27^a Gara Matematica “Città di Padova”   31 Marzo 2012

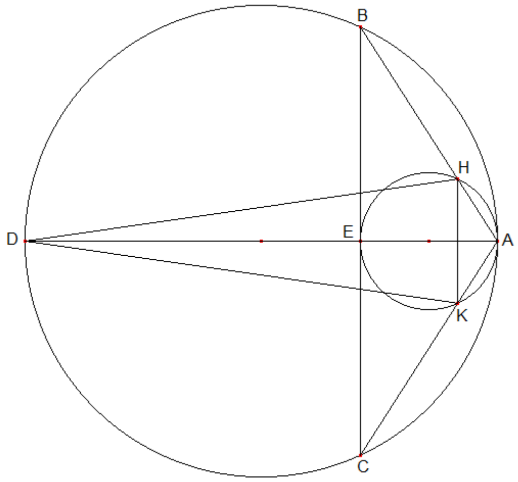
SOLUZIONI

1.- Noto che $x \cdot (x^4 - 1) = (x-1) \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)$.

Se x è intero $x-1$, x , $x+1$ sono tre numeri successivi, perciò almeno uno di essi è pari e uno è divisibile per 3.

Analogamente dei cinque numeri successivi $x-2$, $x-1$, x , $x+1$, $x+2$ uno è divisibile per 5;
se esso è $x-2$, si ha $x = 2 + 5k$, $x^2 = 4 + 20k + 25k^2$ e $x^2 + 1$ risulta divisibile per 5;
se esso è $x+2$ risulta $x = 5h - 2$ e $x^2 + 1 = 25h^2 - 20h + 5$ è multiplo di 5.
In ogni caso, allora, dei quattro numeri $x-1$, x , $x+1$, x^2+1 uno è divisibile per 5.
Ma allora $x \cdot (x^4 - 1)$ è divisibile per 2, per 3, per 5 e dunque per 30.

2.- L’omotetia di centro A che manda il circolo minore nel maggiore manda il triangolo AHK nel triangolo isoscele, diciamo, ABC, di partenza e manda il punto E di tangenza del lato BC col circolo minore nel punto D.



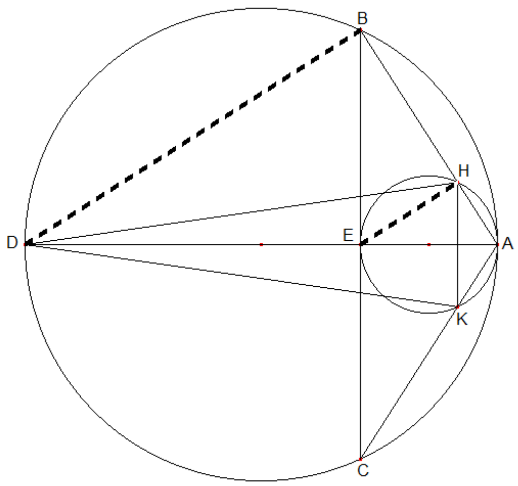
Si ha quindi la proporzione :

$$AE : AD = HK : BC \quad \rightsquigarrow \quad AE \cdot BC = AD \cdot HK$$

ma il primo membro dell’uguaglianza è il doppio dell’area del triangolo ABC ed il secondo membro è il doppio dell’area del deltoide AKDH .

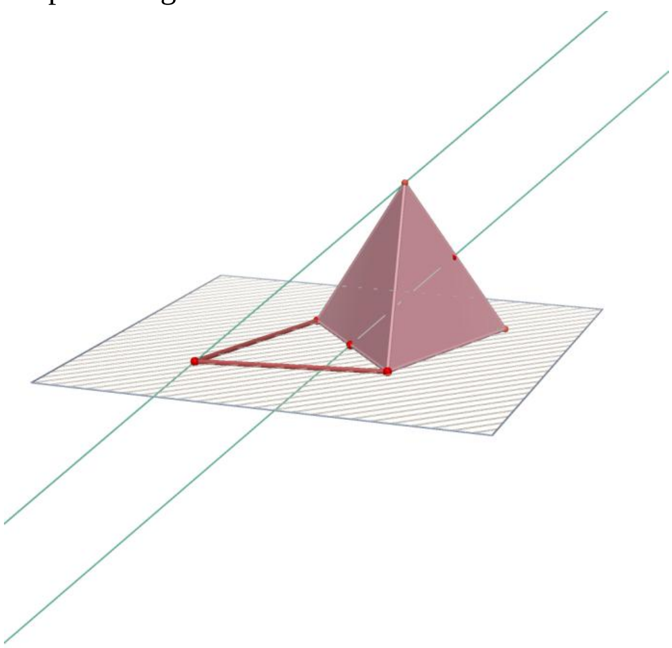
Soluzione alternativa :

