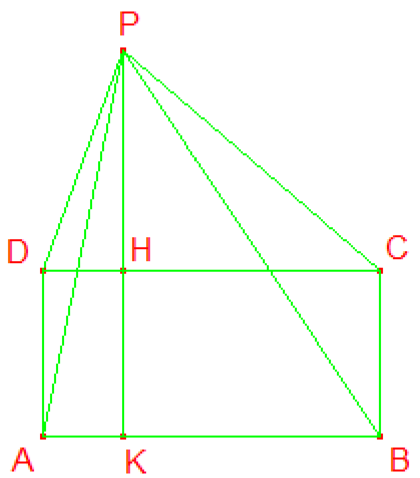
25ª GARA MATEMATICA “CITTÀ DI PADOVA”

20 MARZO 2010

TESTO E SOLUZIONI

1.- È dato un rettangolo ABCD. Si dimostri che per un qualunque punto P del piano vale : $PD^2 + PB^2 = PA^2 + PC^2$ con AC una diagonale .

Facciamo riferimento alla figura :



Applicando il teorema di Pitagora , risulta :

$$PD^2 = PH^2 + HD^2 \ ; \ PB^2 = PK^2 + KB^2$$

$$PA^2 = PK^2 + AK^2 \ ; \ PC^2 = PH^2 + HC^2$$

In definitiva, poiché AK = DH e KB = HC , otteniamo :

$$PD^2 + PB^2 = PH^2 + HD^2 + PK^2 + KB^2 = PH^2 + HC^2 + PK^2 + AK^2 = PC^2 + PA^2$$

Come si voleva .

2.- Trovare tre numeri dispari successivi la somma dei cui quadrati è un numero di quattro cifre tutte uguali.

Si verifichi che la somma dei quadrati di tre numeri pari successivi non è mai un numero di quattro cifre tutte uguali.

Siano n – 2 , n , n + 2 i tre numeri successivi (con n dispari) , allora la somma dei loro quadrati

$$n^2 - 4n + 4 + n^2 + n^2 + 4n + 4 = 3n^2 + 8$$

Siccome n è dispari, lo è anche $3n^2$ ed anche $3n^2 + 8$.

Quindi i casi possibili sono :

$3n^2 + 8 = 1111$, $3n^2 + 8 = 3333$, $3n^2 + 8 = 5555$, $3n^2 + 8 = 7777$, $3n^2 + 8 = 9999$

Scartiamo i casi 3333 e 9999 perché divisibile per 3, mentre $3n^2 + 8$ non lo è .
Scartiamo anche 1111 e 7777 , perché 1111 – 8 e 7777 – 8 non sono divisibili per 3.

