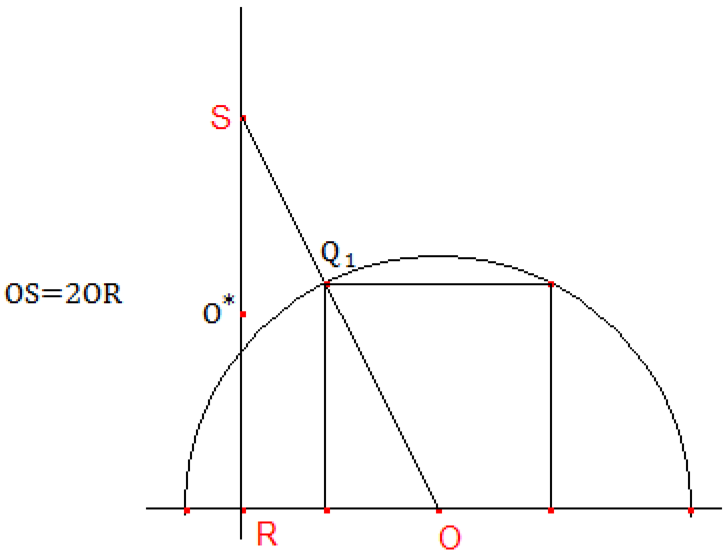
33ª GARA MATEMATICA “CITTÀ DI PADOVA”
7 APRILE 2018

SOLUZIONI

1.- Dei quattro vertici del quadrato, due stanno sulla semicirconferenza e due sul diametro, infatti tre non possono stare sul diametro (sarebbero allineati), né tre sulla semicirconferenza (il relativo triangolo rettangolo isoscele avrebbe i tre vertici sulla semicirconferenza e il quarto vertice del quadrato apparterebbe all’altra metà del circolo).
Il quadrato ha quindi un lato appartenente al diametro e il lato opposto parallelo al diametro. Osserviamo che la figura è simmetrica rispetto al raggio ortogonale al diametro, dunque se consideriamo un punto R sul diametro ed un punto S tale che RS sia ortogonale a OR e doppio di OR (dove O è il centro della semicirconferenza) l’intersezione Q_1 della retta OS con la semicirconferenza sarà uno dei vertici del quadrato richiesto, gli altri si costruiscono di conseguenza.

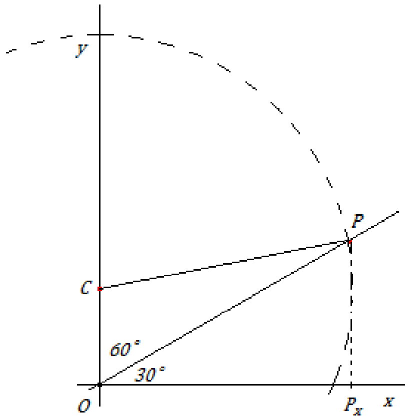


2.- Dei tre addendi due sono dispari ed uno è pari, quindi la somma è divisibile per 2, ma non sempre per 3, infatti per n = 2 si ha 16 + 25 = 41 non divisibile per 3.
Se n è dispari maggiore di 1 vale:

$$x^n + y^n = (x + y) \cdot (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + y^{n-1})$$

e dunque $4^n + 5^n$ è divisibile per 9, e $3^n + 5^n$ è divisibile per 8, per cui Σ risulta divisibile sia per 9 che per 8 ed è quindi divisibile per 72.

3.- Introduciamo nel piano orizzontale dove vola l’aereo un sistema di coordinate cartesiane avente come asse y la retta che contiene la rotta dell’aereo orientato come la rotta, e fissiamo



l'origine nel punto in cui si trova l'aereo nell'istante in cui si verifica il lampo, l'asse x di conseguenza. Il lampo si verifica in un punto P che appartiene alla retta che forma un angolo di 30° con l'asse delle x, retta avente equazione:

$$(1) \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

inoltre essendo la velocità dell'aereo e quella del suono, rispettivamente di 600 km/h e 1000 km/h, quando il pilota sente il tuono il suono avrà percorso la distanza:

$$D = \frac{1000}{600}S = \frac{5}{3}S$$

essendo S la strada percorsa dall'aereo.
Dunque quando il pilota sente il tuono l'aereo si trova ad una distanza D = 5/3 S dal punto P in cui è avvenuto il lampo. Ma allora P appartiene al circolo di centro C (punto in cui è arrivato l'aereo) e raggio D = 5/3 S.
Se prendiamo S come unità di misura, tale circolo ha equazione:

$$x^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$(2) \quad 9x^2 + 9y^2 - 18y - 16 = 0$$