Colleghiamo D con B e E con H ottenendo :

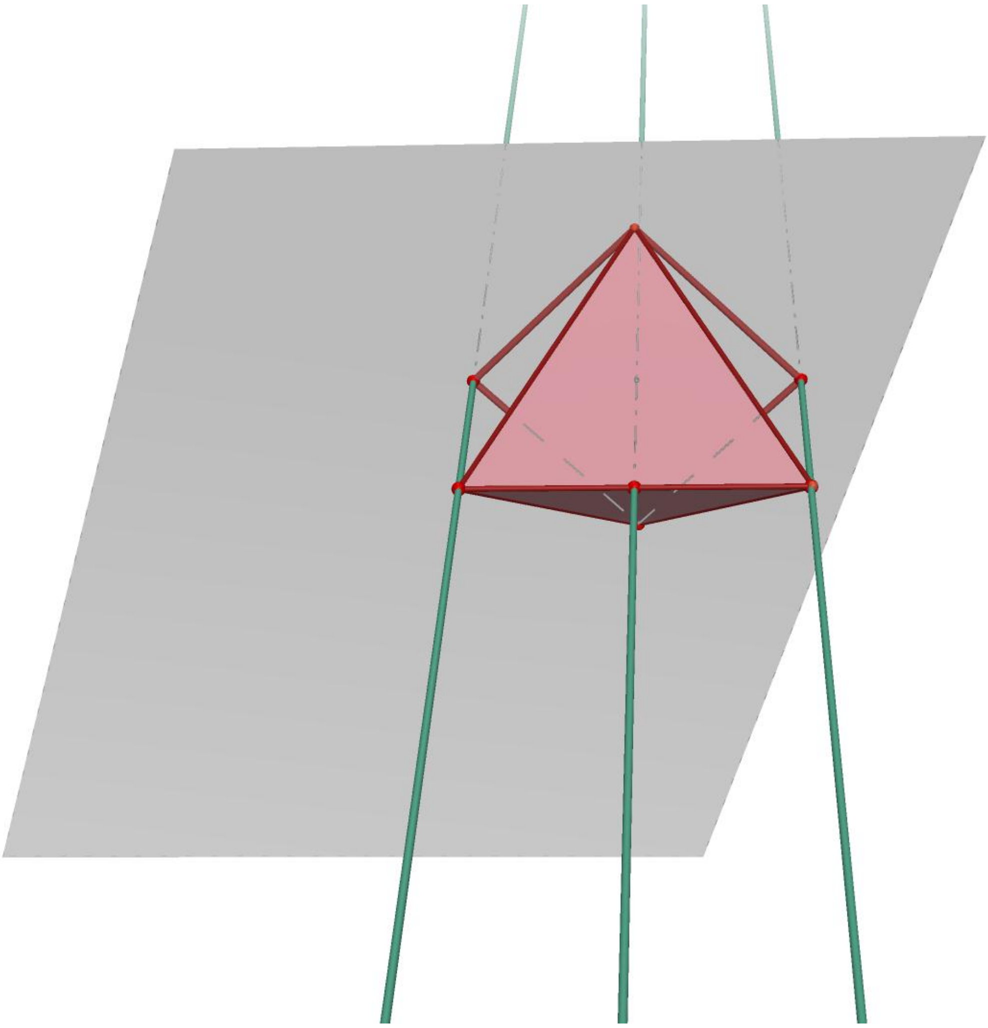


I triangoli EHB e EHD sono equiestesi e perciò anche AEB e AHD.

