30ª GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA"

7 Marzo 2015

1.- Dato un segmento AB ed un suo punto interno C si determini e si costruisca il luogo dei punti P del piano tali che una bisettrice del triangolo ABP passi per C.

2.- Chiamiamo "piccolino" un numero naturale p che sia minore o uguale della somma dei quadrati delle cifre della sua rappresentazione decimale.
Quanti tra questi numeri sono minori di 100 ?
È vero che i numeri piccolini sono in numero finito ?

3.- Si dimostri che i quadrilateri di area massima inscritti in un circolo sono quadrati.
Si dimostri inoltre che tra i quadrilateri di area massima inscritti in una ellisse c'è un rettangolo $\mathcal{R}$.
Si determinino i lati di $\mathcal{R}$ in funzione dei semiassi dell'ellisse.

4.- Dato un triangolo equilatero ABC si divida ciascuno dei due lati AB e AC in n parti uguali mediante i punti $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ e $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ rispettivamente.
Si traccino poi i segmenti, paralleli al lato AC, che uniscono i punti B_i col lato BC, e quelli, paralleli al lato AB che uniscono i punti C_j col lato BC.

(i) quanti punti interni al triangolo sono intersezione di tali segmenti a due a due ?
(ii) per quali valori di n il baricentro del triangolo cade in uno di tali punti ?
(iii) in tal caso quanti sono i triangoli equilateri con vertici nei punti considerati che hanno quel punto come baricentro ?

5.- Un cubo di lato ℓ è suddiviso in 27 cubetti di lato $\ell/3$.
Qual è il numero massimo di cubetti che possiamo togliere in modo che la superficie del solido ottenuto sia uguale a quella del cubo ?

6.- Nel sistema di numerazione a base 6, quali sono gli interi positivi n di due cifre tali che n moltiplicato per 6 sia uguale a 7 volte la somma dei quadrati delle due cifre di n ?

7.- Sia p il prodotto di quattro numeri interi relativi successivi.
Dimostrare che p è un quadrato solo se uno dei fattori è 0.
[sugg. : considerare $p + 1$ …]

8.- Una imbarcazione di canottieri si allena su di un fiume. Quando procede controcorrente ha, rispetto all'acqua, una velocità doppia di quella che ha, essendo i vogatori rilassati, quando procede con il favore della corrente. Ad un certo momento andando controcorrente i canottieri passano vicino ad una bottiglia tappata che galleggia. Dopo un po' alcuni di loro suggeriscono di andare a recuperare la bottiglia per vedere se per caso non contenga un messaggio, sicché dopo 15 minuti dall'avvistamento smettono di vogare e discutono per altri 15 minuti e infine decidono di recuperarla, riprendendo a vogare verso valle.
Dopo un po' ritenendo puerile la loro curiosità riprendono la rotta a monte.
Dopo 40 minuti di voga cambiano di nuovo idea e riprendono a vogare verso la bottiglia.
La ritrovano a 3 km dal punto in cui l'avevano avvistata.
Qual è la velocità della corrente del fiume ?

SOLUZIONI DEI PROBLEMI DELLA 30ª GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA"

1.- sia P un punto tale che PC sia bisettrice dell'angolo APB. Per il teorema sulla bisettrice :

