24ª Gara Matematica "Città di Padova"    28 Marzo 2009

# SOLUZIONI

**1.-** Consideriamo undici numeri naturali dispari successivi :

$2a + 1, 2a + 3, 2a + 5, \dots , 2a + 2\cdot 10 + 1$ (dove $a \in \mathbb{N}$).

La loro somma è uguale a : $11\cdot\frac{2a+1+2a+2\cdot 10+1}{2} = 11\cdot(2a+11)$.

Dobbiamo quindi trovare un numero naturale $n$ tale che $n^3 = 11\cdot(2a+11)$ e perciò $n$ dovrà essere multiplo di 11 : consideriamo i più piccoli multipli di 11, essi sono 11, 22, 33, … ecc.

Vediamo se $n = 11$ può andar bene:

$11^3 = 11\cdot(2a + 11) \leftrightarrow 121 = 2a +11 \leftrightarrow 2a = 110$ e va bene;

$22^3 = 11 \cdot(2a + 11)$ non può andar bene poiché il primo membro è pari mentre il secondo è dispari;

$33^3 = 11\cdot(2a + 11) \leftrightarrow 3^3\cdot 11^2 = 2a + 11 \leftrightarrow 2a = 11\cdot(3^3\cdot 11 - 1)$ e va bene .

*I due numeri cercati sono 11 e 33*.

**2.-** Osserviamo intanto che la condizione *b*) equivale al fatto che tutte le cifre del numero (salvo la quarta e la terza che sono uguali ) sono diverse tra loro.

Scegliamo per prima la seconda cifra : possiamo farlo in 5 modi ; scegliamo ora la settima cifra e distinguiamo due casi : *o* è zero (*1* scelta) *oppure* è uno degli altri 4 numeri pari (*4* scelte); scegliamo ora la prima cifra : nel primo caso tra gli otto numeri ancora disponibili (8 scelte), nel secondo caso tra i sette numeri di cui dispongo (0 non occupa il primo posto) (7 scelte); la terza cifra si può scegliere tra le sette non ancora impegnate (7 scelte); la quarta in un unico modo perché uguale alla terza; la quinta in 6 modi tra le sei cifre ancora disponibili e, infine, la quinta in 5 modi. In totale :

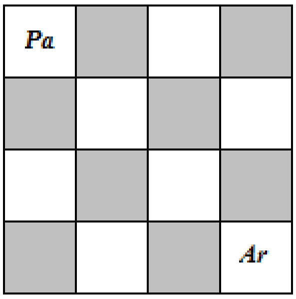
$5\cdot \underline{1}\cdot 8\cdot 7\cdot 1\cdot 6\cdot 5 + 5\cdot \underline{4}\cdot 7\cdot 7\cdot 1\cdot 6\cdot 5 = 37800$ modi diversi di scegliere un tal numero.

**3.-** Un cammino di lunghezza minima consta di 6 passi : 3 a destra, 3 verso il basso.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Pa* | *1* | *1* | *1* |
| *1* | *2* | *3* | ... |
| *1* | *3* | ... | ... |
| *1* | ... | ... | *Ar* |

Tali cammini sono tanti quanti i modi di scegliere tra i sei passi i tre da fare a destra e gli altri tre verso il basso. Nella figura accanto abbiamo indicato nelle caselle il numero dei modi diversi possibili per raggiungerla partendo da *Pa* : siccome si arriva in una casella *o* da quella soprastante *o* da quella alla sua sinistra, il numero dei modi per raggiungerla (cioè il numero che occupa una casella) si ottiene sommando quello della casella sopra con quello della casella a sinistra ottenendo così una parte del *Triangolo di*

*Tartaglia*. Coloriamo ora le caselle alternativamente e osserviamo che per giungere nella casella *Ar* (bianca) dalla partenza *Pa* (bianca) il signor S. dovrebbe attraversare 8 caselle scure e 7 caselle bianche (*Ar* compresa).




Siccome ad una casella bianca si arriva sempre attraversando una casella scura il numero delle caselle scure dovrebbe essere uguale a quello delle bianche : nel nostro caso in ogni possibile cammino rimane sempre almeno una casella nera non attraversata.

