23^a Gara Matematica “Città di Padova” 15 Marzo 2008

1.- Dato il numero naturale $n > 5$, lo si esprima come somma di numeri naturali (es. $9 = 2+2+2+3$). Come devono essere gli addendi in modo che il loro prodotto sia massimo?

2.- Nell’insieme dei triangoli che hanno la somma di due lati uguale a 5 cm, quali hanno area massima?

3.- Il signor Parodi ha ritrovato in un cassetto un’agenda del 2006 (nel 2006 il 1° di Gennaio cadeva di Domenica) mai adoperata. Sta per buttarla, ma poi pensa che prima o poi ci sarà un altro 1° di Gennaio di Domenica e forse l’agenda potrà andar bene in quell’anno. Quale sarà il primo anno venturo in cui il 1° Gennaio cadrà di Domenica? In tale anno l’agenda potrà andar bene per quanto riguarda i giorni della settimana? (non le fasi lunari). Se no, in quale?

4.- Esistono nel piano cartesiano circonferenze di centro $C(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ che contengono almeno un punto di coordinate intere? E una di tali circonferenze può contenere due punti distinti a coordinate intere?

5.- Sia ax^3+bx^2+cx+d un polinomio di 3°grado che assume valori interi per ogni x intero. Esiste qualche polinomio siffatto con a non intero? In caso affermativo, qual è il più piccolo $a>0$ per cui ciò avviene?

6.- In quanti modi diversi possiamo suddividere l’insieme I delle dieci cifre
$I = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$ in tre insiemi non vuoti?

7.- Si consideri un quadrilatero convesso ABCD inscritto in una circonferenza, e i quattro punti medi M, N, P, Q rispettivamente dei quattro archi AB, BC, CD, DA. Si dimostri che
i due segmenti MP e NQ sono tra loro ortogonali.

8.- Si verifichi che per ogni naturale k il numero $(2-\sqrt{3})^k+(2+\sqrt{3})^k$ è un numero naturale divisibile per 2 (se k è pari, per 4 se k è dispari).

SOLUZIONI DEI QUESITI
23ª GARA MATEMATICA
CITTÀ DI PADOVA

1.- Intanto possiamo escludere il n° 1 tra gli addendi poiché non dà contributo nel prodotto.
Osservo poi che se spezzo un numero $n > 4$ in due addendi (>1), il loro prodotto è sempre $> n$.
Infatti se $b > 2$ e $b > a > 2$ $a > 1 + a/b$, e quindi $ab > b+a$. Quindi se qualcuno degli addendi è > 4 miglioro la situazione se lo spezzo nella somma di due numeri entrambi > 1.
In questo modo rappresento il mio numero n come somma di addendi > 1 e < 5, cioè come somma di h addendi $= 2$, k addendi $= 3$, j addendi $= 4$.
Siccome $2+2 = 2 \cdot 2$ posso sostituire ogni coppia di addendi $= 2$ con un addendo $= 4$ senza variare il risultato; analogamente miglioro il risultato se sostituisco ogni (eventuale) coppia di addendi $= 4$ ($4+4 = 8 = 3+3+2$) con un 2 e due 3 poiché $4 \cdot 4 = 16 < 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.
Così posso supporre che $h < 2$, $j < 2$. Se $h = j = 1$ sostituisco gli addendi 2 e 4 con la coppia 3, 3 ($2+4 = 3+3$) che migliora il risultato.
Concludendo il prodotto degli addendi è massimo quando gli addendi sono tutti $= 3$, salvo al più due uguali a 2 (o uno $= 4$, nel caso di due 2).

2.- Consideriamo uno di tali triangoli, e costruiamo l'ellisse di fuochi C ed A e passante per B.
Se B' è uno degli estremi dell'asse minore, il triangolo A B' C soddisfa ancora la condizione richiesta ed ha area