3.- Come di consueto considereremo paralleli i raggi solari. Disponiamo allora il tetraedro in modo che la retta congiungente i punti medi di due suoi lati opposti sia parallela ai raggi solari. Questi due lati avranno come ombra su di un piano ortogonale ai raggi (ma anche su di un piano qualunque) due segmenti che si bisecano a vicenda e l'ombra del tetraedro sarà quindi un parallelogramma:



Se il tetraedro è regolare i due lati opposti risultano tra loro ortogonali e paralleli al piano dell'ombra, le ombre dei lati saranno perciò ancora ortogonali e della stessa lunghezza :
il parallelogramma avendo le due diagonali e tra loro perpendicolari risulterà un quadrato.
Nel caso generale inclinando opportunamente il piano si può fare in modo che l'ombra di uno dei due lati del parallelogramma si allunghi fino ad ottenere un rombo ; oppure fare in modo che si allunghi l'ombra più piccola di uno dei due lati opposti del tetraedro fino a formare un rettangolo.



Verifichiamolo ora analiticamente :
scegliamo come asse z la retta passante per i punti medi di due lati opposti del tetraedro, come piano xy un piano perpendicolare all'asse z, come asse y l'ombra di uno dei lati.
Per questa scelta degli assi l'ombra del tetraedro sul piano xy è, per quanto visto, un parallelogramma di centro l'origine e vertici $A(a, b, 0)$, $B(0, c, 0)$, $C(-a, -b, 0)$ e $D(0, -c, 0)$.
Consideriamo ora i due punti $A'(a, b, s)$ e $B'(0, c, t)$ sul piano $OA'B'$ il tetraedro proietta un'ombra che è un parallelogramma di centro O e di vertici A', B', $C'(-a, -b, -s)$ e $D'(0, -c, -t)$.

Risulta :

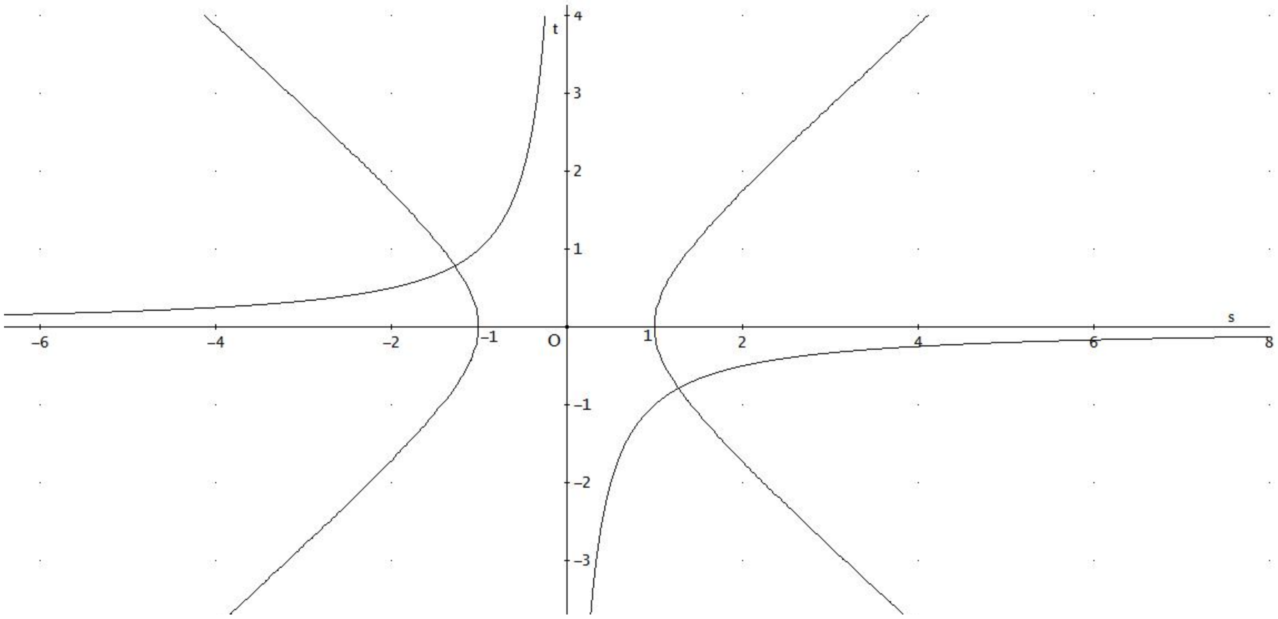
$$A'O = \sqrt{a^2 + b^2 + s^2} \quad ; \quad B'O = \sqrt{c^2 + t^2}$$

E le due diagonali sono uguali se $a^2 + b^2 + s^2 = c^2 + t^2$ e sono ortogonali se $bc + st = 0$ (a quest'ultima uguaglianza si giunge anche imponendo A'B'= B'C').
Se le due condizioni sono soddisfatte simultaneamente il parallelogramma risulta un quadrato.