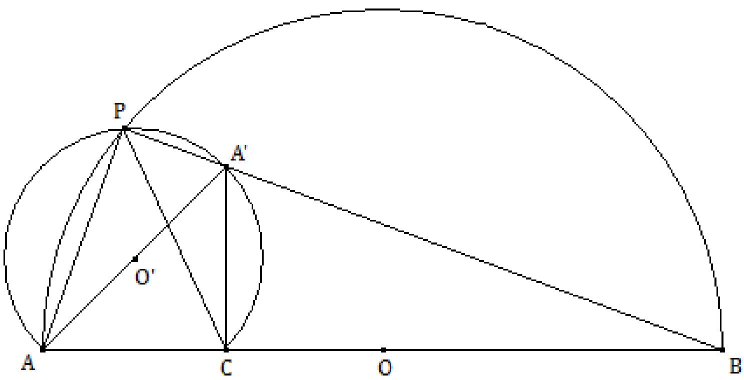
$$AP:PB = AC:CB = k$$

Ma il luogo dei punti per cui

$$\frac{AP}{PB} = k$$

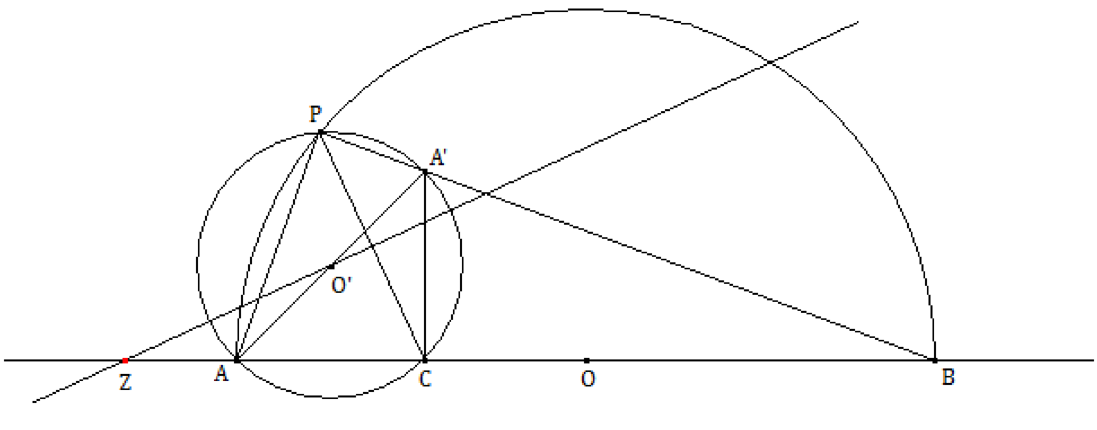
è un circolo (circolo di Apollonio).
Si tratta di costruire tale circolo : passa per C, ha centro sulla retta AB e quindi per completare la sua costruzione basterà determinare un suo ulteriore punto P.

Costruzione di un P :



Costruiamo il triangolo ACA' rettangolo isoscele e costruiamo il circolo di diametro AA', l'arco CA'A è il luogo dei punti che vedono AC sotto un angolo di 45° ; se ora consideriamo il punto P intersezione della circonferenza di diametro AB con tale arco risulta che la retta PC è bisettrice dell'angolo APB (infatti APB = 90°, APC = 45°).

Costruzione del circolo : basta osservare che il suo centro appartiene all'asse del segmento CP e alla retta AB :



2.- i numeri di una sola cifra sono tutti "piccolini" in quanto $a \leq a^2$, sono quindi 9. Vediamo quelli di due cifre cioè del tipo $10a + b$.

Se $a = 1$ $10 + b \leq 1 + b^2$ per $b = 4, 5, 6, 7, 8, 9$, e sono 6
Se $a = 2$ $20 + b \leq 4 + b^2$ per $b = 5, 6, 7, 8, 9$, e sono 5
$a = 3$ $30 + b \leq 9 + b^2$ per $b = 6, 7, 8, 9$, e sono 4

osserviamo che, siccome $b^2 \geq b$, in ogni riga, se c'è una soluzione b_0 ci sono anche le successive.

Così se $a = 4$ $40 + b \leq 16 + b^2$ $b = 6, 7, 8, 9$, e sono 4
$a = 5$ $50 + b \leq 25 + b^2$ $b = 6, 7, 8, 9$, e sono 4
$a = 6$ $60 + b \leq 36 + b^2$ $b = 6, 7, 8, 9$, e sono 4
$a = 7$ $70 + b \leq 49 + b^2$ $b = 6, 7, 8, 9$, e sono 4
$a = 8$ $80 + b \leq 64 + b^2$ $b = 5, 6, 7, 8, 9$, e sono 5
$a = 9$ $90 + b \leq 81 + b^2$ $b = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e sono 6

In tutto 51 (o 52 se tra i numeri naturali di una cifra mettiamo anche 0).

Oltre ai numeri "piccolini" messi in evidenza non ce ne sono altri, infatti se un intero ha tre cifre a, b, c risulta :

