31ª GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA" 2 Aprile 2016

SOLUZIONI

1.- Sia n un numero intero. È vero che se la penultima cifra di n^2 è dispari allora l'ultima è 6?

Possiamo supporre n positivo.
Sia :
$n = 100c + 10d + u$, $dove\ a, d, u\ sono\ interi\ positivi\ e\ d, u\ \leq 9$;
risulta :

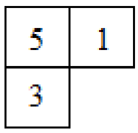
$$n^2 = (10c + d)^2 \cdot 100 + 2(10c + d) \cdot 10u + u^2$$

La penultima cifra di n^2 è dunque uguale alla penultima cifra di $20ud + u^2$ ed è dispari se e solo se la cifra delle decine di u^2 è dispari.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Questo succede solo nei due casi u^2 =16 oppure 36, e allora la cifra delle unità di u^2 (che è uguale a quella di n^2) è uguale a 6.

2.- In un quadrato magico sommando gli elementi di una riga, di una colonna o di una diagonale si ottiene lo stesso numero. Esistono quadrati magici 3×3, formati con i numeri da 1 a 9 che contengono la seguente configurazione ?

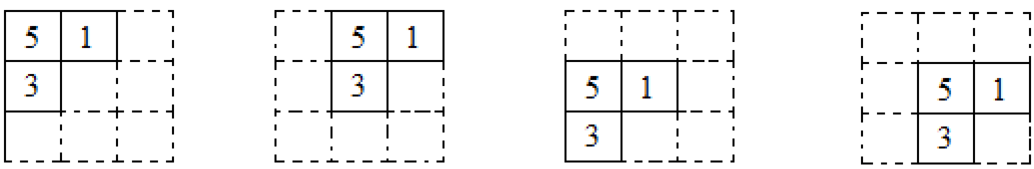


Quanti sono ?

La somma dei numeri che formano il quadrato magico è :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

Quindi la somma degli elementi di una riga (o di una colonna) è 15.
La nostra configurazione può essere contenuta nel quadrato magico in uno dei seguenti quattro casi :



Nel primo caso piazzo successivamente il 9 = 15 – 5 – 1 , ed il 7, ma allora nella casella centrale non ci può stare alcun numero (9+7 > 15).

Nel secondo e nel terzo caso al posto della x ci andrebbe il numero 11 (osservare la diagonale), invece nel quarto caso piazzo successivamente il 9, il 7; ora il numero 8 non può stare né nella colonna del 9 né nella riga del 7, quindi va in basso a destra .
Di seguito piazzo il 6, il 2, il 4. Anche la somma dei numeri di ciascuna diagonale risulta in tal caso uguale a 15.
Questo è quindi l'unico caso possibile :

5	1	*9*
3		
7		

	5	1
	3	
x		

		x
5	1	
3		

2	*7*	*6*
9	5	1
4	3	*8*

3.- Quattro amici con le relative mogli organizzano un torneo di tennis doppio misto. Per evitare eventuali liti familiari ogni marito non gioca mai né in coppia con la propria moglie, né contro.
Quanti incontri verranno disputati al massimo se le coppie si incontrano una sola volta ?

Indichiamo con *A*, *B*, *C*, *D* i quattro amici, con *a*, *b*, *c*, *d*, le rispettive mogli :
A può giocare in squadra b, c, d, B può giocare in squadra con a, c, d, eccetera.
In tutto avrò 4 · 3 squadre possibili. Considero una squadra, per esempio Ab; questa può giocare contro ogni squadra che non contenga né a né B per la regola data.
Ab può giocare dunque o contro Cd o contro Dc e così le altre.
Quindi ciascuna delle 12 squadre gioca due partite e dunque in tutto ci sono 12 partite :

2 · 12 : 2 , divido per 2 poiché altrimenti ogni partita viene contata due volte.

4.- L'anno scorso nella nostra classe le ragazze erano più numerose dei maschi. Quest'anno abbiamo due ragazzi in meno e una ragazza in più così la percentuale dei maschi è scesa in particolare del 20 %.
Quanti siamo in totale nella classe ?

