<u>32° GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA"</u>

SOLUZIONI

<u>P1.-</u> Suddividendo il cubo in $3^3 = 27$ cubetti di lato 1/3 del lato di ***C*** il parallelepipedo che togliamo è formato da tre di tali cubetti, quando togliamo il secondo "parallelepipedo" (e il terzo) dobbiamo ricordare che il cubetto centrale è già stato tolto e quindi in totale al cubo iniziale abbiamo tolto 3+2+2 = 7 cubetti ottenendo così un solido ***S***, formato dunque da 20 cubetti. Il rapporto tra i volumi di ***S*** e di ***C*** è 20/27.
Ora su ciascuno dei cubetti che costituiscono ***S*** operiamo allo stesso modo; dunque il rapporto tra i volumi dei solidi di ***R*** e dei cubi di ***S*** resta il medesimo 20/27. Quindi il rapporto tra il volume di ***R*** e quello di ***C*** risulta:

$$\frac{R}{C} = \frac{R}{S} \cdot \frac{S}{C} = \left(\frac{20}{27}\right)^2$$

<u>P2.-</u> sia $a \in S$, consideriamo gli n+1 elementi di S : a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, $\varphi^3(a)$, … , $\varphi^{n-1}(a)$, $\varphi^n(a)$ essi non possono essere tutti distinti, poiché gli elementi di S sono n, dunque ce ne sono almeno due di uguali, siano $\varphi^v(a) = \varphi^u(a)$ con $0 \le v < u \le n$; per cui essendo φ una biiezione $a = \varphi^{u-v}(a)$ e ciò implica che a è φ-periodico di periodo $t \le u - v \le n$. Abbiamo perciò risposto alle prime due domande.
Sia p il periodo di un elemento $a \in S$; consideriamo la successione a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, $\varphi^3(a)$, … , $\varphi^{p-1}(a)$ che chiameremo ciclo $\gamma(a)$ generato da a. Ogni elemento di $\gamma(a)$ genera il ciclo stesso $\gamma(a)$. Infatti dato $\varphi^r(a)$ si ha $\varphi^{p-r}(\varphi^r(a)) = \varphi^p(a) = a$. Da ciò segue che due cicli che contengono un medesimo elemento coincidono. Un ciclo ha p elementi se p è il periodo di uno qualunque dei suoi generatori. Da ciò segue che gli elementi di periodo p si distribuiscono in cicli a due a due disgiunti ciascuno di lunghezza p, e quindi la loro unione è un insieme di elementi multiplo di p.

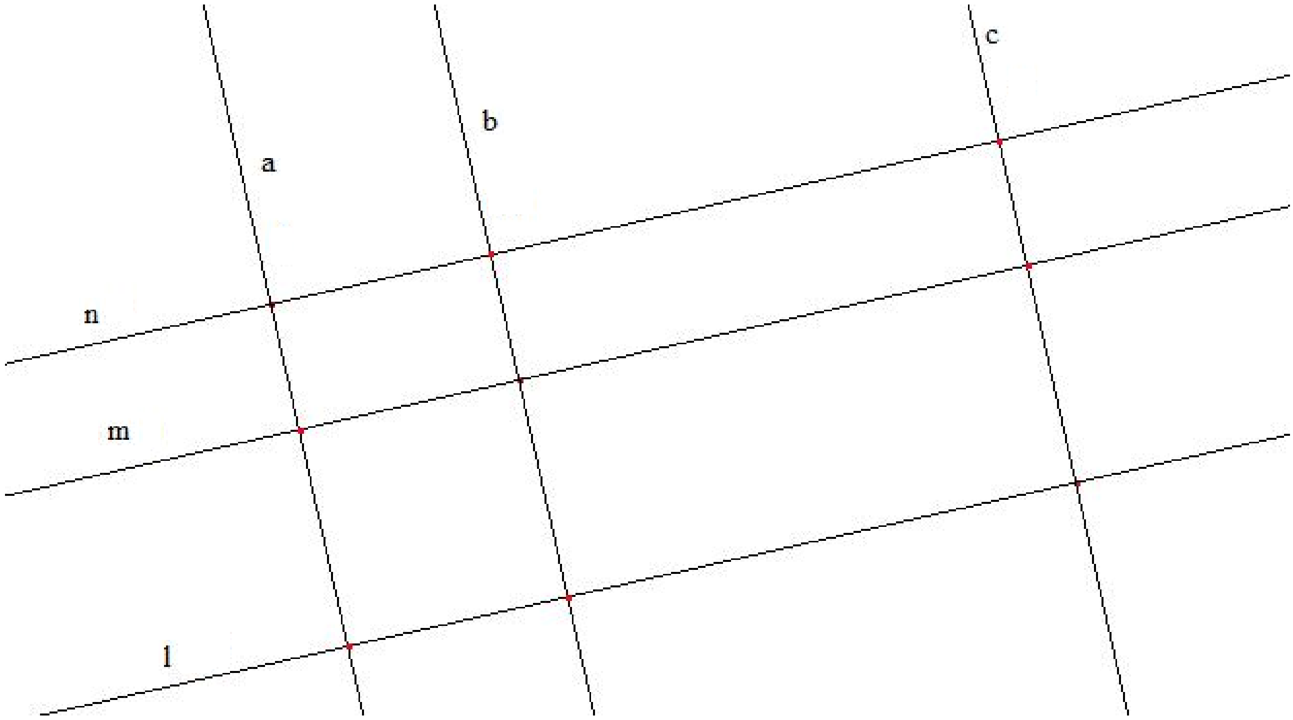
<u>P3.-</u> I due guidatori si incontreranno dopo aver percorso complessivamente 1152 metri nello stesso tempo t, perciò, con ovvio significato dell'equazione:

