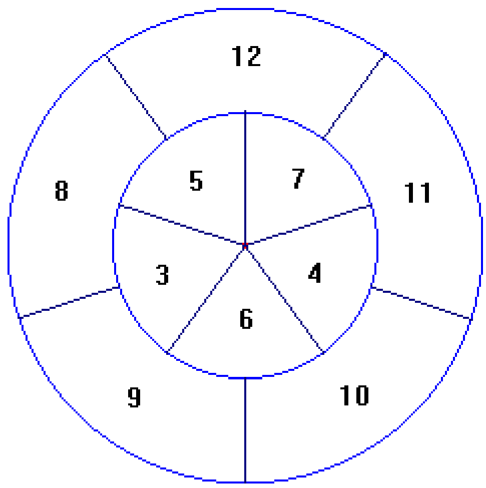
Osservo che la regione A può essere colorata con uno qualunque dei 5 colori, cioè in 5 modi diversi. Per ciascuno di questi modi posso colorare B in 4 modi diversi (non col colore di A), C non col colore di A né quello di B (che son tra loro diversi) cioè in 3 modi e così di seguito D in 4, E in 4, F in 4, G in 4, H in 4, I in 3 (non come H né come F, che hanno colori

diversi), L in 3, perciò in totale $N = 5 \cdot 4^6 \cdot 3^5$ modi diversi.
Osserviamo che, se partiamo da L (5 modi), I (4), H (4) non possiamo dire che ad E corrispondono 2 modi (non come H, né come I, né come L), poiché non è detto che i 3 colori di H, I, L sian tutti tra loro diversi : H ed L potrebbero avere lo stesso colore.

3.- Consideriamo i due polinomi $x^n - 1$ e $x^n + 1$: per il teorema del resto, se n è pari (siccome $(-1)^n = 1$), il primo di essi risulta divisibile per $x + 1$; se n è dispari (siccome$(-1)^n = -1$), il secondo è divisibile per $x + 1$.
Se pongo $x = 10$, ottengo che per ogni n uno almeno dei due numeri è divisibile per $10 + 1 = 11$, anzi uno solo poiché differiscono di 2.

4.- I tre poderi di maggior valore hanno complessivamente il 30 % del valore di tutti, i tre di minor valore il 30 % del valore dei rimanenti, ora $\frac{30}{100} \cdot \frac{70}{100} = \frac{21}{100}$ cioè il 21 % del valore di tutti.
I poderi dal quarto al quartultimo costituiscono quindi il 49 % del valore complessivo; uno qualunque di questi conterà per almeno il 7 % (altrimenti gli ultimi tre contando ciascuno per meno del 7 % non raggiungerebbero complessivamente il 21 %); se tutti contano per il 7 % essi sono in numero di 7 ($7 \cdot 7\ \% = 49\ \%$) ed essendo 7 % il valore minimo essi saranno in numero massimo.
Analogamente uno qualunque di tali poderi “intermedi” conterà al massimo per il 10 % (altrimenti i primi tre contando ciascuno per più del 10 %, supererebbero complessivamente il 30 %); $49 : 10 = 4{,}9$ i poderi intermedi sono almeno 5.
Perciò :
Numero massimo di poderi $7 + 3 + 3 = 13$
Numero minimo di poderi $5 + 3 + 3 = 11$.