**4.-** Di siffatti numeri ce n'è più d'uno. Per costruirne uno consideriamo $10^{1000}$ , esso ha 1000 zeri e quindi 1001 cifre.
$(10^{1000} - 1)^2$ ha esattamente 2000 cifre e non è una potenza di 10.

Infatti $10^{2000}$ ha esattamente 2001 cifre ed è il più piccolo numero con 2001 cifre, inoltre vale $(10^{1000} - 1)^2 < 10^{2000}$ perciò $(10^{1000} - 1)^2$ ha meno di 2001 cifre.
D'altra parte se sottraggo un numero di $n$ cifre da uno con $m \geq n + 2$ cifre ottengo un numero che ha almeno $m - 1$ cifre :

$$(10^{1000} - 1)^2 = 10^{2000} + 1 - 2\cdot 10^{1000}$$

$10^{2000} + 1$ ha 2001 cifre, $2\cdot 10^{1000}$ ne ha 1001, cosicché la loro differenza ne ha almeno 2000.

**5.-** Si vede subito che :

$$(x - 1 + \sqrt{3}) \cdot (x - 1 - \sqrt{3}) = x^2 - 2x - 2.$$

Se dividiamo $P(x^2)$ per $x^2 - 2x - 2$ otteniamo :

$$P(x^2) = (x^2 - 2x - 2)\cdot Q(x) + R(x)$$

dove il polinomio resto $R(x)$ o è il polinomio nullo oppure un polinomio di grado $\delta \leq 1$, cioè del tipo $R(x) = ax + b$.
Sappiamo che $P(x)$ ha coefficienti interi ed essendo il divisore un polinomio monico anche $Q(x)$ e $R(x)$ hanno coefficienti interi e dunque a e b sono interi.
Sappiamo, inoltre, che $1 - \sqrt{3}$ è una radice di $P(x^2)$ e quindi :

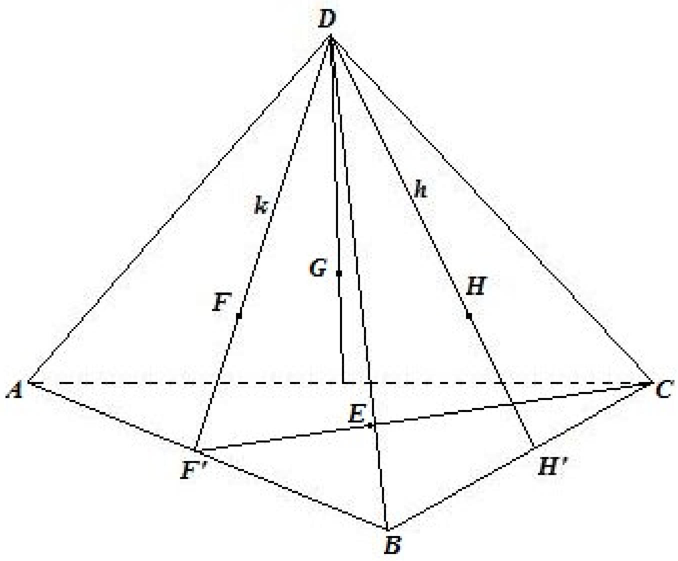
$$0 = P((1 - \sqrt{3})^2) = Q(1 - \sqrt{3}) \cdot 0 + a \cdot (1 - \sqrt{3}) + b$$

da cui a = 0 e b = 0.
Ma allora $P(x^2) = Q(x) \cdot (x^2 - 2x - 2) = Q(x) \cdot (x - 1 + \sqrt{3}) \cdot (x - 1 - \sqrt{3})$ .
Anche la b) è vera, infatti :

$$4 - 2\sqrt{3} = (1 - \sqrt{3})^2$$

ed abbiamo già visto che $P((1 - \sqrt{3})^2 = 0$.

**6.-**




Per ragioni di simmetria i punti di tangenza della sfera inscritta con le quattro facce del tetraedro detti E, F, G, H sono i baricentri delle facce stesse e costituiscono a loro volta un tetraedro *inscritto* nella sfera e nel tetraedro ABCD.

Per trovare il rapporto tra i volumi dei due tetraedri è sufficiente determinare il lato di quello inscritto (per esempio FH) : siano h, k le altezze delle facce BCD e ABC rispettivamente, esse cadono nei punti H' e F' punti medi dei rispettivi spigoli e dunque F'H' è metà dello spigolo .