Indichiamo con m il numero dei ragazzi e con f quello delle ragazze presenti l'anno scorso.
La percentuale dei maschi l'anno scorso era quindi :

$$\frac{m}{m+f}$$

Quest'anno tale percentuale risulta :

$$\frac{m-2}{m+f-1}$$

Ed è l'80 per cento di quella dell'anno precedente , perciò possiamo scrivere :

$$\frac{m-2}{m+f-1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{m}{m+f}$$

Quindi :

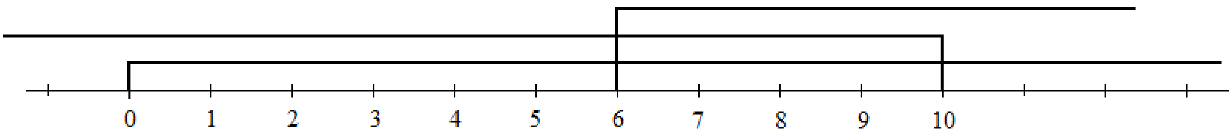
$$5(m+f)\cdot(m-2)=4m(m+f-1)$$

Da cui :

$$5m^2-10m+5fm-10f=4m^2-4fm-4m$$

$$m^2-6m+fm-10f=0$$

$$(*)\qquad f=m\cdot\frac{m-6}{10-m}$$



Poiché f è maggiore di 0 , ne segue che $6<m<10$ cioè m può essere 7, 8, 9 .
per m = 7 dalla (*) si ottiene f = 7/3 non accettabile;
per m = 8 si ottiene f = 8 non accettabile perché in tal caso sarebbe f = m;
per m = 9 si ottiene f = 27 che è quindi l'unica soluzione possibile.

In tal caso risulta che quest'anno in classe siamo in 9 + 27 – 1 = 35.

5.- È vero che :

$$-\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}=3\quad ?$$

$$-\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}=3\Leftrightarrow-\log_3\log_3 3^{\frac{1}{27}}=3\Leftrightarrow-\log_3\frac{1}{27}=3\Leftrightarrow\log_3 27=3$$

6.- I punti O, A_1, A_2; …, A_n sono disposti ordinatamente su di un circolo ; il poligono convesso di tali vertici è diviso dalle diagonali uscenti da O in n – 1 triangoli.
Quanti di essi possono risultare acutangoli ? Quanti di essi possono essere rettangoli ?
Quanti ottusangoli ?

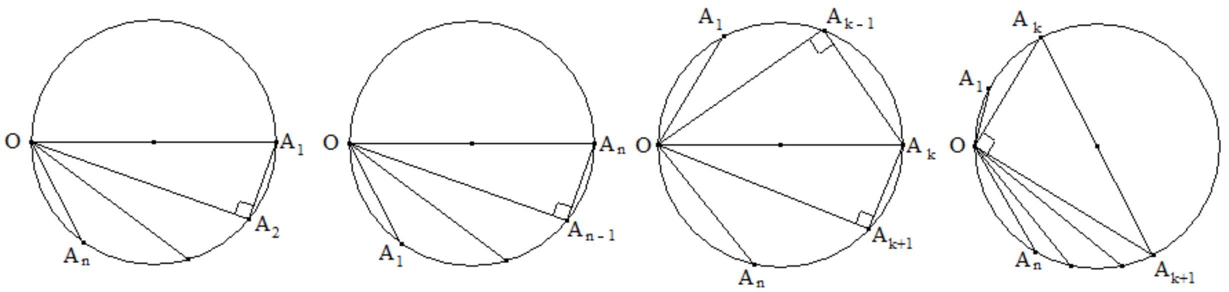
Si verifica facilmente che un triangolo è rettangolo se e solo se uno dei suoi lati è diametro del circolo circoscritto. Analogamente un triangolo è ottusangolo se e solo se l'arco minimo del circolo circoscritto che contiene i suoi tre vertici è minore di una semicirconferenza ed è acutangolo quando quest'arco minimo è maggiore di una semicirconferenza.