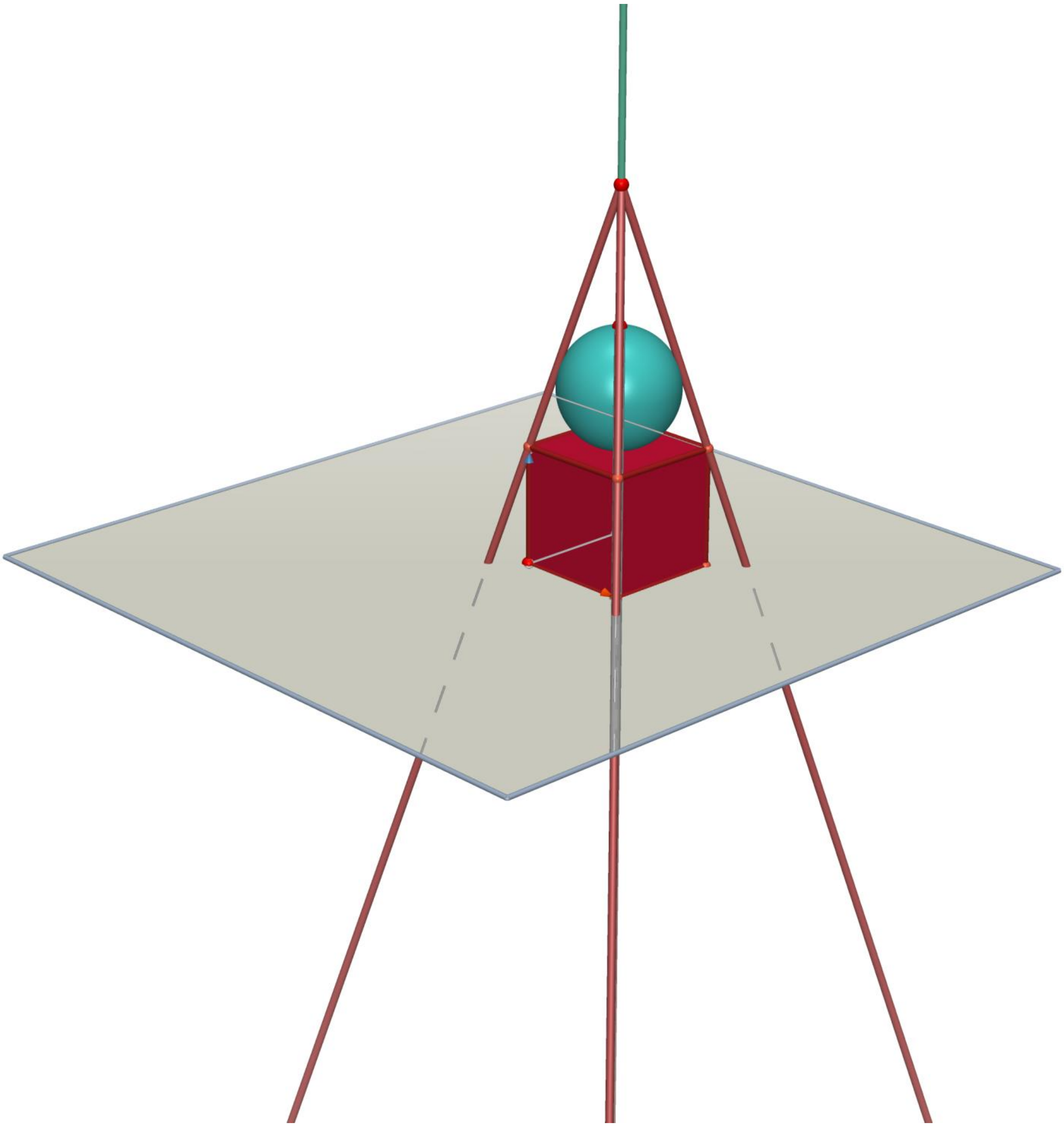
Rimane solo 5555 che va bene perché 5555 – 8 è divisibile per 3 :

$$5555 - 8 = 5547 \rightsquigarrow 5547 : 3 = 1849 \rightsquigarrow \sqrt{1849} = 43$$