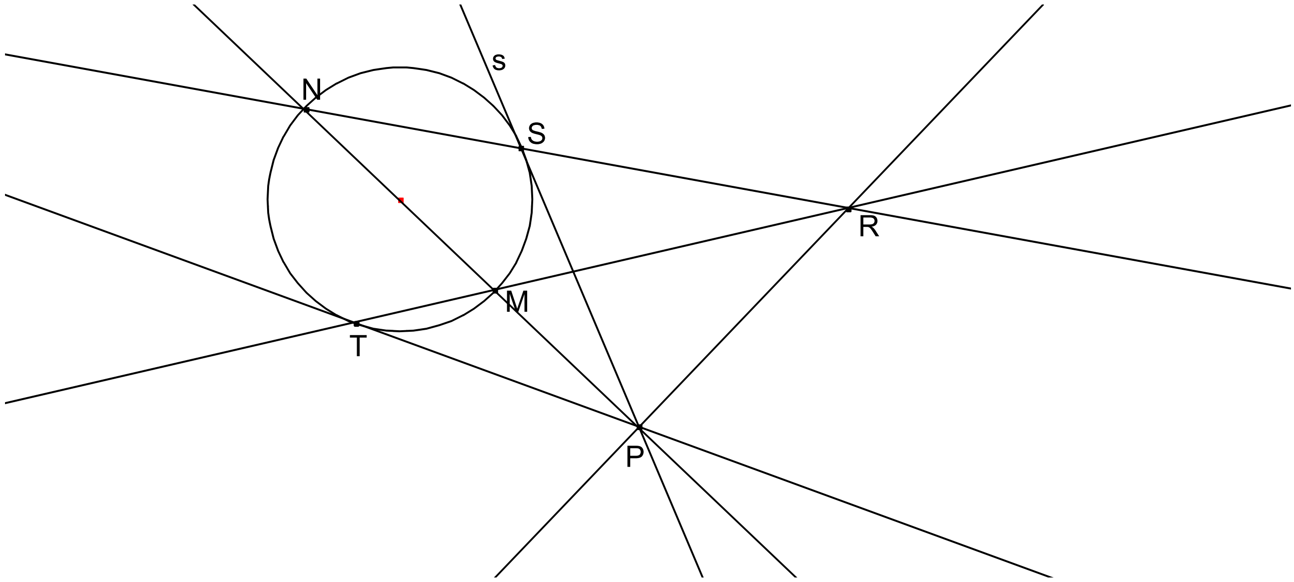
Il baricentro di un triangolo divide la mediana in parti proporzionali a 1 e 2, perciò DF = 2·FF' cioè $DF = \frac{2}{3}DF'$ e quindi $FH = \frac{2}{3}F'H' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC$ per la similitudine tra DF'H' e DFH.

Se gli spigoli sono in rapporto 3:1, allora i volumi sono in rapporto $3^3$:1.

