Soluzioni 28ª Gara “Città di Padova” (6 Aprile 2013)

1.- Sia K il valore comune delle somme degli elementi della prima riga, di quelli della seconda e di quelli della colonna. Sia X il numero messo nella casella centrale. Allora la somma degli elementi delle due righe e X è la somma di tutti e sette i numeri, cioè 28, e si ha :

$$28 = 2K + X \ .$$

Da qui si vede che X deve essere pari, e cioè o 2 , o 4 , o 6 .
In corrispondenza K risulta o 13, o 12, o 11.
Le seguenti disposizioni ci dicono che questi tre valori di K vanno tutti bene :

1	5	7	7	3	2	3	1	7
	2			4			6	
3	6	4	1	5	6	2	4	5 .

2.- Indichiamo con T_L e con t_L , rispettivamente, il tempo, misurato in ore, in cui L va in bici e a piedi. Si avrà :

$$15\ T_L + 3\ t_L = 15 \ ,$$

essendo $15\ T_L$ la lunghezza del tratto di strada percorso in bicicletta da L . Ma in quel tratto, siccome L va in bici, S deve andare a piedi, e così (con ovvio significato dei simboli)

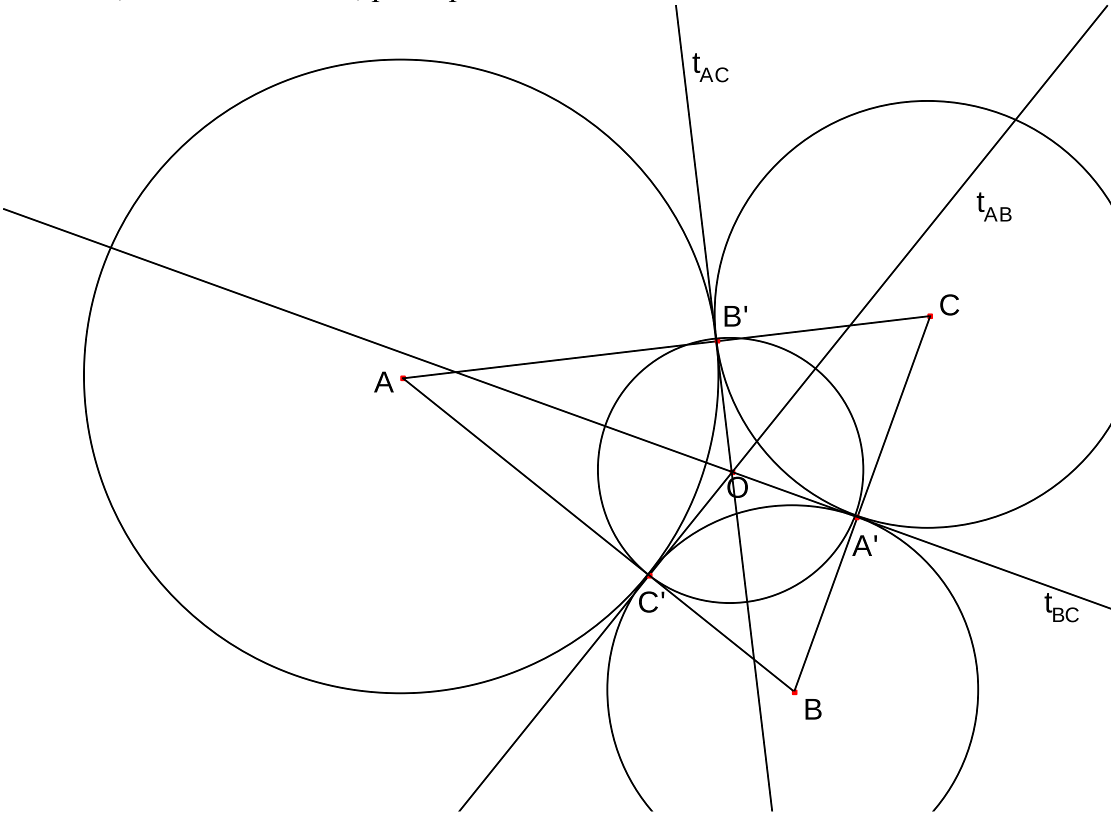
$$15\ T_L = 5\ t_S \quad \text{e analogamente} \quad 15\ T_S = 3\ t_L \ .$$

Inoltre arriveranno nello stesso momento alla fine della strada poiché se p.e. S arrivasse dopo, si potrebbe diminuire il tempo totale facendogli percorrere in bici un tratto un po’ più lungo. Dunque :

$$T_L + t_L = T_S + t_S \ .$$

Da cui $T_L + t_L = t_L/5 + 3\ T_L$, $4/5\ t_L = 2\ T_L$, $2\ t_L = 5\ T_L$, e, dalla prima, $5\ T_L + t_L = 5$, $3\ t_L = 5$, $2/3 = T_L$, e dunque $T_L + t_L = 7/3 = 2$ h e 20 m .

