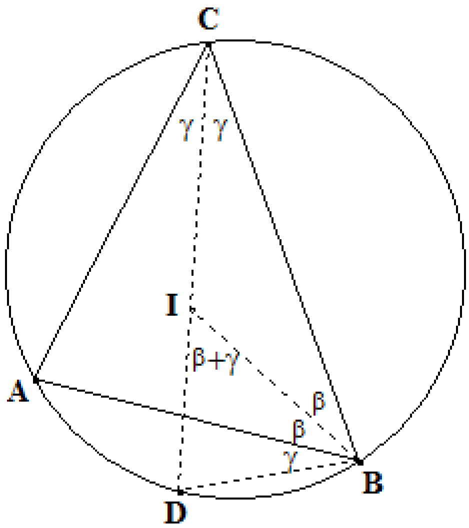
29^a Gara matematica “Città di Padova” 29 Marzo 2014

Soluzioni

1.- Indichiamo con 2β e 2γ le ampiezze degli angoli in B e in C del triangolo A B C .



DA = DB in quanto D appartiene alla bisettrice in C del triangolo e dunque i due archi, e le relative corde AD e DB sono uguali.

Nel triangolo B I D l’angolo DIB = $\beta + \gamma$ essendo un angolo esterno del triangolo I B C ; inoltre DBA = γ (angolo alla circonferenza che insiste, come DCA sull’arco AD), AIB = β (in quanto I appartiene alla bisettrice in B al triangolo) e quindi DBI (= DBA + ABI) = $\gamma + \beta$; dunque DIB = DBI , il triangolo B I D è isoscele, DB = DI , c.v.d.

2.- Basterà dimostrare che è divisibile per 2 , per 3 e per 5 .

Per 2 : $15x^2 + 31x = x(15x + 31)$ = (a meno di multipli di 2) = $x(x + 1)$ che è certamente divisibile per 2 essendo il prodotto di due numeri successivi.

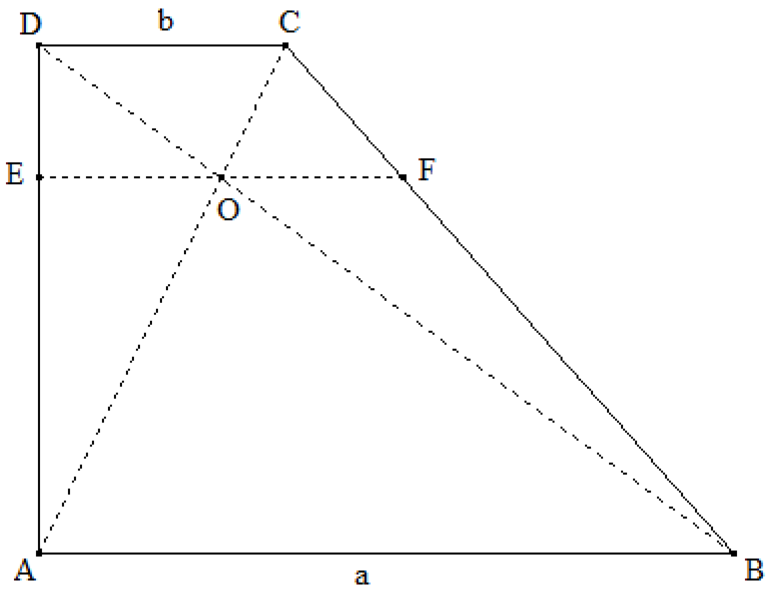
Per 3 : $10x^3 – 31x = x(10x^2 – 31)$ = (a meno di multipli di 3) = $x(x^2 – 1)$ = $= (x – 1)\, x\, (x + 1)$ che è divisibile per 3 essendo il prodotto di tre numeri successivi.

Per 5 : $6x^5 – 31x = x(6x^4 – 31)$ = (a meno di multipli di 5) = $x(x^4 – 1)$ = $= (x – 1)\, x\, (x + 1)(x^2 + 1)$; se il 5 divide $(x – 1)\, x\, (x + 1)$ il gioco è fatto, altrimenti divide o $(x – 2)$ o $(x + 2)$; se divide $(x – 2)$ si ha $x = 2 + 5k$, $x^2 = 4 + 20k + 25k^2$, $x^2 + 1 = 5 + 20k + 25k^2$, ed allora il 5 divide anche $x^2 + 1$; analogamente, se il 5 divide $x + 2$, si ha $x^2 + 1 = 5 – 20h + 25h^2$ ed allora il 5 divide anche $x^2 + 1$. c.v.d.

3.- Essendo i due triangoli ABC e OFC simili (cfr. la figura), si ha

$$(1) \quad a : OF = AC : OC$$

ed essendo ABO e CDO simili, anche :



$$a : b = AO : OC$$

Da qui

$$(a+b) : b = (AO + OC) : OC$$

cioè

$$(a+b) : b = AC : OC$$

e , dalla (1)

$$a : OF = (a+b) : b$$

da cui

$$OF = \frac{ab}{a+b}$$

.