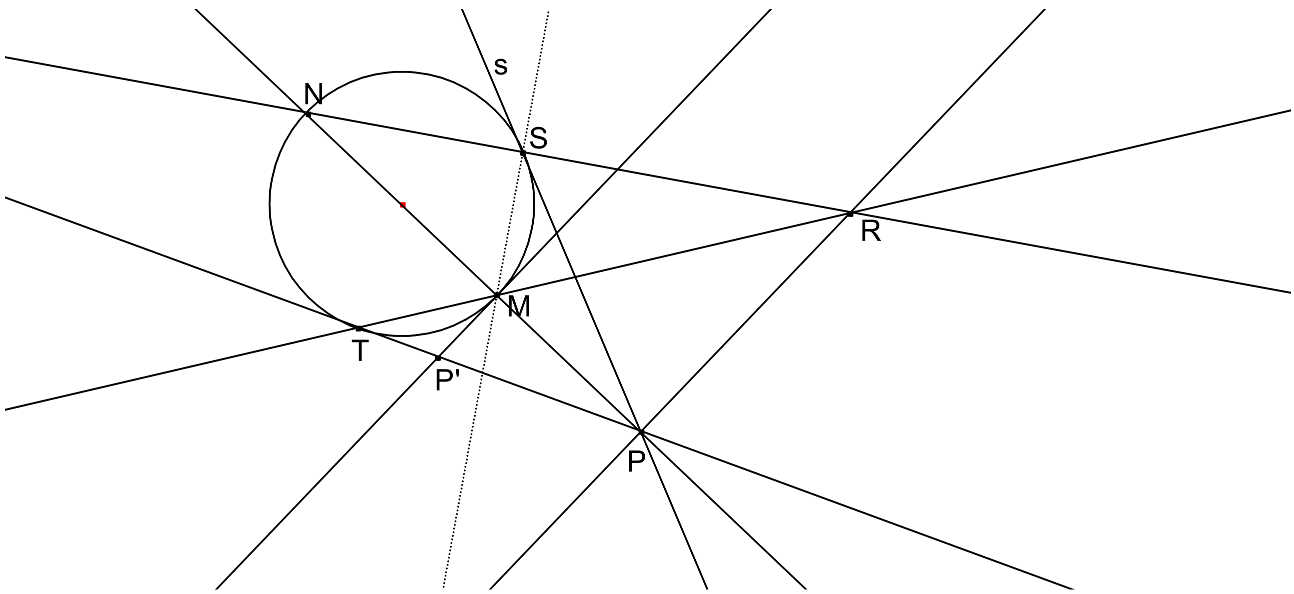
Anche per il terzo tetraedro inscritto avremo in rapporto al secondo spigoli come 3:1 e volumi come $3^3$:1.

In definitiva il rapporto tra gli spigoli del primo e del terzo sarà $3^2$:1 e per i volumi $(3^3)^2$:1, cioè 729:1.

**7.-**




Consideriamo i triangoli rettangoli RPN e MSN : essi hanno in comune l'angolo di vertice N e quindi ∠(SMN) = ∠(PRN) .
Vale anche ∠(SMN) = ∠(NSs) perché *alla circonferenza che insistono sullo stesso arco*.
Pertanto : ∠(PSR) = ∠(NSs) (opposti al vertice) = ∠(SMN) = ∠(PRS) e il triangolo PRS risulta isoscele di base SR e PR = PS (=PT).




Se tracciamo la tangente alla circonferenza in M essa risulta perpendicolare al diametro MN e incontra PT nel punto P', i due triangoli P'TM e PTR sono simili e isosceli : P'TM isoscele perché da P' escono le due tangenti P'T e P'M, PTR isoscele perché PT = PR; per la similitudine possiamo dire che ∠(TP'M) = ∠(TPR) (corrispondenti di parallele tagliate da trasversale).
Cosicché ∠(PTR) = ∠(P'TM) ma PT e P'T sono lati che stanno sulla stessa retta, il vertice T

è in comune e quindi stanno sulla stessa retta anche i due lati TM e TR : T, M, R sono allineati.

**8.-** Indichiamo con x la lunghezza della piscina, con $v_l$ la velocità di $N_V$ il nuotatore più veloce con $v_2$ la velocità del nuotatore più lento $N_L$ .
Quando si incontrano la prima volta, dei due lati di partenza il più vicino è quello da cui è partito $N_L$ che ha percorso 20 m , $N_V$ ne ha perciò percorsi x – 20 e se indichiamo con $t_l$ il tempo intercorso dalla partenza, possiamo scrivere :

$$v_L \cdot t_1 = 20$$

$$v_V \cdot t_1 = x - 20$$

così quando si incontrano nuovamente $N_V$ ha fatto più strada ed è quindi più vicino al lato da cui è partito di quanto lo sia $N_L$ dal proprio, perciò $N_V$ ha percorso 2x – 10 m, mentre $N_L$ ne ha percorsi x + 10.
Abbiamo perciò :

$$v_L \cdot t_2 = x + 10$$

$$v_V \cdot t_2 = 2x - 10$$

Ora passando ai rapporti :

$$\frac{v_V}{v_L} = \frac{x-20}{20} = \frac{2x-10}{x+10}$$

da cui : $x^2 - 20x + 10x - 200 = 40x - 200 \rightsquigarrow x^2 = 50x \rightsquigarrow x = 50$ (scartando x = 0).
La piscina è lunga 50 m .