Con riferimento al nostro quesito uno dei triangoli sarà rettangolo se e solo se uno dei suoi lati è un diametro del circolo. Se questo diametro è quello per O, sia esso OA_k , allora i triangoli rettangoli sono :

- uno, se k = 1 o k = n ;
- due, se k è diverso da 1 e da n.

Se invece il diametro è A_kA_{k+1} l'unico triangolo rettangolo è OA_kA_{k+1} .

In entrambi i casi tutti gli altri triangoli della nostra suddivisione sono ottusangoli .



Analogamente si vede che uno solo dei triangoli OA_kA_{k+1} della suddivisione può essere acutangolo e ciò si verifica quando l'arco A_kA_{k+1} contiene il punto O' diametralmente opposto di O ed è minore di una semicirconferenza .
Anche in questo caso tutti gli altri triangoli sono ottusangoli .
Ci resta da considerare il caso in cui tutti i punti, compreso O, siano situati su di un arco minore di una semicirconferenza, nel qual caso tutti i triangoli risultano ottusangoli.

7.- Quante sono le successioni di 6 elementi formate con le cifre 0, 1 che contengono almeno due cifre 1 successive ?

Risolviamo dapprima il problema per un numero n di elementi minore di 6 :
per n = 1 il numero S_1 di tali successioni è uguale a 0;
per n = 2 , $S_2 = 1$;
per n = 3 , $S_3 = 3$;
per n = 4 , $S_4 = 8$.
Ora una successione $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ di n+1 elementi che inizia con lo 0 soddisfa la nostra condizione se e solo se la soddisfa la successione $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$; se invece incomincia con 1, 0 va bene se e solo se $a_2, a_3, \dots, a_n$ va bene e , se inizia con 1, 1 va in ogni caso bene. Si ha quindi

$$S_{n+1} = S_n + S_{n-1} + 2^{n-1}$$

Da qui :

$$S_3 = S_2 + S_1 + 2 = 1 + 0 + 2 = 3$$

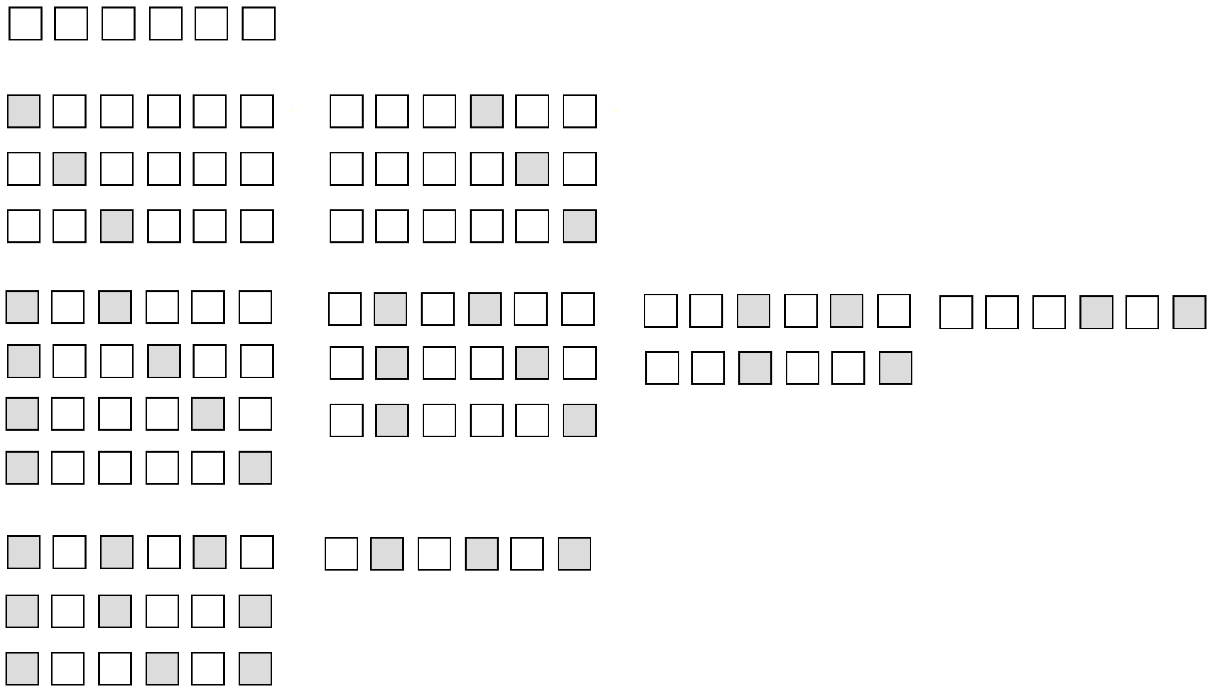
$$S_4 = S_3 + S_2 + 2^2 = 3 + 1 + 4 = 8$$