Sostituendo nel ragionamento precedente le lettere B, F, C ordinatamente con le A, E, D si ottiene altresì

$$OE = \frac{ab}{a+b}$$

i due segmenti sono uguali .
Notiamo inoltre che l'ipotesi che il trapezio sia rettangolo è inessenziale .

<u>**4.-**</u> Se la somma dev'essere massima, le cifre maggiori 9 , 8 , 7 saranno nei tre numeri al posto delle centinaia, le tre successive al posto delle decine ed in fine le tre più piccole, 1 , 2 , 3 al posto delle unità, e si avrà, ad esempio

$$963 + 852 + 741 = 2556$$

Naturalmente anche p.e. i tre numeri 763 , 852 e 941 danno il massimo per la somma (è sempre = 2556) , ma il loro prodotto è maggiore di quello dei tre numeri della prima terna :

$852 \cdot (941 \cdot 763) = 852 \cdot 717.983 > 852 \cdot 713.583 = 852 \cdot (963 \cdot 741)$.

Quindi non è vero che se una terna dà il massimo per la somma dà anche il massimo per il prodotto.

5.- Sia v_1 la velocità di C_1 , v_2 quella di C_2 , G la lunghezza della pista. Si ha allora :

$$(i) \quad G = (v_1 - v_2) \cdot 504$$
$$(ii) \quad G = (v_1 + v_2) \cdot 63$$

da cui

$$G \cdot \left(\frac{1}{504} + \frac{1}{63}\right) = 2v_1$$

cioè

$$G\left(\frac{1}{56}\right) = 2v_1$$

$$G = 112 \cdot v_1$$

$$G\left(\frac{1}{63} - \frac{1}{504}\right) = 2v_2$$

cioè

$$G\left(\frac{1}{72}\right) = 2v_2$$

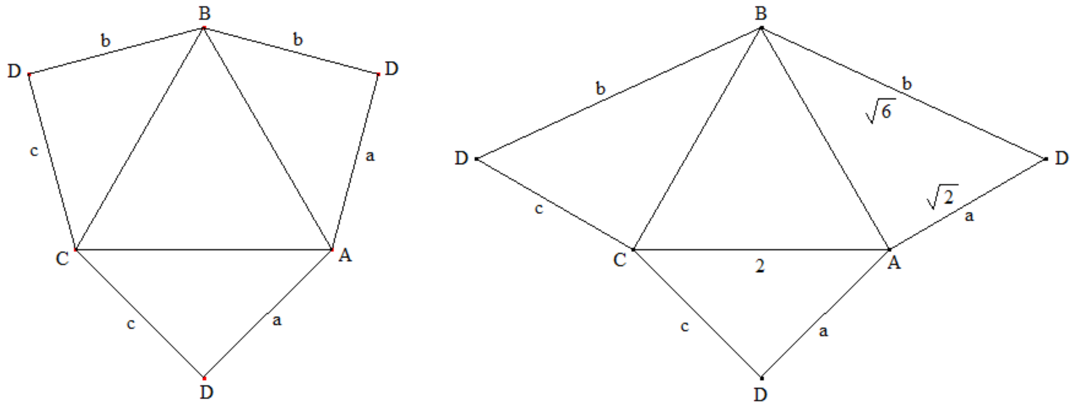
$$G = 144 \cdot v_2$$

Dunque il primo ciclista impiega 112 secondi per compiere un giro di pista, il secondo ne impiega 144 .

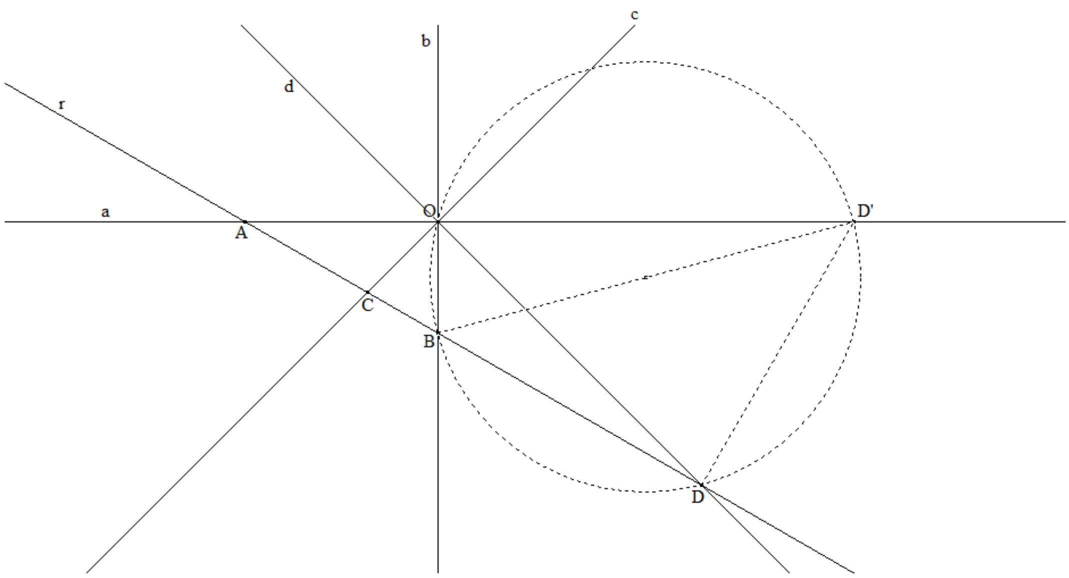
6.- Indichiamo con D il quarto vertice del tetraedro , e supponiamo dapprima che le tre facce cercate (quelle che contengono D e che sono triangoli rettangoli) abbiano tutte l'angolo retto in D ; allora, detti a , b , c gli spigoli del tetraedro che concorrono in D , si vede subito che a = b = c ; infatti una delle facce è un triangolo rettangolo di cateti a , b e di ipotenusa 2 , un'altra faccia ha per cateti b , c e per ipotenusa 2 , quindi questi due triangoli coincidono e a = c ; analogamente b = a . Da qui $a = b = c = \sqrt{2}$ .Inoltre i tre spigoli sono a due a due ortogonali e allora il volume del tetraedro è $a\,b\,c/6 = \sqrt{2}/3$.