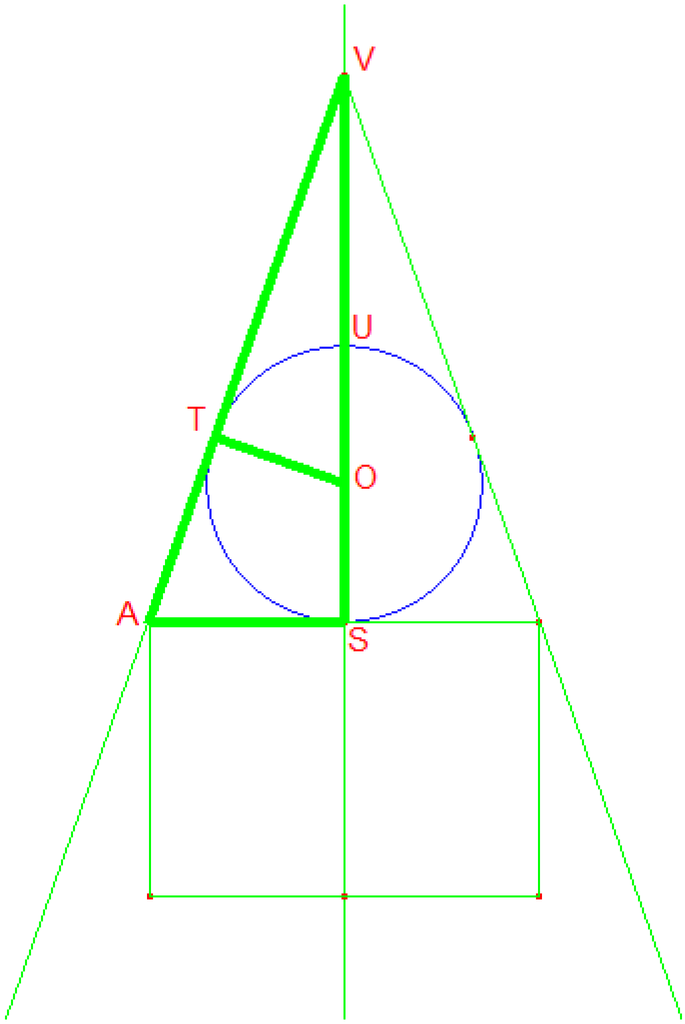
Se invece n è pari i casi diventano quattro : 2222, 4444, 6666, 8888 .
Scartiamo 6666 perché divisibile per 3, scartiamo 4444 perché 4444 – 8 non è divisibile per 3, d’altra parte neppure 2222 e 8888 vanno bene perché 2222 – 8 = 2214 non è il triplo di un quadrato e così 8880 che è divisibile per 10 ma non per 100 .

3.- Una sfera di raggio r è posata sopra un cubo di lato 2r e la retta a congiungente il centro della sfera con quello del cubo passa per il punto di appoggio.
Per quali punti della retta a il cubo è tutto nascosto dalla sfera ?

Il cubo sarà nascosto dalla sfera per quei punti P della retta a tali che il cono di vertice P e tangente alla sfera contenga il cubo :



Possiamo osservare che il cono deve contenere una diagonale della faccia quadrata sulla quale poggia la sfera e quindi considerando la sezione :



Possiamo sfruttare la similitudine tra i triangoli VTO e VSA, così posto x = UV abbiamo :

$$TV = \sqrt{(r+x)^2 - r^2} = \sqrt{2rx + x^2}$$

$$VS : AS = VT : OT \rightsquigarrow (2r+x) : r\sqrt{2} = \sqrt{2rx + x^2} : r$$

$$r(2r + x) = r\sqrt{4rx + 2x^2}$$

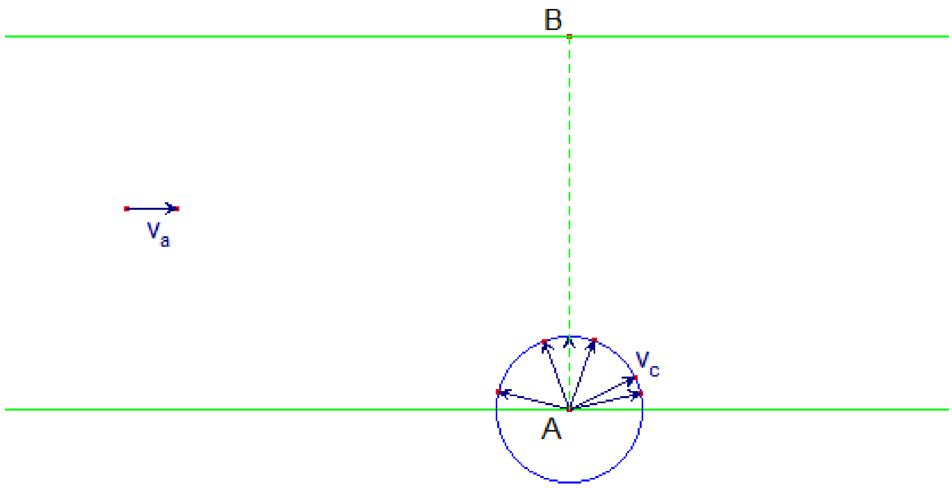
$$2r + x = \sqrt{4rx + 2x^2} \rightsquigarrow 4r^2 + 4rx + x^2 = 4rx + 2x^2$$