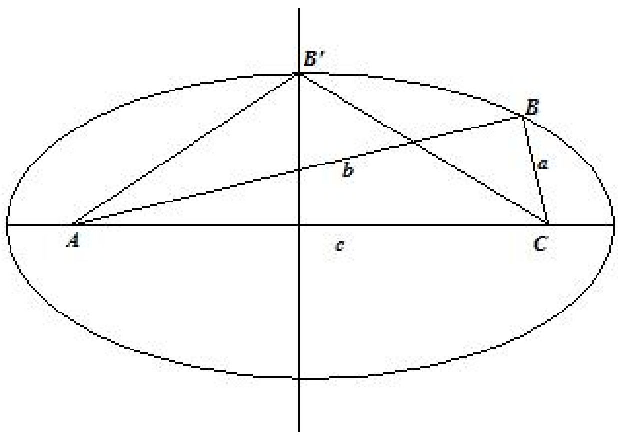

FIG. 1

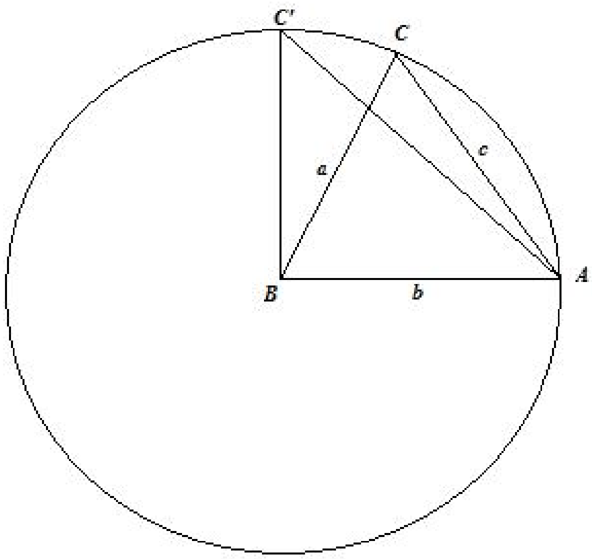

FIG. 2

maggiore di A B C poiché ha l'altezza relativa al lato c maggiore. Dunque i triangoli di area massima vanno ricercati fra quelli isosceli, nei quali $a = b$. Dalla figura 2 si vede poi che fra questi quelli di area massima hanno i due lati a e b fra loro ortogonali (hanno l'altezza relativa al lato b massima).

Soluzione alternativa A : disegnare una semicirconferenza di diametro AB=5, ogni punto P di AB lo divide in due parti il cui prodotto è pari al quadrato del segmento di perpendicolare ad AB passante per P e intersecante la semicirconferenza nel punto C : il prodotto è massimo se P cade giusto nel centro della semicirconferenza. (in pratica : II teorema di Euclide)

Soluzione alternativa B : possiamo pensare alla retta $x + y = 5$ di un riferimento cartesiano Oxy compresa nel primo quadrante, ora il rettangolo di area massima *inscritto* risulta il quadrato per intuitive ragioni di simmetria oppure scomodando l'iperbole equilatera $xy = c$ tangente la retta data nel punto di coordinate uguali tra loro.

3.- Siccome $365 = (52 \cdot 7) + 1$, ogni anno il capodanno cade il giorno successivo di quello dell'anno precedente (due giorni dopo se l'anno precedente è bisestile).

Per cui

2006	2007	2008 (bis.)	2009	2010	2011	2012 (bis.)
D	L	Ma	G	V	S	D

2013	2014	2015	2016 (bis.)	2017
Ma	Me	G	V	D

Dunque :

Il 1° Gennaio cadrà di nuovo di Domenica nel 2012. Tuttavia, essendo il 2012 bisestile, dal 29 Febbraio l'agenda non andrà più bene. Il primo anno possible per quanto riguarda i giorni sarà il 2017 (non bisestile).

4.- La risposta alla prima domanda è, ovviamente, affermativa : basta prendere un punto P a coordinate intere e considerare la circonferenza di centro C e passante per P . Per esempio se prendo $P = O(0,0)$ la circonferenza di centro C e raggio $= CO = \sqrt{3+5}$ è una di queste.

Osserviamo invece che se due punti distinti A e B appartengono ad una circonferenza, il suo centro appartiene all'asse del segmento AB , che è la retta per il punto medio M del segmento AB , ed ortogonale allo stesso.

Se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, il punto medio è $M((x_A+x_B)/2, (y_A+y_B)/2)$; l'asse ha allora equazione:

$$(x_B-x_A)[\, x - (x_A+x_B)/2 \,] + (y_B-y_A)[\, y - (y_A+y_B)/2 \,] = 0 .$$

Moltiplichiamo per 2 il primo membro ed osserviamo che, se A e B hanno coordinate intere, l'equazione dell'asse così ottenuta risulta del tipo:

(*) $\quad a x + b y + c = 0 \qquad$ con i coefficienti a, b, c interi e a e b non entrambi nulli essendo i due punti A e B distinti.

