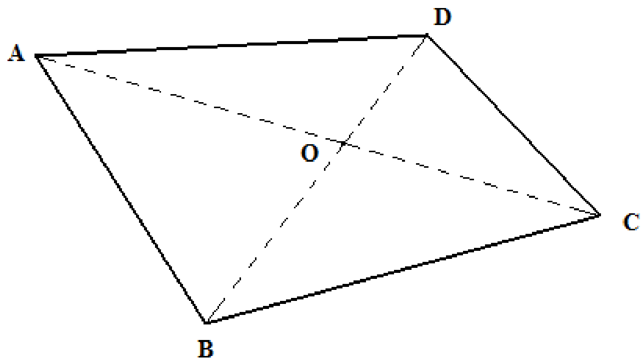
34° GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA"
30 Marzo 2019

SOLUZIONI

1.- Dimostrare che in un quadrilatero convesso la somma delle lunghezze delle due diagonali è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.
con riferimento alla figura:



sia AC la diagonale maggiore (AC > BD) ed O il punto di incontro delle due diagonali:
in base alla disuguaglianza triangolare si ha:

$$AB + BC > AC$$
$$AD + DC > AC > BD$$

sommando membro a membro le due disuguaglianze si ottiene:

$$AB + BC + CD + DA > AC + BD.$$

D'altra parte risulta:

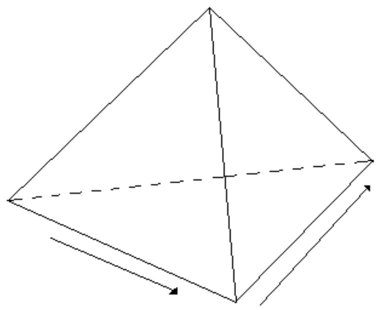
$$OA + OB > AB$$
$$OB + OC > BC$$
$$OC + OD > CD$$
$$OD + OA > DA$$

e sommando membro a membro:

$$2 \cdot (OA + OB + OC + OD) > AB + BC + CD + DA$$

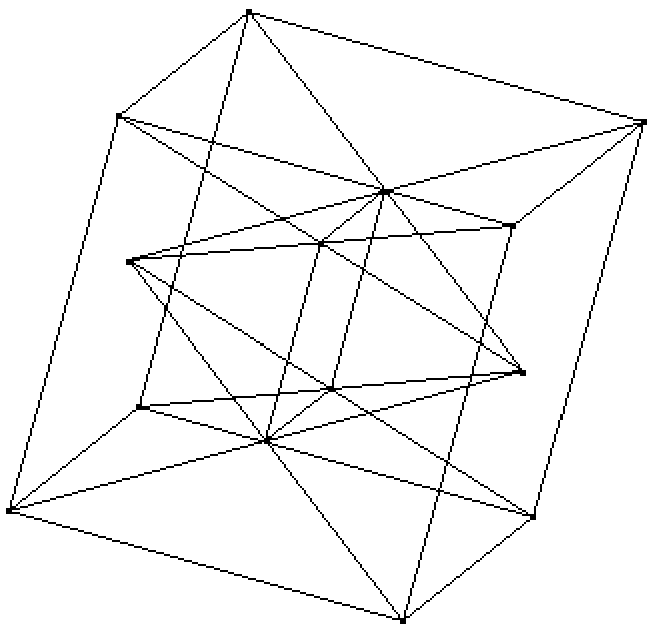
$$2 \cdot (AC + BD) > AB + BC + CD + DA.$$

2.- Dimostrare che per un tetraedro non esiste un percorso continuo (cioè senza salti) che percorra una sola volta tutti gli spigoli:
osserviamo che in ogni vertice del tetraedro confluiscono tre spigoli. Se il percorso ad un certo punto percorrendo uno spigolo arriva in un vertice, da questo riparte percorrendo un altro spigolo.



Dunque gli spigoli di un percorso continuo che confluiscono in ogni vertice (ad esclusione del vertice di inizio e di quello finale) sono in numero pari.
Ciò basta per dimostrare l'asserto: 3 è dispari.

3.- Siano a e b facce opposte di un cubo C. Si consideri il solido V costituito dall'unione delle due seguenti piramidi: la prima ha per base la faccia a del cubo e il vertice che coincide con il centro della faccia b, la seconda ha per base la faccia b e il vertice che coincide con la faccia a del cubo.
Trovare il rapporto tra i volumi del solido V e del cubo C:
Trovare il rapporto tra le superficie del solido V e del cubo C.



Prendiamo il lato del cubo C come unità di misura delle lunghezze. Ciascuna delle due piramidi ha volume la terza parte del volume di C. L'intersezione I delle due piramidi è un solido unione di due piramidi simili alle prime e con lato di base pari alla metà dello spigolo del cubo, perciò il volume di I vale:

$$V(I) = 2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{8} = \frac{1}{12}$$

Il volume di V è quindi

$$V(V) = \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

che è anche il rapporto richiesto poiché V(C) = 1.