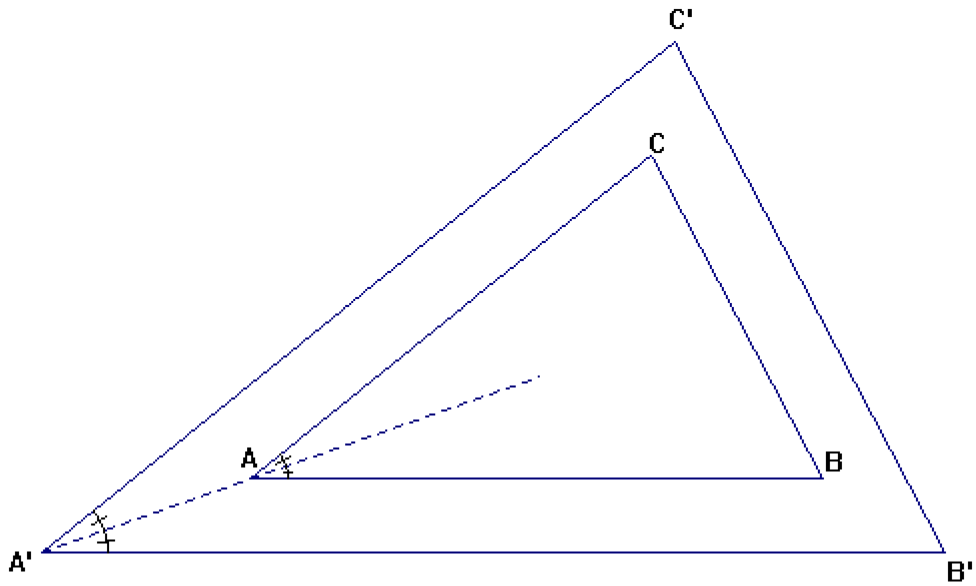
5.- Osserviamo intanto che la somma dei numeri delle caselle esterne è il doppio di quella delle caselle interne e, dunque, la somma dei dieci numeri è divisibile per 3.
$3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$
$8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 50$
I primi numeri vanno nelle caselle interne. Una disposizione possibile è data in figura :



Ogni altro insieme di numeri naturali successivi che incominci con un numero $n > 3$ non può andar bene poiché la somma di 5 di essi (quella più grande è degli ultimi cinque) è certamente minore di due volte la somma dei rimanenti.

D'altra parte i due insiemi : 2, 3, 4, ..., 11 e 1, 2, 3, ..., 10 non vanno bene perché le due somme dei loro numeri non sono multiple di 3.
Dobbiamo scartare anche l'insieme 0, 1, 2, 3, ..., 9 perché se mettiamo 0 all'interno, in una casella confinante all'esterno troviamo 0 + n = n e ci sarebbe un numero ripetuto, viceversa se lo mettiamo all'esterno esso dovrebbe risultare somma di due numeri naturali diversi.
L'insieme considerato è dunque l'unico che gode della proprietà suddetta.

6.-



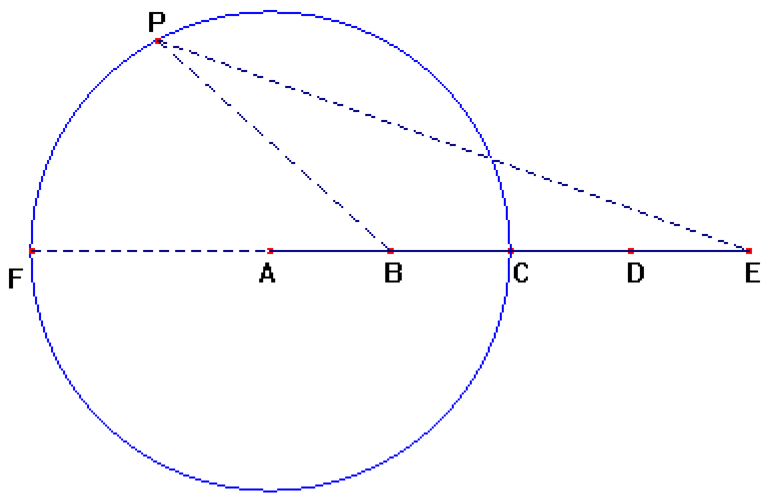
Verifica : deve risultare $\sqrt{17^2-8^2}+\sqrt{10^2-8^2}=21$.
Infatti $\sqrt{289-64}+\sqrt{100-64}=\sqrt{225}+\sqrt{36}=15+6=21$.