$$x^2 = 4r^2 \rightsquigarrow x = 2r$$

4.- Un cane deve attraversare un fiume (rettilineo e di larghezza costante L) . La velocità del cane nell'acqua è di 2.5 Km/h . La velocità dell'acqua in ogni punto del fiume è costante e pari a 2 Km/h .

a) qual è il tempo minimo di attraversamento ? a quali traiettorie corrisponde ?
b) qual è il tempo di attraversamento minimo relativo ad una traiettoria di lunghezza minima?

La velocità v_c del cane in acqua è costante e si può rappresentare con un vettore di modulo 2.5 e direzione qualsiasi compresa tra 0° e 180° , come in figura :



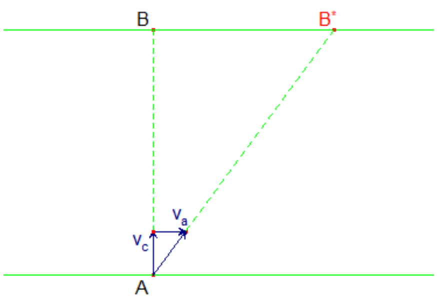
Mentre la velocità dell'acqua v_a è un vettore di modulo 2 e direzione parallela alle rive e inoltre $v_a < v_c$.

Se il cane deve impiegare il minor tempo per attraversare il fiume dovrà fare in modo che la sua velocità sia massima nella direzione che rende minimo l'attraversamento, cioè la direzione AB e per far ciò dovrà mantenersi sempre perpendicolare alla corrente :

se L indica la larghezza del fiume in km e t viene misurato in ore sarà :

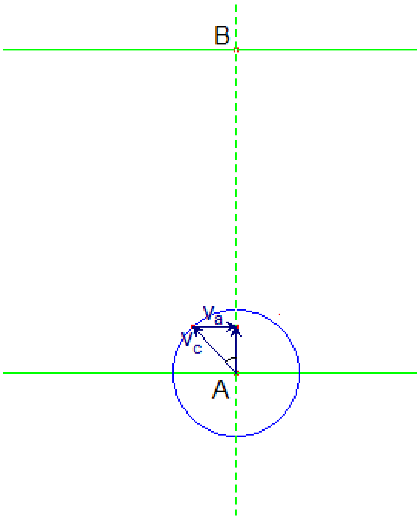
$$t_{min} = \frac{L}{2.5} \ (h)$$

Inoltre il punto di approdo del cane sarà B*, come in figura :



$$\frac{BB^*}{L} = \frac{v_a}{v_c}$$

La traiettoria di lunghezza minima AB si realizza quando la risultante dei due vettori velocità ha la direzione di AB e quindi i vettori v_a e v_c devono disporsi come in figura :



In tal caso la velocità risultante v_r si potrà determinare con il teorema di Pitagora :