Vediamo ora se è possibile che $C(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ appartenga all'asse, cioè che

$$a\sqrt{3} + b\sqrt{5} + c = 0 \quad \text{(con a, b, c interi)} .$$

Osservo intanto che $a \neq 0$, altrimenti $b\sqrt{5}$ sarebbe un intero, il che accade solo per $b = 0$, ma allora sarebbe $a = b = 0$ contrariamente a quanto visto in (*). Analogamente $b \neq 0$.

Da $\quad a\sqrt{3} + b\sqrt{5} = -c \quad$ innalzando al quadrato ambo i membri si ottiene :

$3 a^2 + 5 b^2 + 2 a b\sqrt{15} = c^2$, e $2 a b\sqrt{15}$ sarebbe un intero, il che accade solo per $a b = 0$, caso già escluso. Abbiamo trovato un assurdo. La risposta alla seconda domanda è perciò negativa.

5.- Proviamo a risolvere il problema analogo per un polinomio di 2° grado

$$A(x) = b x^2 + c x + d \; .$$

Intanto si ha $A(0) = d$, quindi d è intero. Ma allora anche il polinomio $b x^2 + c x = B(x)$ assume valori interi per ogni x intero.

Si ha $\qquad B(1) = b + c$

$\qquad\qquad B(-1) = b - c$, allora anche $b + c$ è intero, e così pure $b - c$; allora anche la loro somma $2b$ e la loro differenza $2c$.

Proviamo a scegliere allora $\quad$ (*) $\; 2b = 2c = 1 \quad$ (il più piccolo intero).

Il polinomio risulta $\quad 1/2\; x^2 + 1/2\; x = 1/2\; x (x + 1)$. Si vede in effetti che esso va bene, cioè che assume sempre valori interi per ogni x intero, poiché, fissato comunque x intero, o x o x+1 è divisibile per 2 , e quindi il prodotto $1/2\; x\; (x+1)$ è intero. E si vede anche, per la (*) , che $b = 1/2$ è il più piccolo numero > 0 per cui ciò avviene.

Ritorniamo ora a polinomi di 3° grado.

Il polinomio $\quad 1/2 \; x (x + 1)(gx + h) \quad$ (g, h interi)

assume valori interi per ogni x intero (poiché $gx + h$ lo fa), ed allora la risposta alla prima domanda è affermativa (basta porre $g = 1$ e a risulta $= 1/2$). Ma ora possiamo prendere p.e. $g = 1$ e $h = -1$, cosicché per x intero almeno uno dei tre numeri $(x-1), x, (x+1)$ è divisibile per 2 ed uno è divisibile per 3, per cui il polinomio

$$1/6 \; (x-1)\, x\, (x+1)$$

assume sempre per x intero valori interi.

D'altra parte sostituendo nel polinomio $a x^3 + b x^2 + c x + d$ la x con lo 0, risulta che d è intero, sostituendo la x con 1 e con -1, risulta che $a + b + c$ e $-a + b - c$ sono interi, e quindi $2b$ e $2a + 2c$ sono interi. Ancora, per $x = 2$ risulta

$$8a + 4b + 2c \quad \text{intero,}$$

e quindi $8a + 4b + 2c - 4b - (2a + 2c) = 6a$ è intero, e quindi il più piccolo a positivo per cui il polinomio ax^3+bx^2+cx+d assume valori interi per ogni x intero è $= 1/6$.

In fine notiamo che $\binom{n}{3} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)/6$ è in n un polinomio di 3° grado che risponde alla domanda del quesito.

6.- Chiamo A , B , C i tre sottoinsiemi in cui suddivido I , e li ordino in base al numero dei loro elementi. I casi possibili sono i seguenti :

1 1 8 ; 1 2 7 ; 1 3 6 ; 1 4 5 ;

2 2 6 ; 2 3 5 ; 2 4 4 ; 3 3 4 .

Nel primo caso, scelta la coppia di elementi che appartengono a $A \cup B$, la suddivisione di I è determinata; ci sono quindi $\binom{10}{2} = 45$ di tali suddivisioni.

Nel caso 1 2 7 scelgo prima la terna di $A \cup B$ e poi tra i tre della terna quello che costituisce A : ho in tutto $\binom{10}{3} \cdot 3 = 360$ suddivisioni.

Analogamente, nel caso 1 3 6 ho $\binom{10}{4} \cdot 4 = 840$ suddivisioni, e nel caso 1 4 5 abbiamo $\binom{10}{5} \cdot 5 = 1260$ suddivisioni.