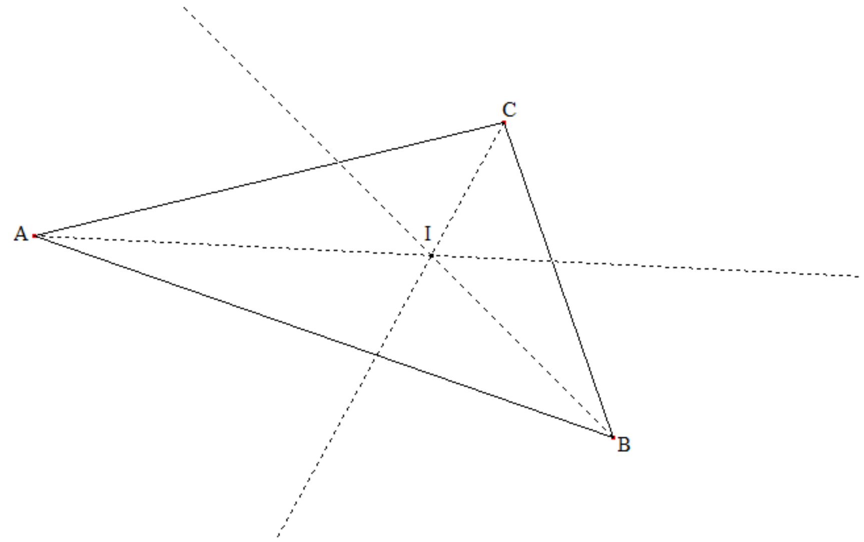
3.- Consideriamo la tangente t_{AB} comune ai circoli di centro A e B , essa è l'asse radicale dei due circoli (luogo dei punti che hanno la stessa potenza rispetto ai due circoli) e risulta ortogonale all'asse centrale AB , che passa per il punto di tangenza C'. Così, se considero la tangente t_{BC} comune ai due circoli di centro B e C , la sua intersezione O con t_{AB} (*centro radicale* dei tre circoli) ha la stessa potenza (= OC'^2) rispetto ai tre circoli; perciò anche la tangente comune ai due circoli di centro C ed A , loro asse radicale, passa per O .



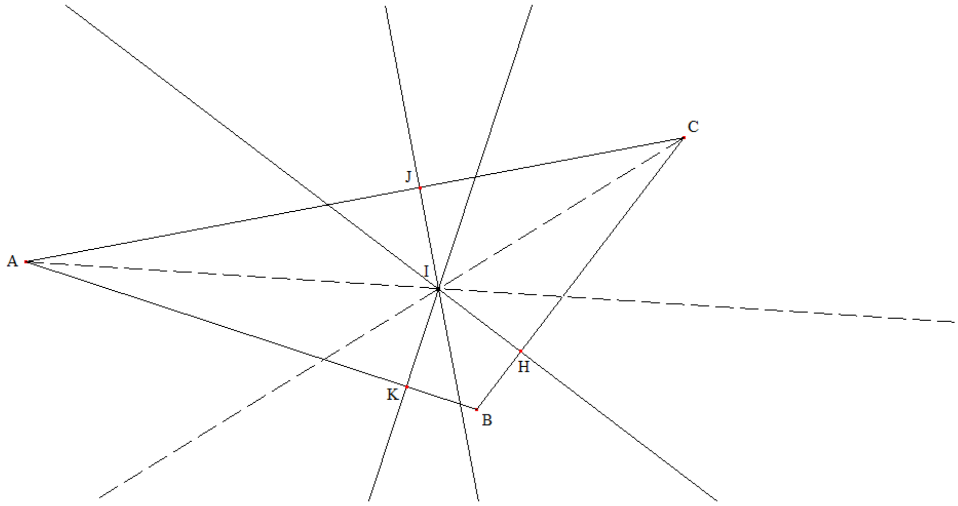
Il circolo di centro O e passante per C' risulta allora tangente in C' alla retta AB (infatti essa è ortogonale a OC' (= t_{AB}) e quindi è ortogonale ai due circoli di centro A e B .
Detto A' il punto di tangenza dei circoli di centro B e C , si vede analogamente che il circolo di centro O e passante per A' è tangente alla retta BC , ed è ortogonale ai due circoli di centro B e C . Inoltre siccome $OA'^2 = OC'^2$ = potenza di O rispetto a uno qualunque dei tre circoli, il circolo di centro O e passante per C' è il circolo inscritto nel triangolo ABC . Con ciò è dimostrato quanto si doveva.