Supponiamo ora che uno almeno dei tre triangoli rettangoli non abbia l'angolo retto in D : sia A B D questo triangolo, ed abbia retto l'angolo in A . Allora i lati a ed AB = 2 sono i suoi cateti e b ne è l'ipotenusa, per cui b > 2 , $b^2 = a^2 + 4$. Il triangolo B C D ha per lati b , c e BC = 2 ; BC è un suo cateto (BC < b), la sua ipotenusa è o b o c ; ma c non può essere, infatti si avrebbe $c^2 = b^2 + 4 = a^2 + 8$, e, dal triangolo A C D , $c^2 = a^2 + 4$, assurdo. Dunque in B C D b è l'ipotenusa. Ma allora i due triangoli rettangoli A B D e B C D hanno uguali l'ipotenusa e un cateto e dunque coincidono, in particolare c = a . Ne segue che il triangolo rettangolo A C D è isoscele, e quindi $a = \sqrt{2}$.

Si verifica facilmente, tenendo conto che D appartiene alle tre sfere di centro, rispettivamente, A , B , C e raggi √2 , √6 , √2 , che la distanza di D dal piano ABC è √6 /3 , e dunque il volume del tetraedro è = area ABC · √6/9 = √3 · √6 /9 = √2/3 . Osserviamo infine che i due tetraedri trovati si possono ottenere dal cubo di lato √2 e vertice D ; il primo sezionandolo con il piano per A , B , C (i tre vertici del cubo piu` vicini a D), il secondo scegliendo tre dei suoi vertici A , D , C vertici di una stessa faccia del cubo, e come quarto B , il vertice del cubo del cubo opposto a D . La figura sottostante illustra lo sviluppo piano della superficie dei due tetraedri soluzione del problema .



7.- Indichiamo con O il punto comune alle quattro rette. Con riferimento al triangolo O C D , i punti A e B sono le intersezioni delle bisettrici dell'angolo in O con il lato CD , e perciò per il teorema sulle bisettrici, AC : AD = CB : BD = OC : OD . Verifichiamolo direttamente nel nostro caso particolare :



Scambiando i due medi nella nostra proporzione otteniamo AC : CB = AD : BD , proporzione che è equivalente a quella che vogliamo dimostrare. Per la particolarità della figura possiamo di nuovo ottenere il risultato applicando il teorema delle bisettrici al triangolo O A B ; verifichiamo, p.e., che AD : BD = OA : OB = √3 . La retta per D ed ortogonale ad r incontra la retta a in un punto D' . Il triangolo

rettangolo A D D’ è la metà di un triangolo equilatero, perciò AD : DD’ = $\sqrt{3}$.
Ma il quadrilatero O B D D’ è inscritto nel circolo di diametro BD’, per cui sono uguali i due angoli alla circonferenza BOD e BD’D = 45^0 , e risulta quindi BD = DD’ , quindi AD : BD = AD : DD’ = $\sqrt{3}$, c.v.d.

8.- Diana è al primo posto : o è la sola al primo posto, oppure al primo posto con lei c’è qualche ex-aequo ; dunque le graduatorie possibili sono due volte quelle con quattro elementi. Vediamo allora quante sono queste ultime. Distinguiamo i vari casi:

Senza ex-aequo	**4! = 24**
Con 2 ex-ae. al 1^0 posto	**12**
Con 2 ex-ae. al 2^0 posto	**12**
Con 2 ex.ae. al 3^0 posto	**12**
Con 2 ex-ae. al 1^0 posto **e** 2 ex-ae. al 3^0 posto	**6**
Con 3 ex-ae. al 1^0 posto	**4**
Con 3 ex-ae. al 2^0 posto	**4**
Con 4 ex-ae.	**1**
Totale	**75**

in tutto 75 casi possibili. Dunque le graduatorie dei cinque vincitori con Diana al primo posto sono 150.