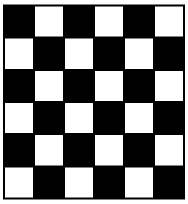
In effetti il sistema:

$$\begin{cases} s^2 - t^2 = c^2 - a^2 - b^2 \\ st = -bc \end{cases}$$

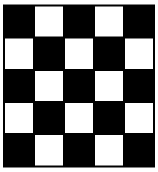
ammette sempre soluzioni poiché, con riferimento il piano st, rappresentano due iperboli l'una avente per asintoti le bisettrici degli assi, l'altra avente per asintoti gli assi stessi.
L'intersezione tra iperbole equilatera riferita agli asintoti e quella riferita agli assi si può rappresentare graficamente :



4.- In una scacchiera quadrata il numero delle righe è uguale al numero delle colonne ed è uguale al numero delle caselle di ogni riga (e di ogni colonna).
Se una almeno delle diagonali è formata da caselle bianche , la scacchiera è simmetrica rispetto a questa diagonale e dunque le caselle nere sono tante da una parte quante dall'altra e quindi in numero pari.



Quindi nel nostro caso le due diagonali sono formate tutte da caselle nere; la prima riga incomincia con una casella nera e finisce con una nera : il numero delle colonne è dispari.
Per quanto richiesto la scacchiera ha un numero dispari di righe e di colonne e le due diagonali sono formate da caselle nere :



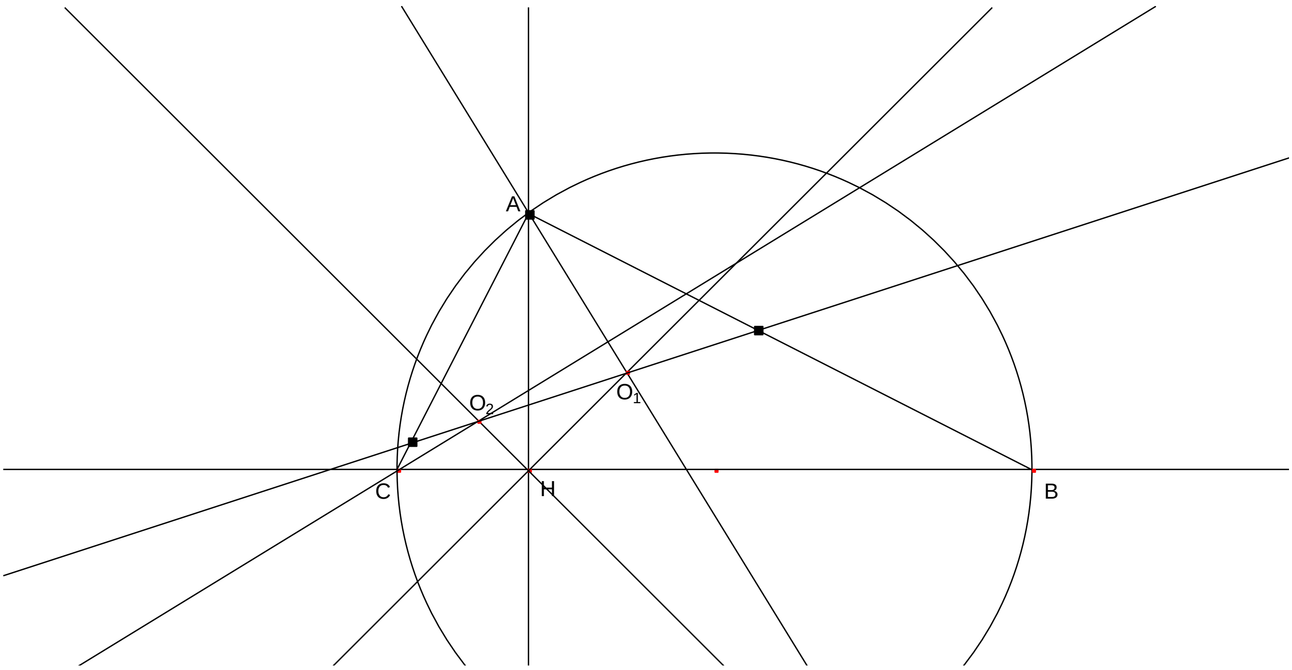
Contiamo ora le caselle nere : in ciascuna delle n + 1 righe dispari sono n + 1 , in totale :