Alternativa

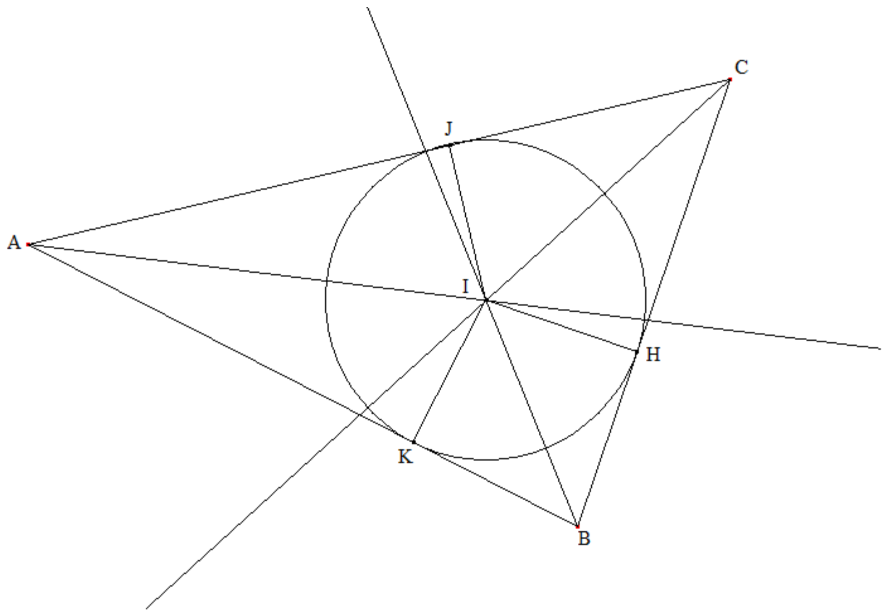
Dato un triangolo ABC sia I il suo incentro



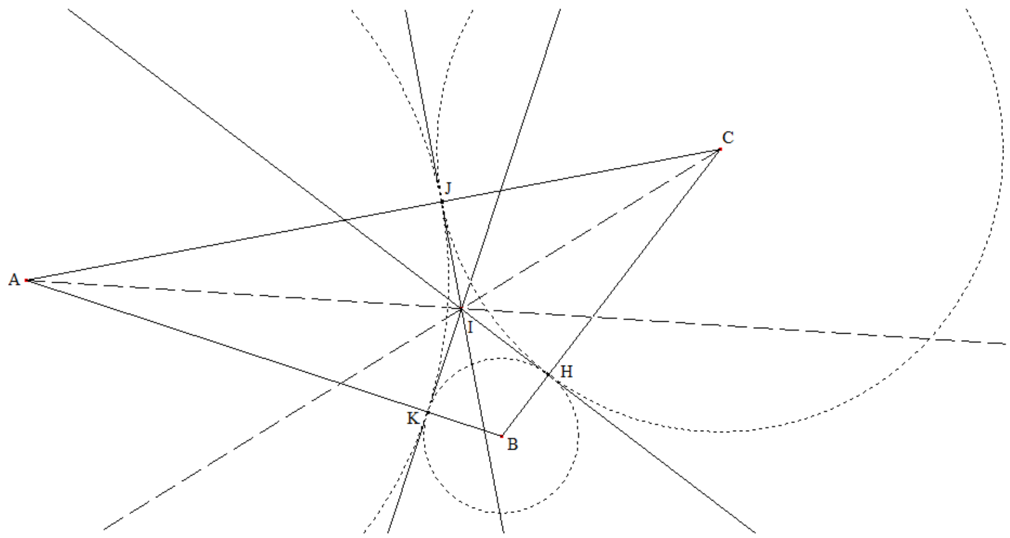
Esso è l'unico punto equidistante dai tre lati e quindi i segmenti IK, IH, IJ perpendicolari rispettivamente ai lati AB , BC , AC risultano congruenti tra loro cioè K, H, J appartengono ad uno stesso circolo di centro I detto l'*in*-circolo tangente ciascuno dei lati in tali punti :