Le coordinate di P costituiscono perciò una soluzione del sistema costituito dalle due equazioni (1) e (2).
Sostituendo otteniamo:

$$27x^2 + 9y^2 - 18y - 16 = 0$$
$$36y^2 - 18y - 16 = 0$$
$$18y^2 - 9y - 8 = 0$$

da cui, scartando la radice negativa, otteniamo:

$$y_1 = \frac{9+\sqrt{657}}{36}$$

Essendo il triangolo OPP_x la metà di un triangolo equilatero, risulta $OP = 2PP_x$, per cui

$$OP = 2y_1S = 2 \cdot \frac{9+\sqrt{657}}{36} \quad (\approx 1.9\ km)$$

Altra via:
in 6 secondi l'aereo percorre 1000 metri e il suono 1666.67 metri, quindi per il teorema di Carnot vale:

$$1666.67^2 = x^2 + 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot x \cdot \cos 60$$

dove x = OP, di questa equazione la radice accettabile fornisce x = 1924 m.

<u>4.-</u> Sappiamo che un polinomio P(x) a coefficienti reali, di secondo grado, è riducibile se e solo se ammette uno zero reale, se e solo se il grafico della funzione y = P(x) incontra l'asse x. Essendo il grafico di una tale funzione una parabola con asse verticale, il relativo polinomio risulta irriducibile se e solo se la parabola è tutta contenuta nel semipiano delle y positive (quando per il coefficiente *a* del termine di grado 2 vale: $a > 0$) o nel semipiano delle y negative (quando vale: $a < 0$).
Se allora due tali polinomi P(x) e Q(x) sono irriducibili le relative parabole stanno o tutte e due nel semipiano y>0, o tutte e due nel semipiano y<0, oppure l'una in uno e l'altra nell'altro dei semipiani. Nei primi due casi alla somma P(x)+Q(x) dei due polinomi resta associata una parabola appartenente allo stesso semipiano delle parabole addendi, nel terzo caso ci si riduce ad uno dei primi due considerando un polinomio e l'opposto dell'altro, per esempio P(x) e – Q(x).

<u>5.-</u> si ha:

$$v_{n+1} + v_{n+2} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{5}$$

dove con v_i indichiamo il valore dell'i-esimo negozio.
dalla relazione ricaviamo che:

$$5 \cdot v_{n+1} + 5 \cdot v_{n+2} = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

e se indichiamo con v_{max} il maggiore tra v_{n+1} e v_{n+2} , vale:

$$10 \cdot v_{max} > n \cdot v_{max}$$

analogamente si ha:

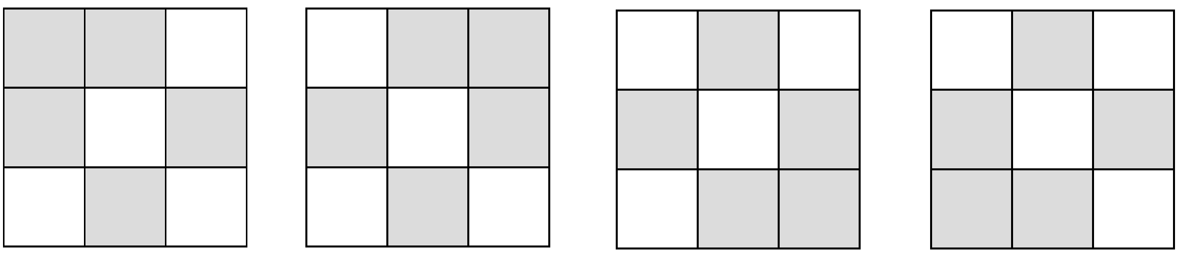
$$v_{n+3} + v_{n+4} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n + v_{n+1} + v_{n+2}}{5}$$

se questa volta indichiamo v_{min} il minimo tra v_{n+3} e v_{n+4} vale la:

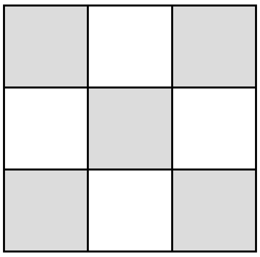
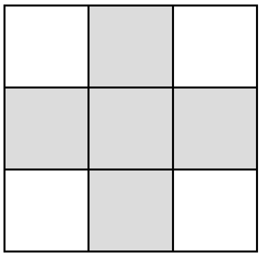
$$10 \cdot v_{max} < (n+2) \cdot v_m$$

per cui 8 < n < 10 e quindi n = 9.

<u>6.-</u> osserviamo che se nella casella centrale c'è un numero pari (bianco) le configurazioni possibili sono le 4 seguenti:



mentre se nella casella centrale c'è un dispari abbiamo le seguenti configurazioni:

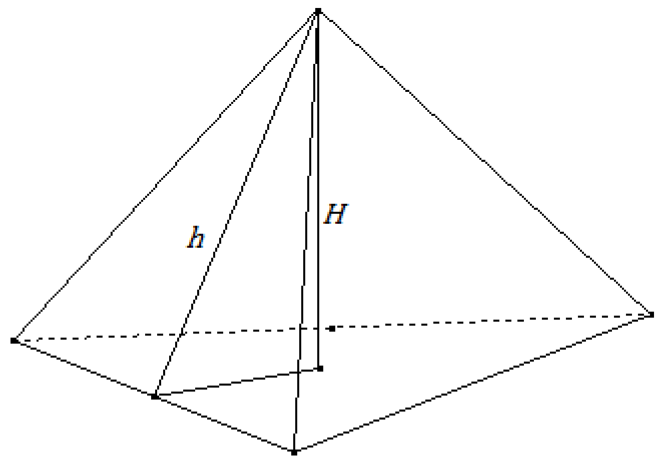
 

quindi in totale 6 configurazioni e per ciascuna di queste possiamo disporre i 5 dispari in 5! modi e i 4 pari in 4! modi ottenendo in totale $6 \cdot 5! \cdot 4!$ modi di disporre i nove numeri nelle caselle.

<u>7.-</u> consideriamo una di tali configurazioni $\mathcal{C}_{n+1}$ con $n + 1$ rette e sia r una, fissata, di queste rette. Le rimanenti rette formano anch'esse una di tali configurazioni $\mathcal{C}_n$.
Per le condizioni imposte r incontra ciascuna delle altre n rette in un punto (r non è parallela ad alcuna delle altre n rette) e questi punti sono tutti distinti (seconda condizione) e in numero di n.
La retta r è perciò suddivisa, da questi n punti, in n+1 sottoinsiemi (: due semirette e n – 1 segmenti) ciascuno dei quali divide in due la parte di $\mathcal{C}_n$ cui appartiene:
si ha quindi che le parti di $\mathcal{C}_{n+1}$ sono n+1 più le parti di $\mathcal{C}_n$ ovvero
$$p(n+1) = p(n) + n + 1$$
questa è la formula ricorsiva, possiamo altrimenti determinare una formula che esprima p(n) in funzione di n:
p(0) = 1; p(1)=p(0)+1; p(2)=p(1)+2=p(0)+1+2; …; p(n)=p(0)+1+2+3+…+n e infine:
$$p(n) = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

<u>8.-</u> i quattro tetraedri di lato 1 sono simili a quello di lato 2 , che ha quindi un volume uguale a 2^3 volte a quello di uno dei tetraedri di lato 1.
L'ottaedro ha quindi un volume pari a $2^3 - 4 = 4$ volte il volume di un tetraedro di lato 1:
il rapporto tra il volume del tetraedro T e quello dell'ottaedro O è 2.
Siccome il volume di un tetraedro di lato l è :
$$V_T = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$
risulta quindi:
$$V_O = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

<u>Oss.</u>



Detta H l'altezza di un tetraedro regolare di lato *l*, ed h quella di una delle sue facce, si ha:

$$h = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{h}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}h}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = l \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$S_b = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{S_b \cdot H}{3} = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = l^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$$