$$(n+1)\cdot(n+1)+n\cdot n=(n+1)^2+n^2$$

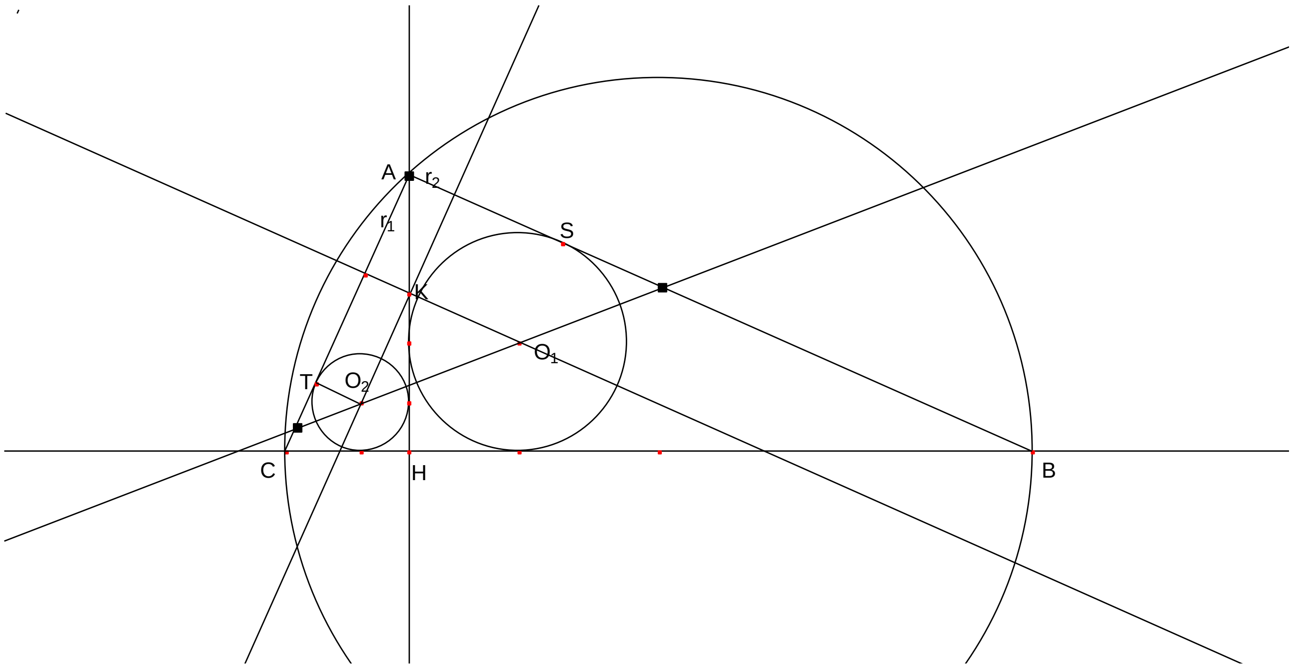
Oppure contandole per parallele ad una diagonale :

$$[1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)]+[(2n-1)+\cdots+5+3+1]=(n+1)^2+n^2$$

5.- Dapprima disegniamo la figura :



Da O_1 tracciamo la parallela al lato AB , da O_2 tracciamo la parallela al lato AC : queste due retta si incontrano nel punto K.



Chiamiamo r_1 il raggio del circolo inscritto nel triangolo ABH ed r_2 il raggio di quello inscritto nel triangolo ACH , S il punto di tangenza del primo circolo col lato AB , T il punto di tangenza del secondo circolo col lato AC.

Perciò :

$$AS = AH - r_1 \ , \qquad O_1K = AS - r_2 \ \rightsquigarrow \ O_1K = AH - r_1 - r_2$$

$$AT = AH - r_2 \ , \ \ O_2K = AT - r_1 \ \rightsquigarrow \ O_2K = AH - r_1 - r_2$$

Da qui $O_1K = O_2K$ per cui il triangolo O_1O_2K è isoscele e così pure il triangolo richiesto.