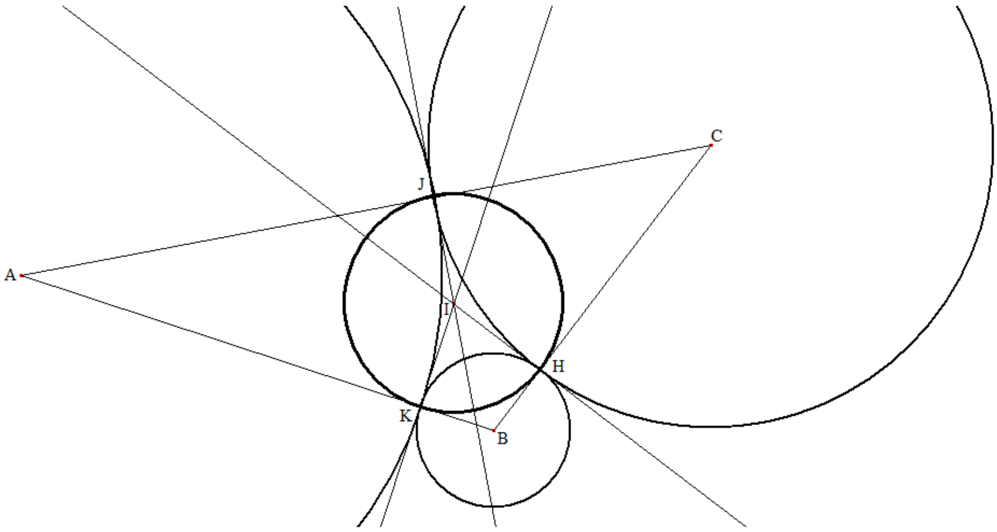
Di conseguenza i tre punti K, H, J dividono i lati in tre coppie di segmenti congruenti perché segmenti di tangente ad una circonferenza uscenti da un punto esterno :



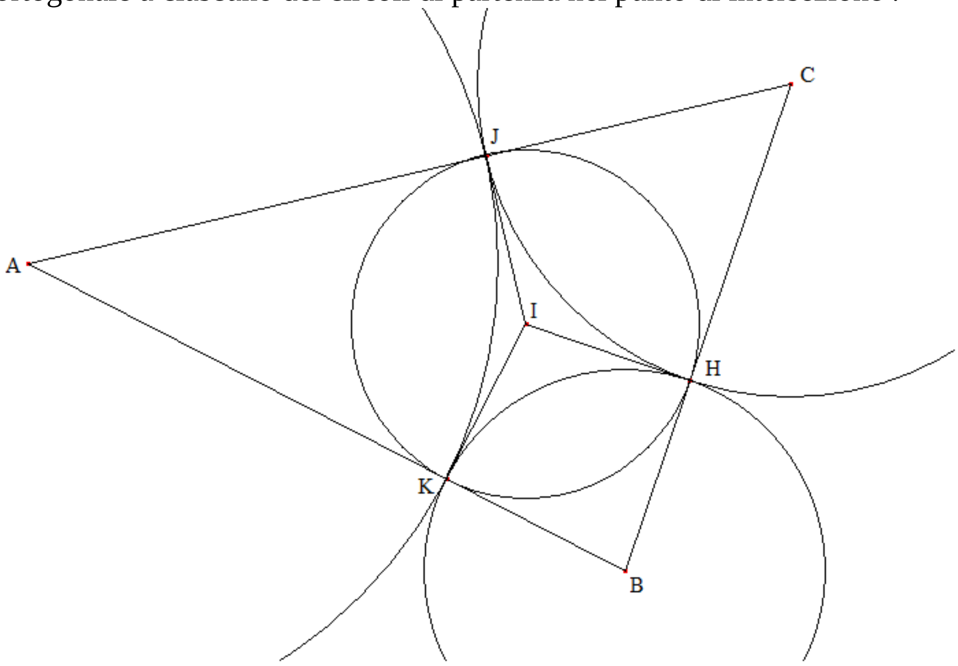
AK = AJ quindi K e J appartengono alla circonferenza di centro A e raggio AK avente per tangenti la retta IJ in J e la retta IK in K;
BK = BH quindi K e H appartengono alla circonferenza di centro B e raggio BK avente per tangenti la retta IK in K e la retta IH in H ;
CH = CJ quindi H e J appartengono alla circonferenza di centro C e raggio CH avente per tangenti la retta IH in H e la retta IJ in J ;