Nel caso 2 2 6 scelgo prima la quaterna $A \cup B$ in $\binom{10}{4}$ modi, poi la posso dividere in due coppie in 3 modi; ho in tutto $\binom{10}{4} \cdot 3 = 630$ suddivisioni.

Nel caso 2 3 5 scelgo prima la cinquina $A \cup B$, poi all'interno di questa la coppia A : in tutto $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{2} = 2520$ suddivisioni.

Nel caso 2 4 4 scelgo dapprima $B \cup C$ in $\binom{10}{8}$ modi, poi lo divido in due sottoinsiemi di quattro elementi ciascuno in $\binom{8}{4} : 2$ modi. Ci sono quindi $\binom{10}{8} \cdot \binom{8}{4} : 2 = 1575$ di tali suddivisioni.

Analogamente, ci sono $\binom{10}{6} \cdot \binom{6}{3} : 2 = 2100$ suddivisioni nell'ultimo caso.

In tutto abbiamo

$$45 + 360 + 840 + 1260 + 630 + 2520 + 1575 + 2100 = 9330 \text{ possibilità.}$$

Soluzione alternativa :

Tra le suddivisioni di I in 3 sottoinsiemi, quelle in cui $A = \{ 0 \}$ sono tante quante le suddivisioni dell'insieme $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ in 2 sottoinsiemi.

Una qualunque delle rimanenti suddivisioni di I si può ottenere prendendo una suddivisione di $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 9 \}$ in 3 sottoinsiemi e poi aggiungendo lo 0 ad uno dei 3 sottoinsiemi. Queste ultime suddivisioni di I sono quindi 3 volte le suddivisioni di $\{1, 2, 3, . . . , 9 \}$ in 3 sottoinsiemi.

Si ha quindi : $S(10,3) = S(9,2) + 3\, S(9,3)$,

ove con $S(n,k)$ si è indicato il numero delle suddivisioni di un insieme con n elementi in k suoi sottoinsiemi.

Si vede subito anzi che, in generale, vale la

$$(*) \qquad S(n, k) = S(n-1, k-1) + k\cdot S(n-1, k) .$$

Si ha, ovviamente, per ogni n , $S(n,1) = 1$ e $S(n,n) = 1$.

Allora possiamo costruirci un triangolo, analogo a quello di Tartaglia, nel seguente modo :

Nella prima colonna c'è sempre l' 1 ; nella seconda colonna si incomincia con l' 1 alla seconda riga, e poi nelle righe successive si mette 1+2volte il numero precedente ; la seconda colonna risulta così 1, $1+2\cdot1=3$, $1+2\cdot3=7$, $1+2\cdot 7=15$, $1+2\cdot 15=31$, ecc…

Nella terza colonna si incomincia con l' 1 (alla terza riga), poi la somma di 3 volte il numero che sta sopra + quello sempre della riga sopra , ma della colonna precedente (2^a), cioè

1, $3\cdot1+3=6$, $3\cdot6+7=25$, $3\cdot25+15=90$, $3\cdot90+31=301$, ecc., finché alla decima riga si trova giusto 9330 , che è il numero delle suddivisioni di un insieme di 10 elementi in 3 sottoinsiemi.

Il triangolo si può completare e ingrandire, tenendo sempre conto della (*), ottenendo una tabella degli S(n, k) che son detti **numeri di Stirling.**

1				
1	1			
1	3	1		
1	7	6	1	
1	15	25	…	1
1	31	90	…	…
1	63	301	…	…
1	127	966	…	
1	255	3025	…	…
1	511	**9330**	…	…

7.- Con riferimento alla figura 3 , consideriamo l'angolo in N che insiste sull'arco PQ = PD+DQ , e l'angolo in P che insiste sull'arco MN = MB+BN.

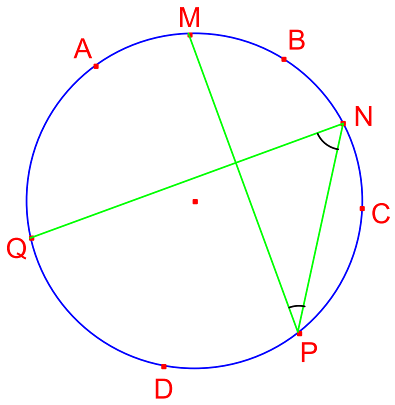

FIG. 3

La somma di questi due angoli è uguale ad un angolo alla circonferenza che insista su un arco uguale alla somma

MB + BN + PD + DQ = 1/2 AB + 1/2 BC + 1/2 CD + 1/2 DA

che è uguale a 1/2 della circonferenza.