6.- Numeriamo le carte dall'uno al 18 nell'ordine in cui sono. Dopo la prima mescolata il loro ordine sarà quello della seconda riga :

Posiz. Iniz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1° mesc.	1	10	2	11	3	12	4	13	5	14	6	15	7	16	8	17	9	18

Osserviamo che la prima e l'ultima carta sono rimaste al loro posto, invece il 2 è ora al posto 3, il 3 al posto 5, il 5 al posto 9, il 9 al posto 17, il 17 al posto 16, il 16 al posto 14, il 14 al posto 10, il 10 al posto 2, possiamo perciò scrivere :

$$C_1 = (2, 3, 5, 9, 17, 16, 14, 10)$$

per indicare che ciascuna carta è andata al posto di quella successiva e l'ultima al posto della prima.

Ora seguiamo il 4 : 4 al posto 7, il 7 al posto 13, il 13 al posto 8, 8 al posto 15, 15 al posto 12, 12 al posto 6, 6 al posto 11, 11 al posto 4 , in definitiva :

$$C_2 = (4, 7, 13, 8, 15, 12, 6, 11\ )$$

Se effettuiamo una seconda mescolata avremo 1 e 18 fermi nelle posizioni di testa e di coda, mentre ciascuna delle altre carte si sposterà di due posti, per una terza mescolata 1 e 18 fisse e le altre si sposteranno di tre posti : 2 in 9, 9 in 14, 14 in 3, …

Posiz. Iniz.	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1° mesc.	1	10	**2**	11	3	12	4	13	5	14	6	15	7	16	8	17	9	18
2° mesc.	1	14	10	6	**2**	15	11	7	3	16	12	8	4	17	13	9	5	18
3° mesc.	1	16	14	12	10	8	6	4	**2**	17	15	13	11	9	7	5	3	18

Dopo 8 mescolate si ritroveranno tutte al posto di partenza in quanto i sottoinsiemi C_1 e C_2 hanno entrambi 8 elementi.

7.- Cerchiamo le soluzioni intere dell’equazione :

$$a^2 + 2b^2 = k \cdot (ab + 1)$$

Se poniamo a = 0 , b = n , otteniamo $2n^2 = k$.
Per questa scelta di k , risulta :

$$a^2 + 2n^2 = 2n^2(an + 1) \rightsquigarrow a^2 + 2n^2 = 2n^3a + 2n^2 \rightsquigarrow a^2 = 2n^3a$$

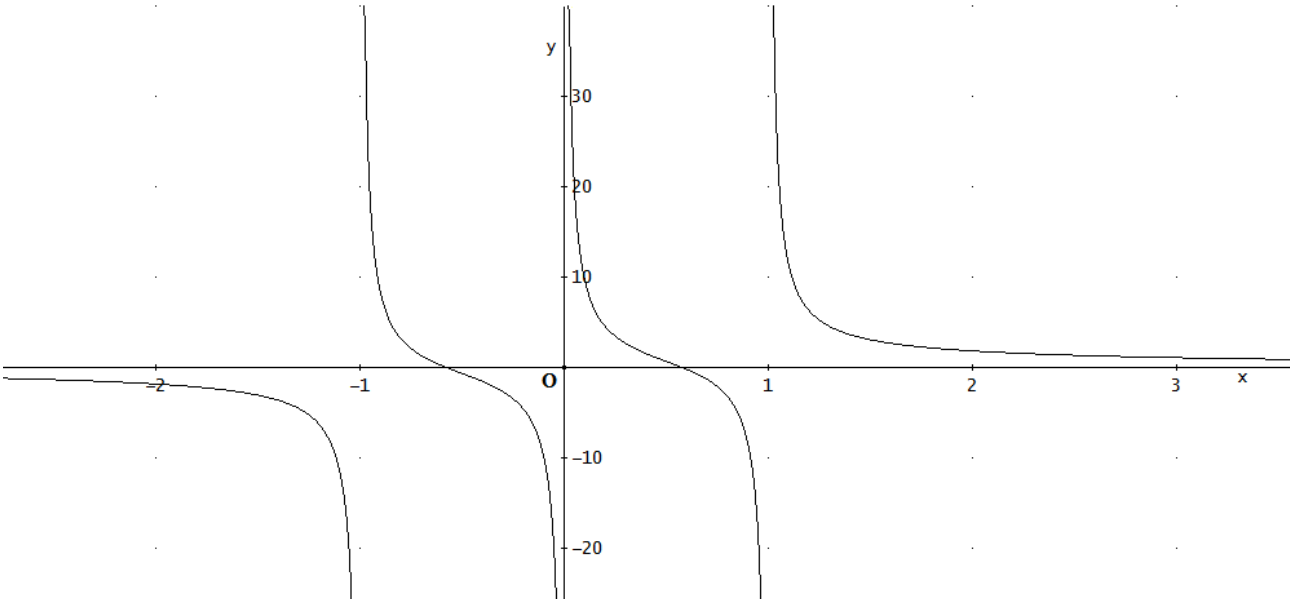
Quest’ultima ha le due soluzioni : a = 0 , $a = 2n^3$.
Abbiamo perciò trovato che tutte le coppie $(2n^3 , n)$ vanno bene e sono infinite.
Si è sfruttato il fatto che : *se un polinomio monico di secondo grado a coefficienti interi ha una radice intera, allora anche l’altra radice è intera*.