$$v_r = \sqrt{2.5^2 - 2^2} = 1.5\ (km/h)$$

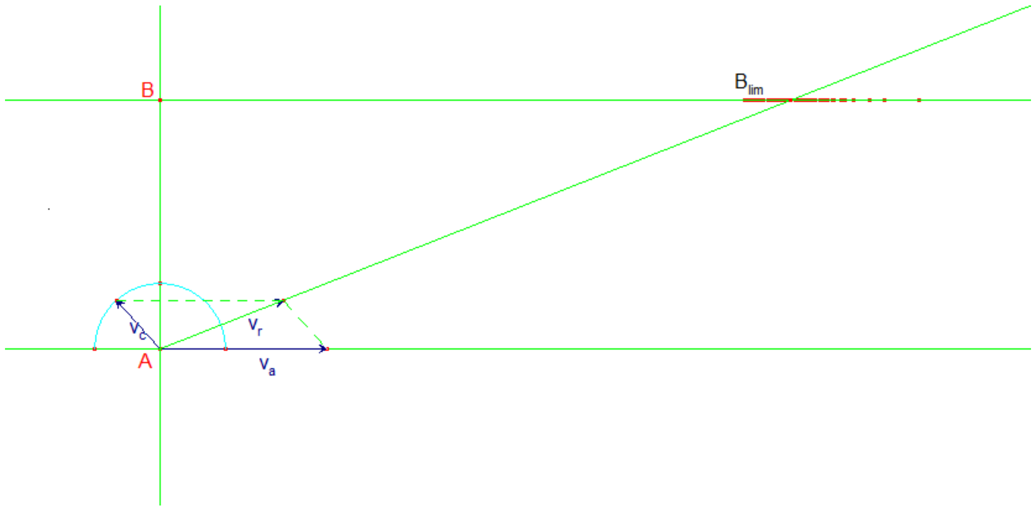
Per quanto riguarda il tempo impiegato in tal caso :

$$t^* = \frac{L}{1.5} \quad (h)$$

$$t_{min} < t^*$$

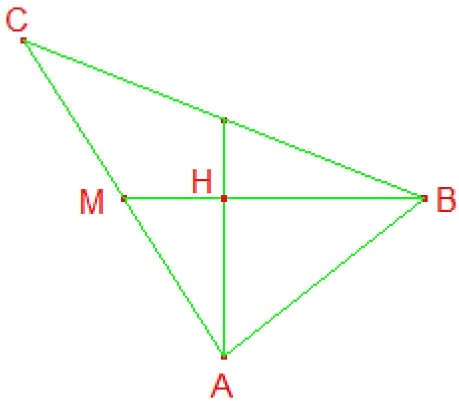
Osservazione

Se $v_a > v_c$ non tutte le traiettorie risultano possibili, anzi il cane non può giungere più a monte di un punto limite B_{lim} che comunque è a valle di B .
La figura illustra la situazione :



Domanda : quale direzione rispetto ad AB dovrà scegliere il cane per giungere in B_{lim} ?

5.- Un triangolo ha due mediane tra loro ortogonali . Si esprima l'area del triangolo in funzione della lunghezza delle due mediane .



Si sa che le tre mediane di un triangolo passano tutte per il suo baricentro H che divide ciascuna di esse in due parti, una il doppio dell'altra. Con riferimento alla figura : HB = 2MH
Si ha inoltre che i due triangoli CMB e MAB hanno la stessa area : hanno infatti stessa altezza e basi uguali .
L'area del triangolo MAB è il prodotto di MB per metà di AH.
Perciò se m ed n sono le lunghezze delle due mediane perpendicolari, l'area di MAB è

$$A(MAB) = \frac{m \cdot n}{3}$$

L'area di ABC :

$$A(ABC) = 2 \cdot \frac{m \cdot n}{3}$$

6.- Si considerino i numeri naturali tali che :

a) abbiano cifre tutte diverse, ed inoltre

b) la somma di due qualsiasi delle loro cifre non sia divisibile per 3.

Qual è il massimo numero M di cifre di tali numeri ? Quanti sono siffatti numeri (con M cifre) ?

Suddividiamo le cifre nelle tre classi [0] = {0, 3, 6, 9} , [1] = {1, 4, 7} , [2] = {2, 5, 8} a seconda del resto della loro divisione per 3.
La somma di due cifre è divisibile per 3 se e solo se o entrambe appartengono alla classe [0], oppure una alla classe [1] e l'altra alla classe [2] .