$$S_5 = S_4 + S_3 + 2^3 = 8 + 3 + 8 = 19$$

$$S_6 = S_5 + S_4 + 2^4 = 19 + 8 + 16 = 43$$

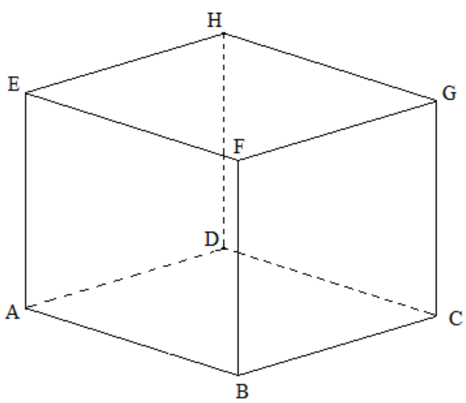
La formula ricorsiva ci permette di trovare S_n , $\forall\, n \in \mathbb{N}$; però possiamo trovare S_6 direttamente mediante altre considerazioni : proviamo cercare fra le nostre sequenze quelle che **non** contengono due 1 successivi :

-. 1 sequenza di soli 0;
-. 6 sequenze che contengono un solo 1;
-. 10 quelle che contengono due 1;
-. 4 quelle che contengono tre 1;



In tutto 21. Siccome le successioni di 6 elementi formate con le cifre 0, 1 sono $2^6 = 64$, quelle con due 1 successivi sono $64 - 21 = 43$.

<u>**8.-**</u> Si considerino quattro vertici non complanari di un cubo di lato 1 che a tre a tre non appartengono ad una stessa faccia .
Si verifichi che il tetraedro che ha per vertici i quattro punti è regolare .
Si determini il volume di tale tetraedro .



Sia A uno dei quattro vertici, vediamo allora che B non può essere un altro dei quattro ; infatti C, D non fanno parte del gruppo perché A, B, C, D fanno parte della stessa faccia ; così E, F . Quindi i quattro punti sarebbero A, B, H, G, ma essi sono complanari. Per simmetria allora né E né D possono far parte dei quattro e quindi restano A, C, F, H e G. Ma G va escluso poiché, come abbiamo visto, gli estremi di uno stesso spigolo non possono appartenere ai quattro e invece GC, GF e GH sono tre spigoli.
Restano quindi A, C, F, H.
Si vede che così ogni spigolo del tetraedro è una diagonale di una faccia del cubo. Dunque il tetraedro è regolare di spigolo $\sqrt{2}$. Un triangolo di base del tetraedro ha area :

$$S_b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ed altezza h :

$$h = \sqrt{2 - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

ora applichiamo Pitagora per determinare l'altezza H del tetraedro :

$$H = \sqrt{h^2 - \frac{h^2}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Cosicché il volume del tetraedro :

$$V = \frac{S_b \cdot H}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{1}{3}$$