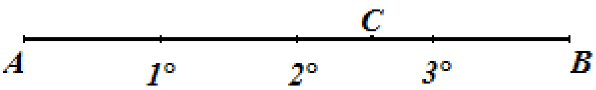
26ª GARA MATEMATICA “CITTÀ DI PADOVA”

26 marzo 2011

SOLUZIONI

1.- Affinché le soluzioni siano numeri interi è necessario che il discriminante dell’equazione sia un quadrato perfetto (in questo caso la condizione risulta anche sufficiente poiché è uguale a 1 il coefficiente di x^2 e pari quello di x).
Dunque $p^2 + 360p$ dev’essere un quadrato divisibile per p : cosicché p deve dividere 360.
I divisori primi di 360 sono 2, 3, 5.
Se $p = 2$ allora $4 + 360 \cdot 2 = 4 \cdot (1 + 180)$ non è quadrato.
Se $p = 3$ allora $9 + 360 \cdot 3 = 9 \cdot (1 + 120) = 3^2 \cdot 11^2$ è un quadrato.
Se p 0 5 allora $25 + 360 \cdot 5 = 25 \cdot (1 + 72)$ non è un quadrato.
Le soluzioni risultano intere se e solo se $p = 3$.

2.- Facciamo un piccolo schema :



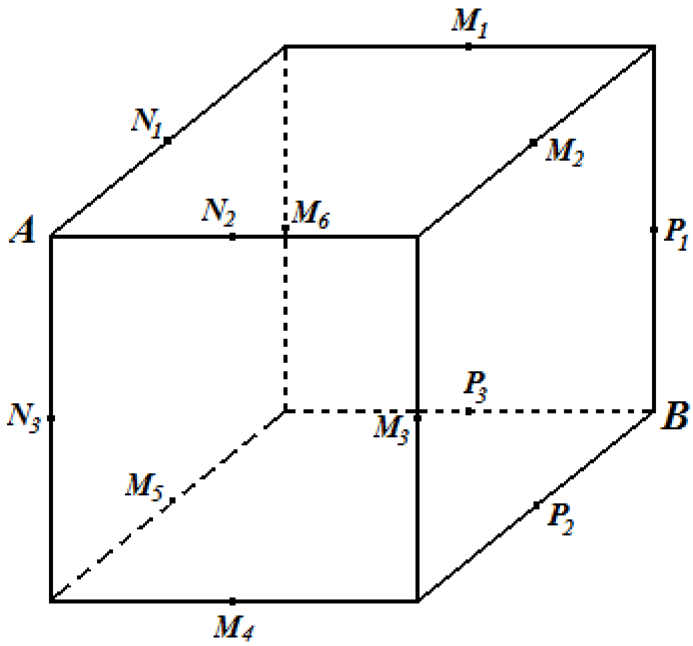
Dall’inizio A dell’autostrada al primo varco (1°) l’automobilista può procedere a 180 km/h poiché non ci sono controlli, ed impiegherà 1/6 d’ora, cioè 10 minuti.
Dal primo varco al secondo (2°) ci sono 30 km : egli deve procedere ad una velocità media di 120 km/h ed impiegherà perciò un quarto d’ora cioè 15 minuti.
Dal secondo varco al terzo (3°) sono ancora 30 km che l’automobilista può percorrere a 180 km/h, salvo fermarsi al grill per il tempo t necessario ad abbassare la media a 120 km/h : deve risultare $10 + t = 15$ e quindi $t = 5$ minuti.
Il quarto tratto, tra il terzo varco (3°) e la fine B dell’autostrada lo può percorrere, non essendovi controlli, a 180 km/h, impiegando altri 10 minuti.
In totale il tempo risulta : $10 + 15 + 15 + 10 = 50$ minuti.
La velocità media risulta $120 \cdot 6/5 = 144$ km/h .

3.- Sia A uno dei vertici del cubo e calcoliamo la distanza di A dai 12 punti medi degli spigoli :

$AN_1 = AN_2 = AN_3 = 1$ dm;

$AM_1 = AM_2 = AM_3 = AM_4 = AM_5 = AM_6 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ dm

$AP_1 = AP_2 = AP_3 = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ dm



Consideriamo le analoghe distanze del vertice B (opposto di A) dai punti medi M_1, M_2, …, M_6 per simmetria valgono $BM_1 = BM_2 = BM_3 = BM_4 = BM_5 = BM_6 = \sqrt{5}$ dm .

Ma allora i punti M_1, M_2, M_3, M_4, M_5; M_6 appartengono sia alla sfera di centro A e raggio $\sqrt{5}$ dm sia a quella di centro B e raggio $\sqrt{5}$ dm e dunque essi stanno sulla intersezione delle due sfere, cioè su di una circonferenza e sono quindi complanari : tale piano σ è il piano di simmetria dei due punti A e B e dunque passa per il centro O del cubo.

Nessuno dei punti P_i o N_i appartiene a σ : infatti se vi appartenesse, per esempio P_1, il piano σ coinciderebbe con il piano per M_2, M_3, P_1 , cioè con una faccia del cubo.