8.- Ciascuna delle funzioni :

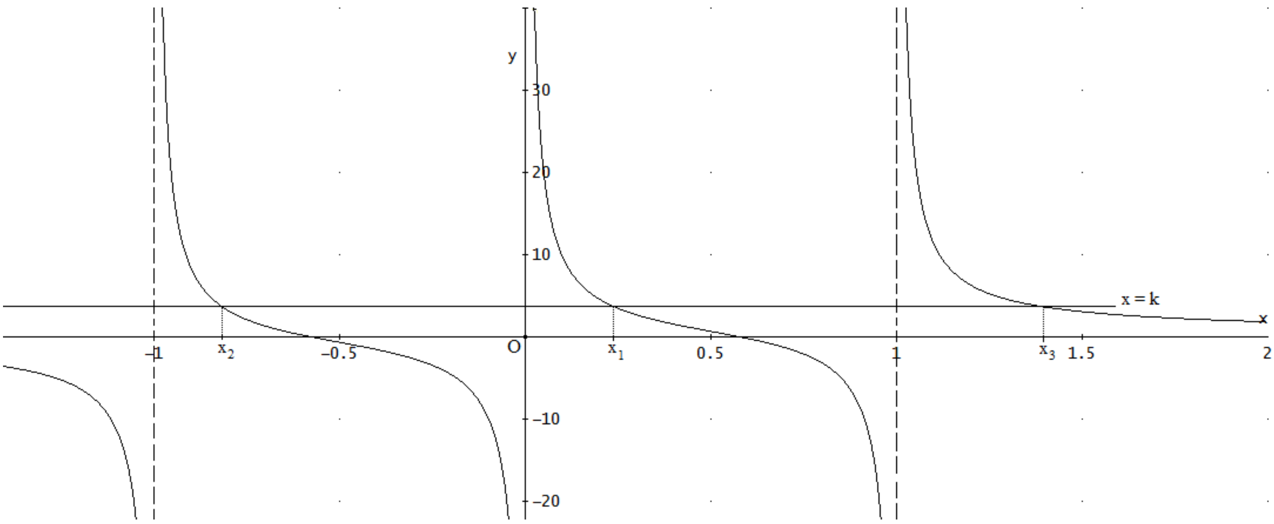
$$y = \frac{1}{x} \quad , \quad y = \frac{1}{x-1} \quad , \quad y = \frac{1}{x+1}$$

Ha per grafico una iperbole, una traslata delle altre : hanno tutte per asintoto orizzontale l’asse x e per asintoti verticali, rispettivamente, le rette x = 0, x = 1, x = − 1 .

Perciò la funzione somma delle tre ha per asintoti : y = 0, x = 0, x = 1, x = − 1 e il seguente grafico :



Dal grafico risulta chiaro che : per ogni k > 0 , la funzione f(x) assume valori maggiori di k



Nei tre intervalli :] -1, x_1[;] 0, x_2 [;] 1, x_3 [dove x_1 , x_2 , x_3 sono le soluzioni dell'equazione :

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=k$$

Cosicché la soluzione cercata sarà : A =] -1, x_1[∪] 0, x_2 [∪] 1, x_3 [.

La somma delle misure dei tre intervalli è :

$$[x_1-(-1)]+[x_2-0]+[x_3-1]=x_1+x_2+x_3$$

Dalla equazione :

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=k$$

Moltiplicando per x(x – 1)(x + 1), otteniamo :

$$k(x-1)x(x+1)= x(x+1)+(x+1)(x-1)+x(x-1)$$

$$kx^3-3x^2-kx+1=0$$

Ma per il teorema di Ruffini :

$$kx^3-3x^2-kx+1=k(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

E quindi :

$$x_1+x_2+x_3=\frac{3}{k}$$