Ma retta tangente ad una circonferenza e suo raggio per il punto di tangenza sono mutuamente perpendicolari e quindi l'*in*-circolo taglia ortogonalmente ciascuna delle tre circonferenze :

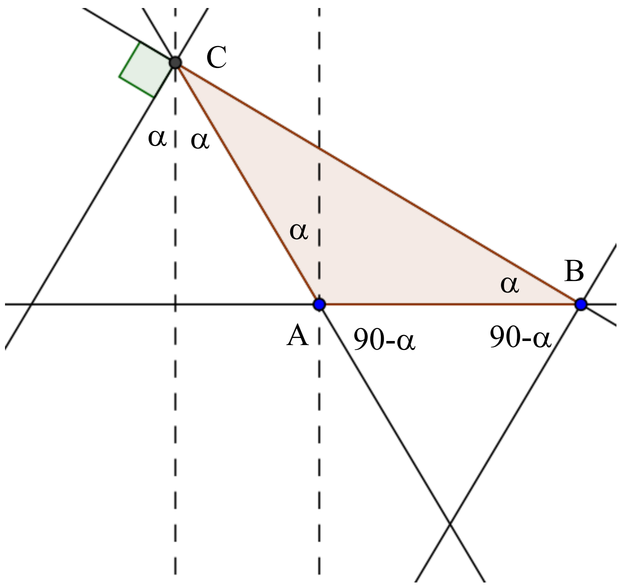


Per l’unicità dell’*in*-centro ad ogni triangolo resta associata un’unica terna di circoli mutuamente tangenti e ortogonali all’*in*-circolo e viceversa una terna di circoli a due a due tangenti individua il triangolo dei centri il cui *in*-circolo gode della proprietà di essere ortogonale a ciascuno dei circoli di partenza nel punto di intersezione :



4.- Le partite giocate sono 6 , le reti fatte in tutto 48 , dunque 8 reti a partita. La squadra A perde con C e allora, avendo 6 punti, vince con B e con D. Per vincere bisogna fare almeno 5 reti (si vince o 5-3 o 6-2 o 7-1 o 8-0); siccome le reti fatte da A sono 11 e i risultati delle partite della squadra A sono diversi, l'unica possibilità è che in una delle partite vinte abbia segnato 5 reti, nell'altra 6 . Ma allora A ha perso con C per 0 a 8 .
Ora si vede che B , avendo 4 punti, ha pareggiato una partita, così C , anzi c'è un unico pareggio B – C , finito dunque 4-4 .
Risulta dunque C – A = 8-0 , C – B = 4-4 e quindi, confrontando con la tabella delle reti fatte e subite da C , C – D = 1-7 .

5.- La figura da sola spiega la soluzione.



6.- Dividiamo P(x) per il prodotto (x – 6)(x – 4) otteniamo

$$P(x) = (x - 6)(x - 4)\,Q(x) + ax + b \qquad (1)$$

dovendo essere il resto un polinomio di grado al più 1 . Inoltre, essendo il divisore monico, il quoziente Q(x) è un polinomio a coefficienti interi. Per il teorema del resto di Ruffini P(6) = 6 , P(4) = 4 , da cui :

$$6 = 6a + b \ , \quad 4 = 4a + b$$

e risulta $a = 1$, $b = 0$.
Dalla (1) allora otteniamo che il termine noto di P(x) è uguale al prodotto del termine noto di Q(x) per – 6 per – 4 , ed è dunque divisibile per 24 .