Se d'altra parte prendo 7 dei punti M_i, N_i, P_i questi non possono stare su di uno stesso piano infatti se tra essi ci sono tre punti M, allora si tratta del piano σ : caso già scartato;

se tra essi ci sono tutti e tre i punti N_i, oppure i tre P_i, il piano coinciderebbe con quello per N_1, N_2, N_3 che non contiene nessuno degli altri punti (analogamente per i tre P_i) .

Così il massimo numero di tali punti medi complanari è 6.

Si vede poi facilmente (per ragioni di simmetria) che essi sono i vertici di un esagono regolare di lato $\sqrt{2}$ dm.

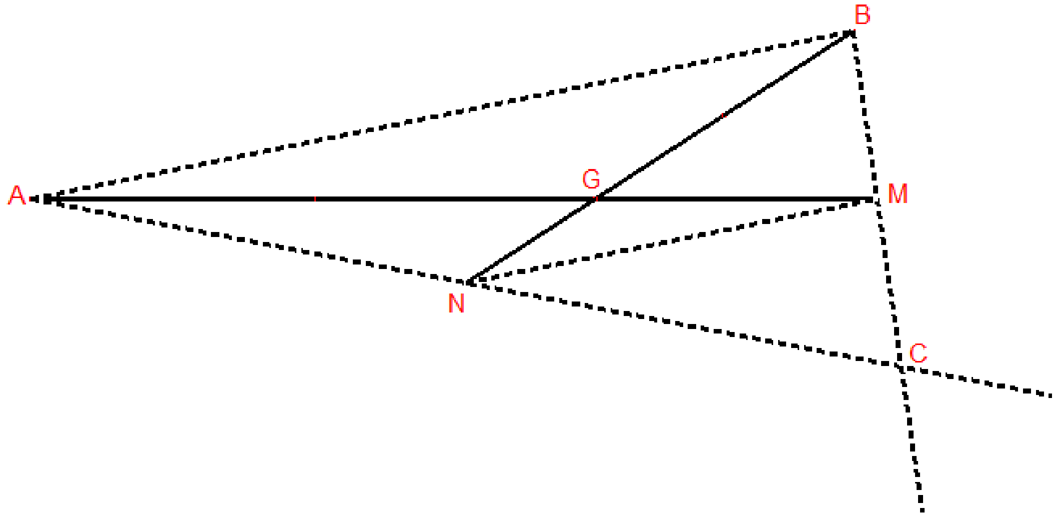
La sua area è 6 volte quella di un triangolo equilatero di lato $\sqrt{2}$ dm quindi $3 \cdot \sqrt{3}$ dm^2 .

4.- Per rispondere alla domanda usiamo il “ crivello di Eratostene “ :
scriviamo i cento numeri e poi eliminiamo quelli certamente non primi : i divisibili per 2, i divisibili per 3, i divisibili per 5, i divisibili per 7, … e così via

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
2030	2031	2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039
2040	2041	2042	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049
2050	2051	2052	2053	2054	2055	2056	2057	2058	2059
2060	2061	2062	2063	2064	2065	2066	2067	2068	2069
2070	2071	2072	2073	2074	2075	2076	2077	2078	2079
2080	2081	2082	2083	2084	2085	2086	2087	2088	2089
2090	2091	2092	2093	2094	2095	2096	2097	2098	2099

Così si vede che i numeri della tabella divisibili per 2 o per 5 sono 60, e dei 40 restanti 14 sono divisibili per 3, dei 26 rimasti 4 sono multipli di 7 : ne rimangono perciò 22, di cui uno il 2057 è divisibile per 11 e uno, il 2041, divisibile per 13.
Qui possiamo fermarci : abbiamo infatti verificato che i numeri primi del nostro secolo sono al più 20.

5.- Osserviamo che i due triangoli GAB e GMN sono simili per il primo criterio :
GA : GM = GB : GN = 2 e gli angoli in G sono opposti al vertice.



Poiché il rapporto di similitudine è 2, risulta BA = 2 · MN e inoltre le rette MN e AB risultano parallele in quanto tagliate dalla trasversale AM secondo angoli alterni interni uguali.
Ma allora anche i triangoli CMN e CBA sono simili e con rapporto di similitudine 2.

Perciò risulta CB = 2 · CM e AM è una mediana di ABC.
In modo analogo per BN.

6.- Se le squadre sono *n*, ogni squadra gioca *n – 1* partite e quindi le partite sono in tutto :