$$10t + \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t^2 + 10t\right) = 1152$$

$$t^2 + 40t - 2304 = 0$$

La cui soluzione accettabile è t = 32, cioè i due si incontrano dopo 32 secondi : il ciclista C ha percorso 320 metri e il motociclista viaggia a $v = 10 + 1 \cdot 32 = 42$ m/s.

P4.- si sa che, con riferimento ad un sistema cartesiano del piano, ciascuna coordinata del baricentro di un triangolo è 1/3 della somma delle coordinate omonime dei vertici del triangolo. Introduciamo allora nel nostro piano un sistema cartesiano scegliendo l'asse x parallelo alle rette l, m, n e l'asse y parallelo alle rette a, b, c :



siano allora x = a, x = b, x = c, le equazioni di quest'ultime e y = l, y = m, y = n le equazioni delle prime.
I nove punti di intersezione hanno coordinate (a, l), (a, m), (a, n), (b, l), (b, m), (b, n), (c, l), (c, m), (c, n). Scegliamo ora un triangolo che soddisfi la condizione del testo: come primo vertice prendiamo, ad esempio, (a, l) allora gli altri due vertici non devono appartenere né alla retta x = a, né alla retta y = l, scegliamo quindi (b, m) come secondo vertice e ci resta (c, n) come terzo (perché non deve appartenere né a x = b, né a y = m). Il baricentro G di questo triangolo ha coordinate:

$$G\left(\frac{a+b+c}{3},\frac{l+m+n}{3}\right)$$

ma i triangoli che soddisfano la condizione richiesta da l testo sono quelli che hanno i vertici con ascissa diversa e ordinata diversa e dunque le tre ascisse sono, a meno dell'ordine, a, b, c e le tre ordinate l, m, n. Dunque tutti i triangoli in questione hanno lo stesso baricentro G.
Osserviamo infine che, siccome quello di baricentro è un concetto affine, la proprietà resta valida anche se le due terne di rette non sono ortogonali.

P5.- la probabilità richiesta è :

$$p = \frac{B}{24}$$

dove 24 è il numero delle disposizioni di partenza e B il numero di quelle che conducono alla disposizione richiesta.

Osserviamo che il procedimento del solitario termina quando si giunge ad una disposizione in cui al 4 segue Ø e cioè nei seguenti casi:

1, 4, Ø, 2, 3 ; 1, 4, Ø, 3, 2 ; 1, 3, 4, Ø, 2 ; 1, 2, 4, Ø, 3 ; 1, 3, 2, 4, Ø ; 1, 2, 3, 4, Ø

nell'ultimo caso con esito positivo, negativo negli altri.