Osserviamo che A appartiene alla bisettrice dell'angolo $B'\hat{A}'C'$ poiché dista 2 sia da A'B' che da A'C', anzi risulta dall'uguaglianza degli angoli segnati in figura (corrispondenti tra parallele) che la retta A'A è anche bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$.
Rifacendo questo ragionamento per i punti B, B', e per C, C' si ottiene che i due triangoli hanno lo stesso incentro I e quindi il raggio ***R*** del circolo inscritto nel triangolo A'B'C' è uguale al raggio ***r*** del circolo inscritto in ABC + 2 : ***R*** = ***r*** +2 .
L'area del triangolo ABC = ½ (21 · 8) = ½ (21+10+17) · ***r*** , per cui :

$$\boldsymbol{r}=\frac{7}{2} \text{ ed } \boldsymbol{R}=\frac{7}{2}+2=\frac{11}{2}.$$

I due triangoli sono simili ed il rapporto di similitudine è $\frac{R}{r}=\frac{11}{7}$, quindi il perimetro di A'B'C' sarà $\frac{11}{7}\cdot 48$ e la sua area $\left(\frac{11}{7}\right)^2\cdot 84$.

7.- Si sa che fissati due punti B ed E ed un numero $k > 0$, il luogo dei punti P tali che $\frac{PE}{PB}=k$ è un circolo detto <u>*circolo di Apollonio*</u> relativo ai punti B, E ed al rapporto k .



Per ragioni di simmetria la retta BE passa per il centro del circolo. Siccome CE = 2CB e anche FE = 2FB, il punto C (e il punto F) appartiene al circolo di Apollonio relativo ai punti B, E e a $k = 2$.

Questo circolo è quindi il circolo ***C*** i cui punti P soddisfano la condizione $\dfrac{PE}{PB} = 2$.

Sol. Analitica

Introduciamo un riferimento cartesiano ortogonale di origine A e avente la retta AB come asse delle x e B come suo punto unità.

In questo sistema il circolo ***C*** ha equazione $x^2 + y^2 = 4$.

Se P ha coordinate (x, y) allora PB = $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ e PE = $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$.

Se P appartiene al circolo ***C***, vale : $y^2 = 4 - x^2$ e sostituendo :

PB = $\sqrt{x^2 - 2x + 1 + 4 - x^2} = \sqrt{5-2x}$

PE = $\sqrt{x^2 - 8x + 16 + 4 - x^2} = \sqrt{20-8x} = 2 \cdot \sqrt{5-2x} = 2 \cdot PB$. [c.v.d.]

Altra sol. Geometrica

I due triangoli BAP e PAE sono simili per il primo criterio (l'angolo in A è comune, PA/AB = EA/PA = 2), allora anche il rapporto tra i "terzi" lati dei due triangoli è 2 : PE/EB = 2.

8.- Da $\dfrac{p}{x} + \dfrac{q}{y} = 1$, moltiplicando per xy otteniamo : $yp + xq = xy$ e da qui $(x-p)\cdot(y-q) = pq$.

Essendo p e q due primi distinti, le possibili soluzioni sono soluzioni dei seguenti sistemi :

$$\begin{cases} x-p = pq \\ y-q = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-p = p \\ y-q = q \end{cases} \quad \begin{cases} x-p = q \\ y-q = p \end{cases} \quad \begin{cases} x-p = 1 \\ y-q = pq \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-p=-pq \\ y-q=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-p=-p \\ y-q=-q \end{cases} \quad \begin{cases} x-p=-q \\ y-q=-p \end{cases} \quad \begin{cases} x-p=-1 \\ y-q=-pq \end{cases}$$

Di queste 8 soluzioni va scartata solo la sesta poiché porge : x = 0, y = 0 .

[*via alternativa* : trattasi di iperbole equilatera traslata, riportando il centro nell'origine ...]