7.- Sarà allora $A = a^2$, $B = b^2$, $C = c^2$, e $a^2 = b^2 - k$, $c^2 = b^2 + k$. Da qui :

$$a^2 + c^2 = 2\, b^2 \quad (1)$$

Dobbiamo quindi trovare le soluzioni intere dell'equazione (1).
La (1) ci dice intanto che a e c sono entrambi pari o entrambi dispari (come i loro quadrati) poiché hanno per somma un numero pari; inoltre possiamo trascurare il caso pari poiché allora anche b risulta pari e possiamo dividere ogni termine della (1) per 4 ottenendo una equazione analoga.
Dunque a e c sono entrambi dispari, diciamo $a = 2\,a' + 1$, $c = 2\,c' + 1$; la (1) diventa :

$$4\,a'^2 + 4\,a' + 1 + 4\,c'^2 + 4\,c' + 1 = 2\,b^2 ,$$

da cui $2(a'^2 + a' + c'^2 + c') + 1 = b^2$, per cui b^2 (e b) dispari.
Sarà quindi $a = b - 2\,r$, $c = b + 2\,s$, con r , s opportuni interi positivi. Sostituendo nella (1) :

$$b^2 - 4\,r\,b + 4\,r^2 + b^2 + 4\,s\,b + 4\,s^2 = 2\,b^2 ,$$

da cui :

$$r^2 + s^2 = b(\,r - s\,) .$$

Scelgo allora $r - s = 1$, in modo che b sia uguale a $r^2 + s^2$, ed ho la seguente tabella:

r	s	b	a	c
2	1	5	1	7
3	2	13	7	17
4	3	25	17	31
…	…	..	…	…

Così si vede che ci sono infinite soluzioni.

Metodo alternativo *uno* :

Si vede subito che , se x , y , z formano una terna pitagorica :

$$(\,x - y\,)^2 + (\,x + y\,)^2 = 2\,x^2 + 2\,y^2 = 2\,z^2 .$$

Quindi ogni terna $y - x$, z , $x + y$ con x , y , z terna pitagorica, fornisce una soluzione del nostro problema; e viceversa, ogni soluzione a, b, c del problema dà la terna pitagorica $(c - a)/2$, $(c + a)/2$, b .
P.e. dalla terna 3 , 4 , 5 , messa in evidenza nel bando della Gara , otteniamo la soluzione $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$.
Inoltre le soluzioni sono infinite essendo infinite le terne pitagoriche.

Metodo alternativo *due* :

L'equazione pitagorica $X^2+Y^2= Z^2$ ha per soluzioni intere le terne
$X = r^2-s^2$, $Y= 2rs$, $Z= r^2+s^2$ (con r, s interi).
Ciò è equivalente al fatto che il circolo di equazione $x^2+y^2=1$ ammette come equazioni parametriche (razionali) :

$$\mathcal{C} \dots . \begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Sappiamo che, in questo caso t è un parametro che rappresenta il coefficiente angolare della retta $= r/s$, $x = X/Z$, $y = Y/Z$.
Analogamente, il circolo di equazione $x^2+ y^2 = 2$ passa per il punto B(-1,-1), e, se lo interseco con una retta per B di coefficiente angolare t , questa lo intersecherà in un ulteriore punto P di coordinate funzioni razionali di t :

$$\begin{cases} y+1 = t(x+1) \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + t^2 \cdot (x+1)^2 - 2t(x+1) + 1 - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-1) + t(x+1)[t(x+1)-2] = 0$$

da cui una soluzione $x = -1$ relativa al punto B e l'altra ascissa di P , da cui :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2+2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{-1+2t+t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

Queste sono equazioni parametriche razionali del nostro circolo.
Siccome le coordinate di B e i coefficienti dell'equazione del circolo sono numeri razionali, se scelgo t razionale, anche le coordinate di P risultano razionali.
Posto allora $t = r/s$, con r , s interi , le terne :