Contiamo allora i casi in cui a partire da una disposizione iniziale (sono quelle che iniziano con Ø) si perviene a una disposizione il cui esito è negativo. Osserviamo che, se consideriamo il procedimento inverso, al posto della casella vuota ci va l'asso, se questo è al primo posto (inversa della prima mossa), oppure X + 1 se questo è preceduto da X:

1, 4, Ø, 2, 3 proviene da Ø, 4, 1, 2, 3 oppure dalla sequenza:

Ø, 4, 3, 2, 1 → 1, 4, 3, 2, Ø → 1, 4, Ø, 2, 3; quindi due disposizioni iniziali portano a 1, 4, Ø, 2, 3

1, 4, Ø, 3, 2 proviene solo da Ø, 4, 1, 3, 2;

1, 3, 4, Ø, 2 proviene da Ø, 3, 4, 1, 2 oppure dalla sequenza:

Ø, 3, 1, 4, 2 → 1, 3, Ø, 4, 2 → 1, 3, 4, Ø, 2 ; quindi due disposizioni iniziali portano a 1, 3, 4, Ø, 2

1, 2, 4, Ø, 3 proviene da Ø, 2, 4, 1, 3 oppure dalle sequenze:

Ø, 1, 4, 2, 3 → 1, Ø, 4, 2, 3 → 1, 2, 4, Ø, 3

Ø, 3, 4, 2, 1 → 1, 3, 4, 2, Ø → 1, Ø, 4, 2, 3 → 1, 2, 4, Ø, 3

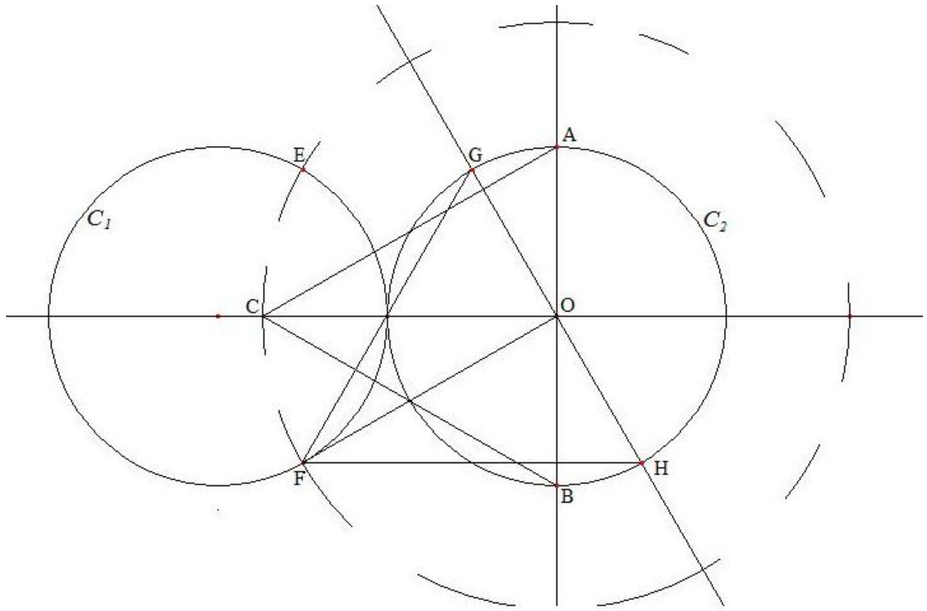
Ø, 3, 1, 2, 4 → 1, 3, Ø, 2, 4 → 1, 3, 4, 2, Ø → 1, Ø, 4, 2, 3 → 1, 2, 4, Ø, 3; in totale quattro disposizioni;

1, 3, 2, 4, Ø proviene solo da Ø, 3, 2, 4, Ø .

In totale sono 10 le disposizioni iniziali che danno esito negativo ed allora B = 24 – 10 = 14 sono le disposizioni che danno esito positivo, risulta perciò:

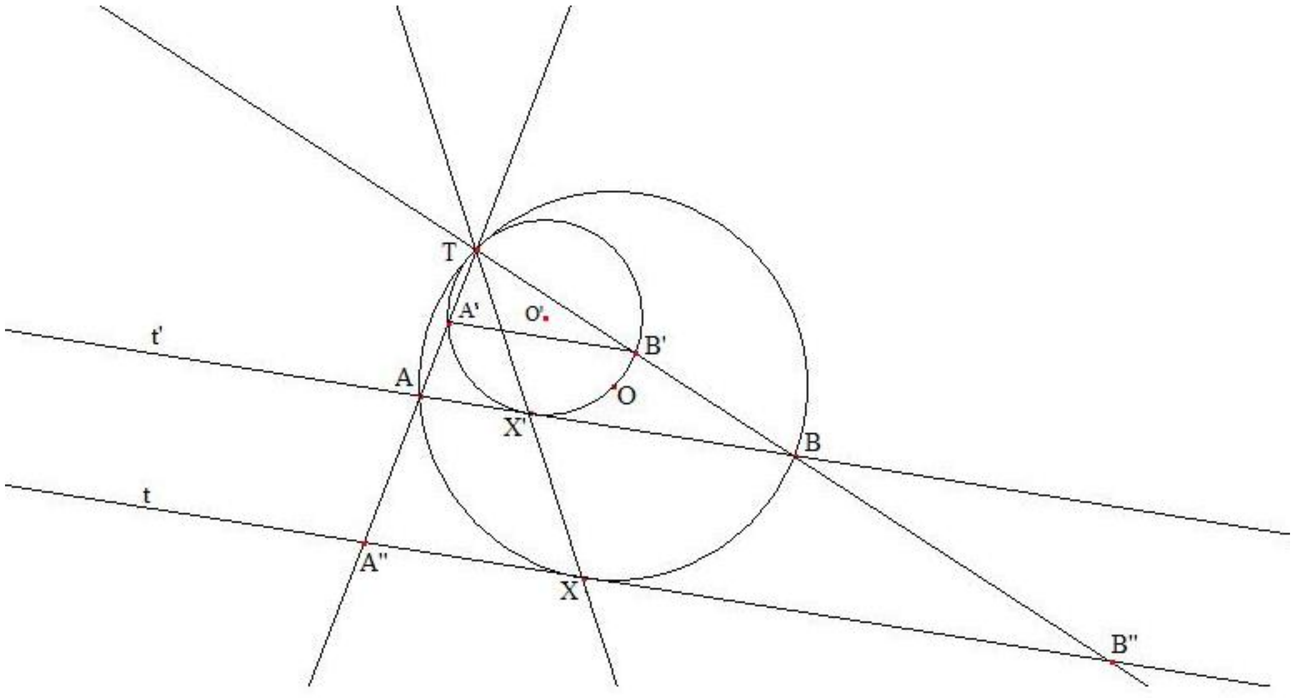
$$p = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

P6.- siccome il triangolo deve avere due vertici su C_2, il suo lato non potrà superare il diametro 2r del circolo stesso. Proviamo allora a costruire un triangolo equilatero avente per lato il diametro AOB di C_2 parallelo alla tangente comune e il terzo vertice C interno a C_1 (e ciò è possibile essendo l'altezza di tale triangolo equilatero $r\sqrt{3}$.



Siano E, F le due intersezioni di C_1 con il circolo di centro O passante per C: il triangolo equilatero avente per altezza il segmento OF e per base il diametro GH di C_2 ortogonale ad OF risolve il problema.

P7.- osserviamo che i due circoli sono il primo il doppio dell'altro, e precisamente al primo C corrisponde il secondo C' nell'omotetia Ω di centro T e rapporto 1/2.



Nell’omotetia si corrispondono i due triangoli TAB e TA’B’ e il rapporto tra le loro aree TA’B’/TAB risulta quindi $(1/2)^2 = 1/4$.
Poiché nell’omotetia Ω al punto A corrisponde A’, e a B corrisponde B’, alla retta t’ corrisponde la retta A’B’ che risulta quindi parallela alla retta t’ tangente C’ in X’, ma allora per la simmetria del circolo C’ rispetto al diametro per X’, il punto X’ divide in due parti uguali l’arco A’X’B’.
Ne risulta che i due angoli alla circonferenza A’TX’ e X’TB’ sono uguali e quindi TX(=TX’) è la bisettrice dell’angolo ATB.

P8.- un numero è 4-divisibile quando le sue due ultime cifre DE formano un numero 4-divisibile. Il numero E non può essere maggiore di 2, poiché è uguale ad A:4. Quindi le possibilità per DE sono 12, 32, 52, … .
Sia DE = 12, abbiamo quattro casi:
(i) C 4-divisibile, allora le ultime due cifre del quoziente sono 03=BA, assurdo perché ABCD=3…
(ii) C diviso per 4 dà per resto 2, quindi 212:4=53 assurdo poiché ABCD sarebbe = 3….
(iii) C diviso per 4 dà per resto 1, quindi 112:4=28 assurdo poiché AB=82 diverso da 21·4 …
(iv) C diviso per 4 dà per resto 3 e tutto funziona! $^{3}12$=…78, quindi:

$$87C12 : 4 = 21C78$$

piccolo pensiero per giustificare C = 9.