Ma un angolo alla circonferenza che insista su metà circonferenza è retto, quindi N + P è retto, quindi è rettangolo il triangolo P I N . c. v. d.

Soluzione alternativa : Facciamo riferimento alla figura 4.

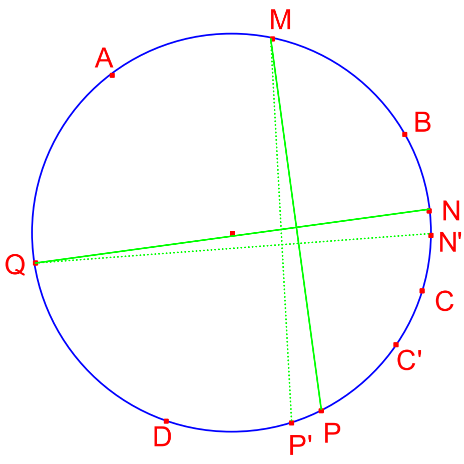

FIG. 4

Spostiamo il punto C nella posizione C' . Per il nuovo quadrilatero A B C' D i punti Q ed M saranno gli stessi, invece N si sposterà in una posizione N' con l'arco N N' = 1/2CC' e P andrà in P' con l'arco PP' = = 1/2 CC'. Ma allora le due rette MP e QN , che si sono spostate nelle rette MP' e QN' , han ruotato, intorno a M e Q rispettivamente, dello stesso angolo, e quindi l'angolo tra MP e QN è uguale all'angolo tra MP' e QN' . Dunque per tutti i quadrilateri inscritti l'angolo tra le rette in questione è sempre lo stesso. Siccome per un quadrato questo angolo è manifestamente retto, si ha il risultato.

8.- Osserviamo, usando la formula della potenza di un binomio, che

$(2+\sqrt{3})^k = 2^k + k\cdot 2^{k-1}\sqrt{3} + \binom{k}{2} 2^{k-2}\cdot 3 + \ldots + \binom{k}{k-2}2^2\sqrt{3}^{k-2} + k\cdot 2\sqrt{3}^{k-1} + \sqrt{3}^k$

e, se k è pari

$(2-\sqrt{3})^k = 2^k - k\cdot 2^{k-1}\sqrt{3} + \binom{k}{2} 2^{k-2}\cdot 3 - \ldots + \binom{k}{k-2}2^2\cdot 3^{(k-2)/2} - k\cdot 2\sqrt{3}^{k-1} + 3^{k/2}$.

Vedo che nei secondi membri i termini di posto pari sono a due a due opposti e quelli di posto dispari a due a due coincidono; perciò sommando termine a termine ottengo

$S_k = (2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k = 2\,[2^k + \binom{k}{2} 2^{k-2}\cdot 3 + \ldots + \binom{k}{k-2} 2^2\cdot 3^{(k-2)/2} + 3^{k/2}]$

e mi accorgo che tutti i termini entro parentesi quadra sono (interi) divisibili per due, meno l'ultimo, per cui S_k è divisibile per 2 , ma non per 4 .
Se invece k è dispari

$(2-\sqrt{3})^k = 2^k - k\cdot 2^{k-1}\sqrt{3} + \binom{k}{2} 2^{k-2}\cdot 3 - \ldots - \binom{k}{k-2} 2^2\cdot\sqrt{3}^{k-2} + k\cdot 2\cdot 3^{(k-1)/2} - \sqrt{3}^k$, ed allora

$S_k = (2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k = 2\,[2^k + \binom{k}{2}2^{k-2}\cdot 3 + \ldots + \binom{k}{k-3}2^3 3^{(k-3)/2} + \binom{k}{k-1}2\cdot 3^{(k-1)/2}]$.

In questo caso tutti i termini entro parentesi quadra sono divisibili per 2
quindi S_k è divisibile per 4 .

Soluzione alternativa :
Per $k = 0$ $S_o = 1 + 1 = 2$; per $k = 1$ $S_1 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$.
Osserviamo che :

$S_k (2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^{k+1} + (2-\sqrt{3})^{k-1}(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^{k+1} + (2-\sqrt{3})^{k-1}$, e

$S_k(2-\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^{k-1}(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})^{k+1} = (2+\sqrt{3})^{k-1} + (2-\sqrt{3})^{k+1}$, da cui, sommando membro a membro

$S_k\ S_1 = S_{k+1} + S_{k-1}$, cioè $S_{k+1} = S_k\ S_1 - S_{k-1}$. Ed ora è facile applicare l'induzione.