Perciò i numeri cercati contengono al più una cifra di classe [0] e tutte le altre di classe [1] o di classe [2] .
Quindi M = 1 + 3 = 4 .
I nostri numeri saranno formati dai seguenti gruppi di cifre :
{0, 1, 4, 7} ; {0, 2, 5, 8} ; {3, 1, 4,7} ; {3, 2, 5, 8} ; {6, 1, 4, 7} ; {6, 2, 5, 8} ; {9, 1, 4, 7} ; {9, 2, 5,8}
con i primi due gruppi posso formare 3 · 2 · 1 numeri poiché non posso usare 0 al primo posto, con ciascuno degli altri sei gruppi posso formare 4 · 3 · 2 · 1 , in totale :

$$2 \cdot (3 \cdot 2) + 6 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2) = 180$$

7.- Per quali valori di t la funzione :

$$f(x) = 1 - 2x - \sqrt{4x^2 - 2tx + t}$$

È costante per x ≤ 0 ?

Per tali valori di t la f(x) è costante per ogni x ∈ R ?

Affinché la funzione sia costante per x ≤ 0 dev'essere, in particolare

$$f(0) = f(-\frac{1}{2})$$

$$f(0) = 1 - \sqrt{t} = 1 + 1 - \sqrt{1 + 2t} = f(-\frac{1}{2})$$

$$\sqrt{1 + 2t} = 1 + \sqrt{t}$$

$$1 + 2t = 1 + t + 2\sqrt{t}$$

$$t = 2\sqrt{t}$$

Quest'ultima ha per soluzioni t = 0 e t = 4 .

Abbiamo trovato una condizione *necessaria* .

Ora se t = 0 otteniamo :

$$f(x) = 1 - 2x - \sqrt{4x^2} = 1 - 2x - |2x|$$

Poiché x ≤ 0 avremo :

$$f(x) = 1 - 2x + 2x = 1$$

E la funzione risulta costante per x ≤ 0 .

Se t = 4 avremo :

$$f(x) = 1 - 2x - \sqrt{4x^2 - 8x + 4}$$

$$f(x) = 1 - 2x - \sqrt{4(x-1)^2}$$

$$f(x) = 1 - 2x - 2|x - 1|$$

Che per x ≤ 1 assume l'aspetto :

$$f(x) = 1 - 2x + 2(x - 1) = -1$$

E anche in questo caso la funzioni risulta costante per x ≤ 0 .

Abbiamo con ciò verificato anche la *sufficienza* della condizione .

Osserviamo che né la prima né la seconda delle funzioni trovate sono costanti per ogni x ∈ R . Infatti per x ≥ 1 la prima diventa f(x) = 1 – 4x che non è costante, mentre la seconda diventa f(x) = 3 – 4x e neppure questa è costante. .

8.- Trovare le coppie di numeri interi positivi x, y tali che :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{4}$$

Si deve avere (essendo x ≠ 0 e y ≠ 0) :

$$4(xy + x + y + 1) = 5xy$$

$$xy - 4x - 4y = 4$$

$$(x-4)(y-4) - 16 = 4$$

$$(x-4)(y-4) = 20$$

Ma allora sono possibili solo i seguenti casi :

1) $x - 4 = 1$, $y - 4 = 20$ ⇝ $x = 5$, $y = 24$
2) $x - 4 = 2$, $y - 4 = 10$ ⇝ $x = 6$, $y = 14$
3) $x - 4 = 4$, $y - 4 = 5$ ⇝ $x = 8$, $y = 9$
4) $x - 4 = 5$, $y - 4 = 4$ ⇝ $x = 9$, $y = 8$
5) $x - 4 = 10$, $y - 4 = 2$ ⇝ $x = 14$, $y = 6$
6) $x - 4 = 20$, $y - 4 = 1$ ⇝ $x = 24$, $y = 5$

Non si prende in considerazione il caso di $x - 4$ e di $y - 4$ entrambi negativi perché essendo il loro prodotto uguale a 20 , uno dei due sarebbe minore di -4 e quindi risulterebbe o x o y minore di zero .