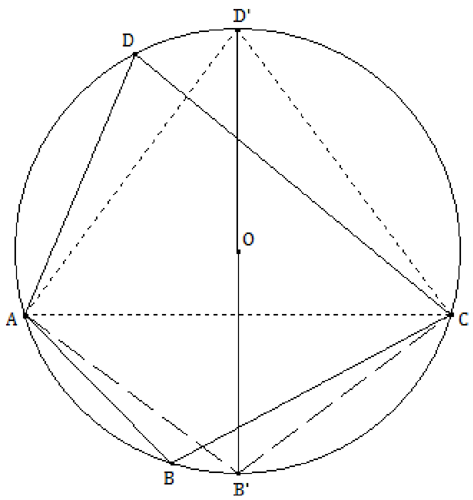
$$100a + 10b + c \ > a^2 + b^2 + c^2$$

in quanto $$10b \geq b^2 \quad per\ b = 0, 1, 2 \ldots, 9$$

e ancora : $$a(100 - a) > c(c - 1)$$

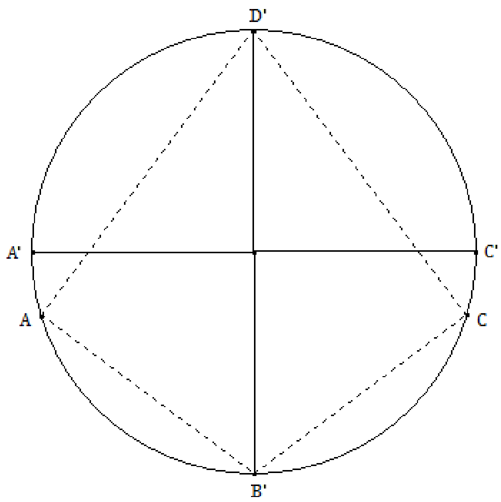
poiché : $$72 = max\{c(c - 1)\}\ , e\ \ 1 \cdot (100 - 9) < min\{a(100 - a)\}$$

3.- Prendiamo un quadrilatero ABCD, che non sia un quadrato, inscritto in un circolo e verifichiamo che la sua area è minore di quella del quadrato inscritto :



Consideriamo la diagonale AC; il suo asse di simmetria passa per O e incontra il circolo nei due punti B' e D'.

Il triangolo ACD’ ha area maggiore di quella di ACD (stessa base ma differente altezza), analogamente il triangolo AB’C ha area maggiore di quella del triangolo ABC, cosicché il quadrilatero AB’CD’ ha area maggiore di quella del quadrilatero ABCD.
Tracciamo ora l’asse del segmento B’D’ che incontra il circolo nei punti A’ e C’ . Ripetendo il ragionamento precedente si vede che il quadrilatero AB’CD’ ha area minore di quella di A’B’C’D’:



Consideriamo ora l’affinità di equazioni :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{b}{r} y \end{cases}$$

che trasforma il circolo di equazione :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

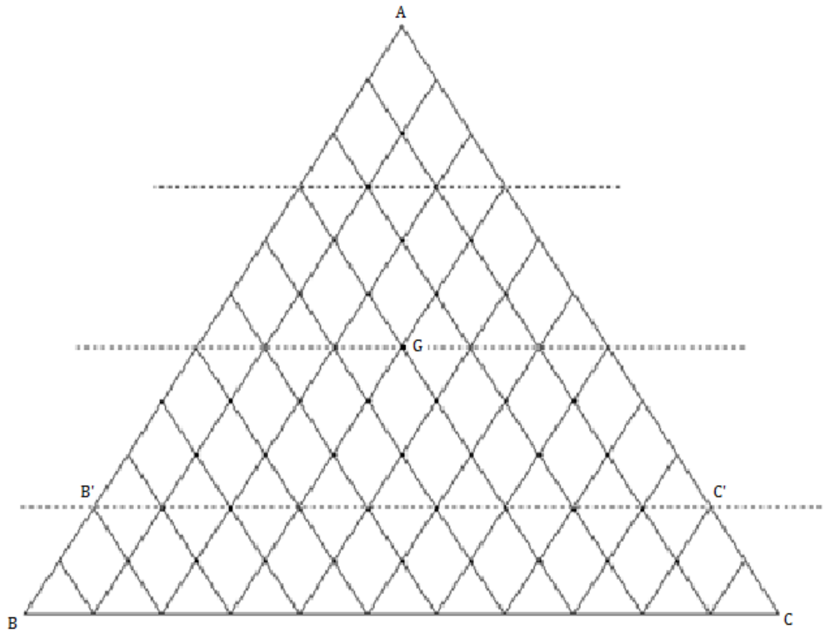
nell’ellisse di equazione :

$$\frac{x'^2}{r^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Siccome l’affinità conserva i rapporti tra le aree e rispetta il parallelismo trasforma i quadrati inscritti nel circolo nei parallelogrammi di area massima inscritti nell’ellisse. Tra questi c’è quello rettangolo che proviene dal quadrato coi lati paralleli agli assi e che ha quindi per lati rispettivamente :

$$l = \sqrt{2}r \,, m = \sqrt{2}r$$

4.- Data la figura :



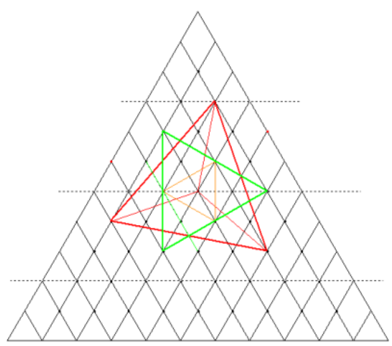
vediamo che tali punti sono situati su n – 2 rette parallele al lato BC e sono, a contarli da un vertice al lato opposto, in numero di :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}.$$

Chiamiamo $\Im$ l'insieme di tali punti e siccome il baricentro divide la mediana in due parti una il doppio dell'altra se esso è uno dei punti di $\Im$, il numero n in cui è stato diviso il lato di ABC è un multiplo di 3.
Lo stesso vale per il triangolo dei punti interni.