$$a = s^2 - r^2 + 2rs$$
$$c = -s^2 + 2rs + r^2$$
$$b = r^2 + s^2$$

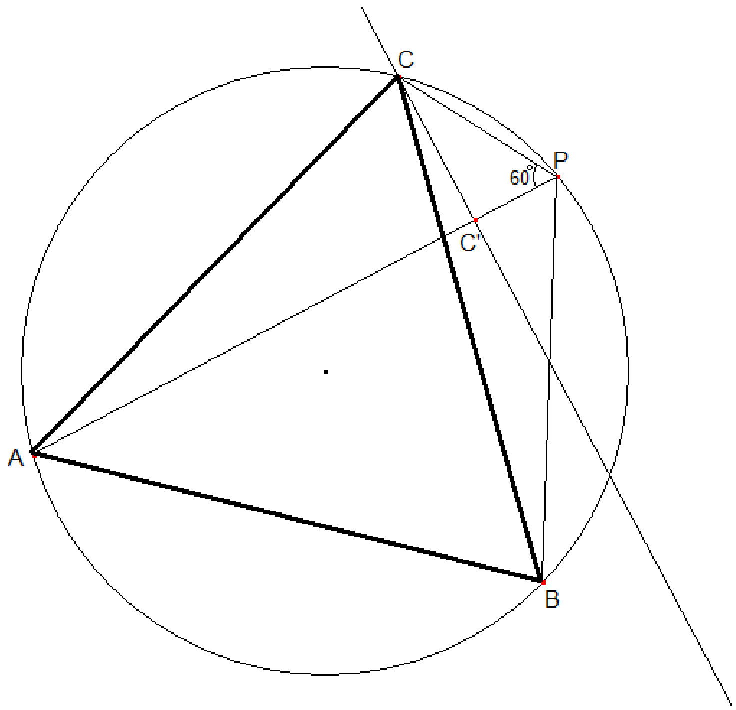
costituiranno tutte le soluzioni intere dell'equazione (1) .
P.e. $r = 2$, $s = 1$ dà $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$.

8.- Applichiamo al quadrilatero ABPC , inscritto nel circolo, il teorema di Tolomeo :

$$PB \cdot CA + PC \cdot AB = CB \cdot PA$$

siccome CA = AB = CB , risulta :

$$PB + PC = PA . \qquad (1)$$



Dal triangolo PAC , che ha l'angolo in P di 60° , per il teorema di Pitagora generalizzato, otteniamo:

$$AC^2 = PA^2 + PC^2 - 2PA \cdot PC'$$

essendo PCC' la metà di un triangolo equilatero , otteniamo :

$$AC^2 = PA^2 + PC^2 - 2PA \cdot PC' = AC^2 = PA^2 + PC^2 - PA \cdot PC$$

Analogamente dal triangolo PAB otteniamo :

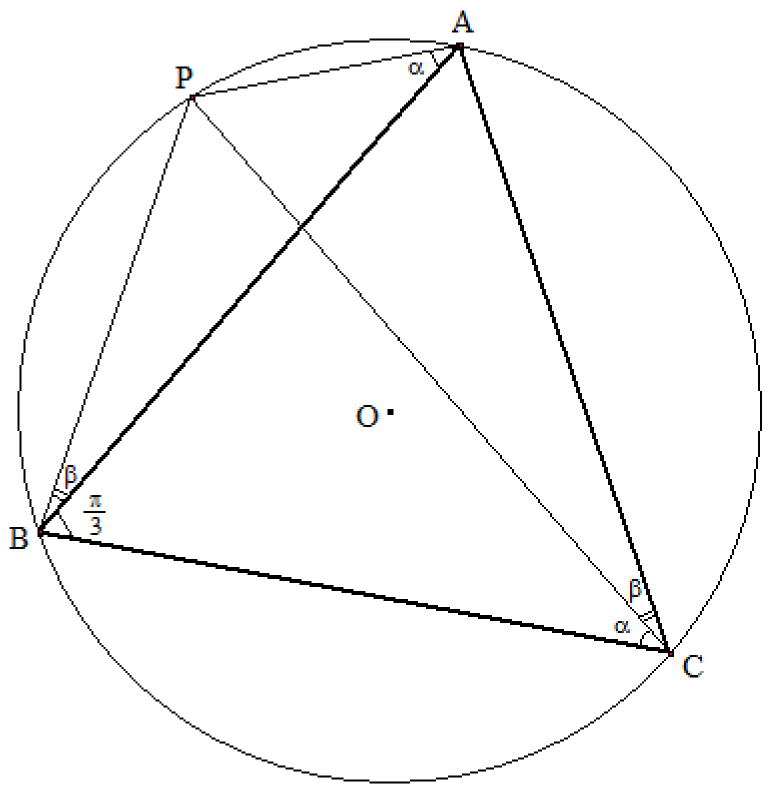
$$AB^2 = PA^2 + PB^2 - PA \cdot PB$$

Sommando membro a membro le due uguaglianze, si ha :

$$AC^2 + AB^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 + PA^2 - PA \cdot PB - PA \cdot PC$$

ma gli ultimi tre addendi danno, per la (1), somma zero, e dunque la somma dei tre quadrati è uguale a due volte il quadrato del lato del triangolo, ed è quindi costante.