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Se tutte terminano in parità (per ogni partita ci sono 2 punti) abbiamo un totale di *n(n – 1)* punti. Che risulta il punteggio totale minimo.
Se nessuna termina in pareggio (per ogni partita ci sono 3 punti) e quindi il massimo dei punti è :

$$3 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Ma allora possiamo scrivere :

$$n(n-1) \leq 105 \leq \frac{3n(n-1)}{2}$$

Cioè $$70 \leq n \cdot (n-1) \leq 105$$

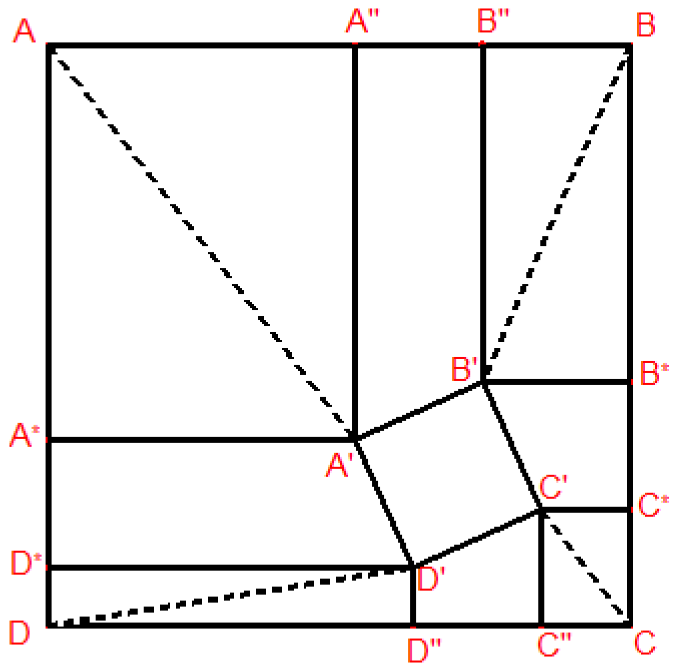
Da cui n = 9 oppure n = 10.
Siccome ogni pareggio contribuisce al totale dei punti con un punto in meno di una vittoria il numero dei pareggi è :

$$\frac{3n(n-1)}{2}$$

Se n = 9, il numero dei pareggi risulta 108 – 105 = 3.
Se n = 10, il numero dei pareggi risulta invece 135 – 105 = 30.

7.- Siano :

A'', B'' le proiezioni dei punti A', B' sul lato AB ;
D'', C'' quelle dei punti D', C' sul lato DC ;
A^* , D^* quelle di A', D' sul lato AD ;
B^* , C^* quelle dei punti B' , C' sul lato CB .

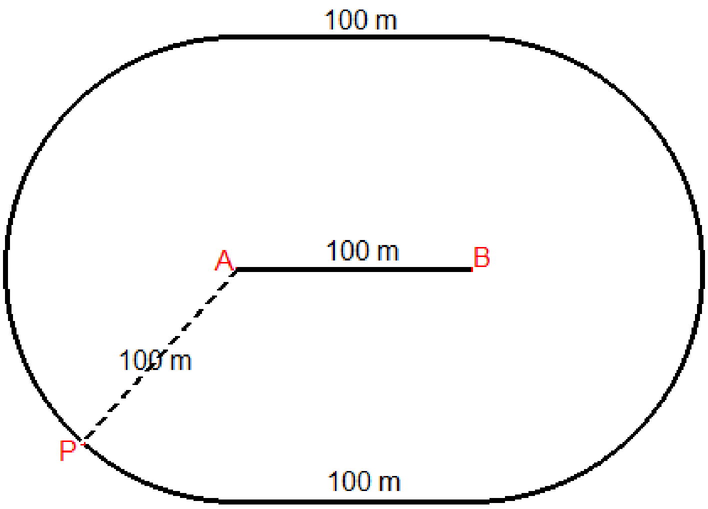


Siccome l'angolo tra le rette AB e A'B' è uguale a quello tra le rette AD e A'D' (i lati sono a due a due ortogonali) risulta che :

$$A''B'' = A^*D^* = D''C'' = C^*B^* .$$

I due trapezi A''B''B'A' e D''C''C'D' si possono pensare come i due pezzi di una striscia larga quanto A''B'' e lunga quanto AD – A^*D^* .
Analogamente i due trapezi A^*D^*D'A' e C^*B^*B'C' sono i due pezzi di una striscia larga come A^*D^* e lunga quanto AB – A''B'' .
Le due strisce sono dunque uguali.
Otteniamo il risultato osservando che :
AA'B'B + DD'C'C = AA'A'' + striscia + BB'B'' + CC'C'' + DD'D'' =
= AA'A^* + striscia + DD'D^* + BB'B^* + CC'C^* = AA'D'D + BB'C'C (poiché i quattro triangoli di ciascuna delle due righe sono a due a due uguali) .

8.- Sappiamo che in una carta topografica, maggiore è la pendenza più vicine sono le curve di livello e, minore è la pendenza, più distanti sono le curve di livello.
Siccome nel nostro caso la pendenza è costante, le linee di livello sono equidistanti e la distanza di un punto di una linea di livello da un'altra non varia al variare del punto sulla prima linea di livello.
Inoltre siccome la pendenza è di 45° , la distanza tra due curve di livello, in una rappresentazione topografica, è uguale alla differenza delle loro quote :



Una particolare curva di livello è quella della cresta, che consiste di un segmento AB, mentre quella corrispondente ai punti che hanno una quota inferiore di cento metri dai punti della cresta è formata dai punti che hanno dal segmento AB una distanza di 100 m.
La lunghezza di tale linea è $(200 + 200\cdot\pi)$ m e l'area racchiusa è $(20000 + 10000\cdot\pi)$ m^2 :