La figura mette in evidenza appunto che il triangolo AB'C' ha il baricentro in uno dei punti di $\Im$, mentre ciò non accade per il triangolo ABC.

Scegliamo in $\Im$ un qualunque punto L diverso da G e ruotiamo LG di 120° attorno a G ottenendo il segmento MG ; ruotiamo ancora di 120° ottenendo il segmento NG . Per la simmetria della figura anche M ed N appartengono ad $\Im$, ed il triangolo LMN ha il baricentro in G :



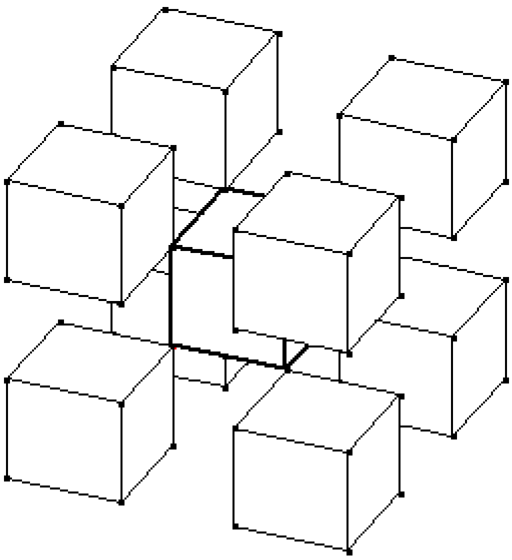
Vediamo così che i punti di $\Im$ diversi da G si distribuiscono in sottoinsiemi di 3 elementi ciascuno, i vertici dei triangoli richiesti, perciò tali triangoli sono in numero di :

$$\left[\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} - 1\right] : 3$$

Piccola verifica : dimostrare che se n è divisibile per 3 lo è anche

$$\left[\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}-1\right]$$

5.- il cubo ha 6 facce, se prendiamo come unità di misura il lato del cubo piccolo, la faccia del cubo grande misura 9 unità di superficie.
La superficie totale del cubo è pertanto 6 · 9 = 54 unità. Il numero minimo di cubetti che formeranno il solido che rimane è pertanto 9 e in effetti con 9 cubetti si può ottenere un solido di superficie totale 54 unità . La figura mostra che in effetti ciò è possibile :



6.- Sia $n = 6a + b$, allora si ha :

$$n \cdot 6 = 7 \cdot (a^2 + b^2)$$

per cui, essendo 7 primo, n è divisibile per 7 che si scrive 11 nel sistema di numerazione a base 6.
Ma in tale sistema i numeri di due cifre multipli di 11 sono 11, 22, 33, 44, 55, quindi le due cifre di n sono uguali, a = b, ed n diviso 11 è uguale ad a.
Si ha quindi $a \cdot 6 = 2a^2$, da cui a = 3 , n = 33 = 3·6 +3 = ventuno .

7.- $p = (n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1) = n\cdot(n-2)(n^2-1) = (n^3-n)(n-2) =$
$= n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n = n^4 - 2n^3 + n^2 - 2n^2 + 2n = (n^2-n)^2 - 2(n^2-n)$

per cui : $p+1 = (n^2-n)^2 - 2(n^2-n) + 1 = (n^2-n-1)^2$

Dunque p e $p+1$ sono entrambi quadrati, ma gli unici quadrati successivi sono 0 e 1, quindi $p = 0$, cioè uno dei quattro numeri è 0 .

8.- I canottieri vogano controcorrente 15 + 40 minuti ad una certa velocità v ; quando tornano indietro hanno, sempre rispetto all'acqua, una velocità che è la metà di v , ed allora impiegano un tempo doppio : 110 minuti .
Poi sono stati fermi per 15 minuti, quindi tra l'avvistamento della bottiglia e il suo recupero sono trascorsi 55 + 110 + 15 = 180 minuti = 3 h .
In questo tempo la bottiglia ha percorso 3 km, quindi la velocità della bottiglia (cioè del fiume) è di 1 km/h .