Alternativa uno



Se indichiamo con *R* il raggio del circolo circoscritto , per il *teorema dei seni* applicato ai triangoli *PAC* , *PAB*, *PBC* possiamo scrivere :

$$\frac{PA}{\sin\beta} = 2R$$

$$\frac{PB}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\frac{PC}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)} = 2R$$

Perciò :

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 4R^2 \cdot \left(sin^2\beta + sin^2\alpha + sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\right)$$

Ma vale :

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \quad \rightsquigarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3} - \beta$$

E quindi se indichiamo con :

$$\mathcal{S} = PA^2 + PB^2 + PC^2$$

$$\mathcal{S} = 4R^2 \cdot \left(sin^2\beta + sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) + sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) \right)$$

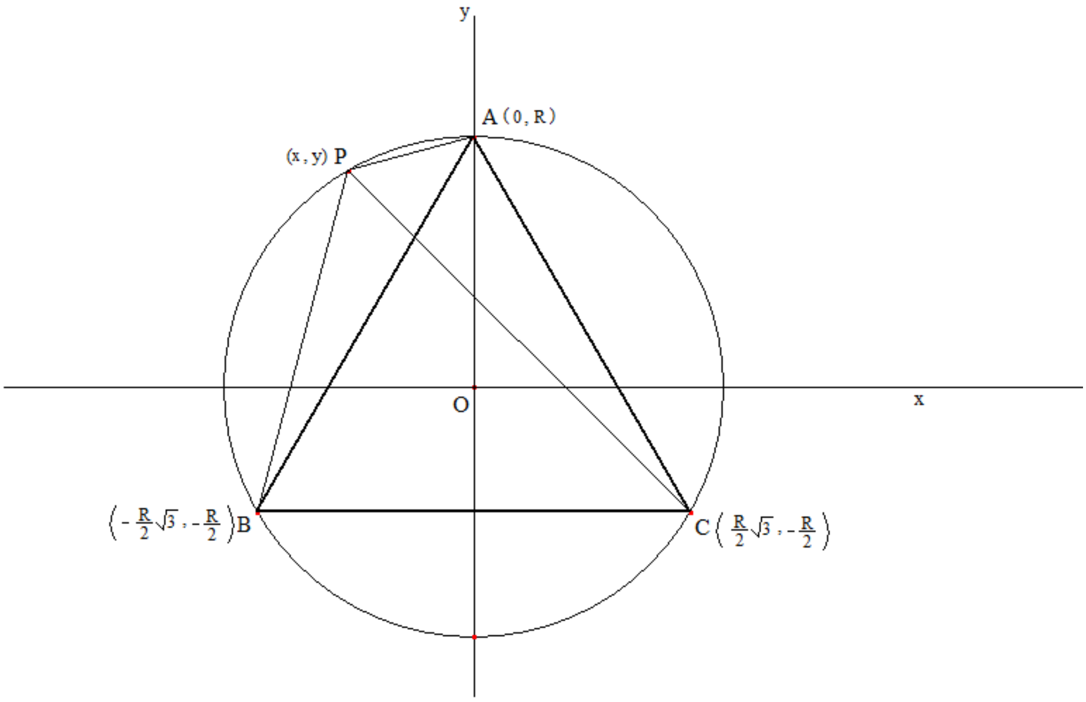
$$\mathcal{S} = 4R^2 \cdot \left(sin^2\beta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta - \frac{1}{2}\sin\beta\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\sin\beta\right)^2 \right)$$

$$\mathcal{S} = 4R^2 \cdot \left(sin^2\beta + \frac{3}{4}cos^2\beta + \frac{1}{4}sin^2\beta + \frac{3}{4}cos^2\beta + \frac{1}{4}sin^2\beta \right)$$

$$\mathcal{S} = 4R^2 \cdot \left(\frac{3}{2}sin^2\beta + \frac{3}{2}cos^2\beta \right) = 4R^2 \cdot \frac{3}{2} = 6R^2$$

Ovvia l’uguaglianza dei due risultati .

Alternativa due



$$\mathcal{S} = x^2 + (y - R)^2 + \left(x + R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + R\frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + R\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\mathcal{S} = x^2 + y^2 + R^2 + x^2 + \frac{3}{2}R^2 + \frac{1}{2}R^2 + x^2 + y^2 + y^2$$

$$\mathcal{S} = 3 \cdot (x^2 + y^2) + 3R^2 = 6R^2$$

Poiché vale $x^2 + y^2 = R^2$.