La superficie di V è due volte la superficie di una piramide grande meno due volte la superficie laterale di una piramide piccola:

$$S(pir.) = 1 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}} = 1 + 2\frac{\sqrt{5}}{2} = 1+\sqrt{5}$$

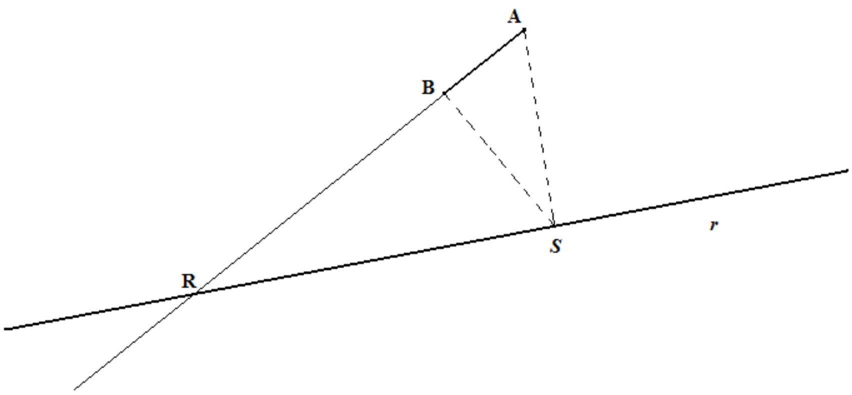
$$S_{lat.}(pir.pic) = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{5}$$

$$S(V) = 2\left(1+\sqrt{5}\right) - 2\frac{\sqrt{5}}{4} = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

$$\frac{S(V)}{S(C)} = \frac{2-\frac{3}{2}\sqrt{5}}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

4.- Si fissino nel piano una retta *r* e due punti A e B non appartenenti a *r*. Si verifichi che (a meno di particolari posizioni dei punti) sulla retta *r* esiste un punto R tale che la differenza tra le distanze di R da A e da B sia massima. Per quali posizioni particolari dei dati il problema non ha soluzione? Lo si dimostri.

Supponiamo dapprima che A e B stiano in uno stesso dei due semipiani di origine *r* e che la distanza di A da *r* sia maggiore di quella di B da *r*, la retta AB incontra *r* in un punto R, che in questo caso è la soluzione del problema.

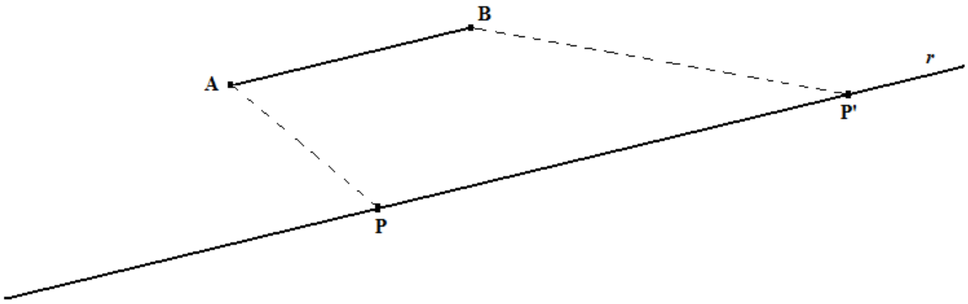


infatti scelto sulla retta r un altro punto S si ha:

$$|AR| - |BR| = |AB| > |AS| - |BS| \text{ ,} per\ la\ disuguaglianza\ triangolare$$

Il caso in cui A e B appartengano a semipiani differenti si risolve considerando il simmetrico B' di B rispetto a r, cosicché R risulta l'intersezione di AB' con r.

Se invece la distanza di A da r è uguale alla distanza di B da r (e supponiamo che appartengano allo stesso semipiano di origine r), detto P un qualunque punto di r, scegliamo su r un punto P' che appartenga al semipiano di origine AP che contiene B:



$$|AP'| - |BP'| > |AP| - |BP|$$

e quindi non esiste massimo per la differenza.

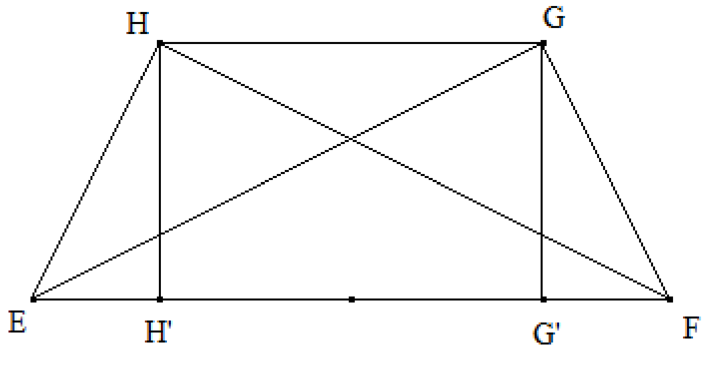
L'ultima disuguaglianza è verificata poiché è equivalente alla:

$$|AP'| + |BP| > |AP| + |BP'|$$

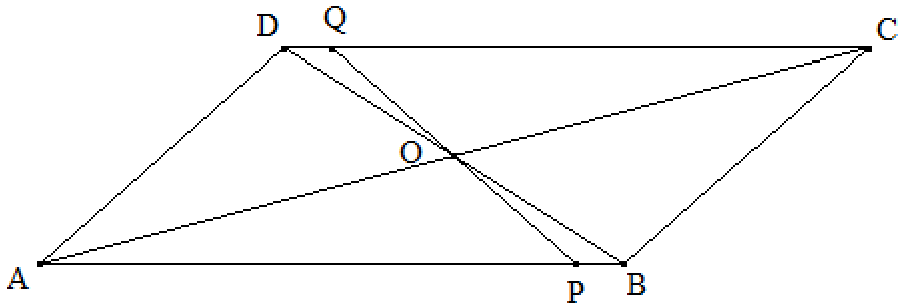
e nei quadrilateri convessi, come APP'B, la somma delle diagonali è maggiore della somma di due lati opposti.

5.- Si consideri il parallelogramma ABCD ed il suo centro O. Sia P un punto della retta AB. Si provi che gli angoli DAB e OPA sono uguali se e solo se P è equidistante da C e D.

Premettiamo un Lemma: un trapezio è isoscele se e solo se ha uguali le diagonali.



Sia EFGH il trapezio, GH la sua base minore, H' e G' le proiezioni ortogonali di H e G sulla base EF, se le due diagonali EG e FH sono uguali, lo sono anche i triangoli rettangoli EG'G e FH'H (cateto e ipotenusa uguali) e dunque risultano uguali gli angoli GEG' e HFH', ma allora sono uguali anche i triangoli EFH e FEG (primo criterio) e quindi i due lati EH e FC, ed il trapezio risulta isoscele. Il viceversa è banale.



Prolunghiamo il segmento PO sino ad incontrare in Q il lato CD: il segmento PQ divide il parallelogramma in due trapezi uguali; se PC = PD le quattro diagonali dei due trapezi sono uguali e, per il lemma precedente, i trapezi sono isosceli, dunque DAB = OPA.
Viceversa sa DAB = OPA il primo trapezio è isoscele, dunque anche il secondo, tutte le diagonali sono uguali e in particolare DP = CP.

6.- Per ogni intero positivo n, sia:

$$P(n) = (n^3 + 3n^2 + 2n) \cdot (n^2 + 7n + 12)$$

dimostrare che P(n) è divisibile per 6.
Se n < 2019 quanti di tali P(n) risultano divisibili per 7?

Fattorizzando si ottiene:

$$P(n) = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) \cdot (n + 4)$$

osserviamo che P(n) è il prodotto di cinque numeri consecutivi, ma allora almeno uno di questi è divisibile per 2 (in effetti almeno due) ed almeno uno è divisibile per 3, e dunque P(n) è divisibile per 2 · 3 = 6.
Si ha:

P(1) = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 non divisibile per 7
P(2) = 2 · 3 · 4 · 5 · 6 non divisibile per 7
P(3) = 3 · 4 · 5 · 6 · ***7*** divisibile per 7
P(4) = 4 · 5 · 6 · ***7*** · 8 divisibile per 7
P(5) = 5 · 6 · ***7*** · 8 · 9 divisibile per 7
P(6) = 6 · ***7*** · 8 · 9 · 10 divisibile per 7
P(7) = ***7*** · 8 · 9 · 10 · 11 divisibile per 7
P(8) = P(1 + 7) = (1 + 7) · 9 · 10 · 11 · (5 + 7) non divisibile per 7

k è divisibile per 7 se e solo se lo è k + 7: perciò anche P(9) non è divisibile per 7, mentre lo è P(10) = P(3 + 7), ecc. …
Si vede così che per ogni settupla di interi consecutivi, dei relativi P(n) cinque sono divisibili per 7 e due no. Ora:

$$2018 = 288 \cdot 7 + 2$$

e dunque i P(n) con n < 2019 divisibili per 7 sono 288 · 5 = 1440.
D’altra parte i due del resto sono i primi della 289° settupla e per quanto detto non divisibili per 7.

7.- Si dimostri che, se p , p – 4 , p + 4 sono tre numeri primi, allora p = 7.

Consideriamo i tre numeri consecutivi p – 1, p, p + 1 di certo uno di essi è divisibile per 3, ma allora anche uno dei p, p – 4, p + 4 ed essendo per ipotesi primo esso è uguale a 3.
Ma non può essere p = 3, poiché risulterebbe p – 4 = – 1; non può essere p + 4 = 3, poiché risulterebbe p – 4 = – 5 che non è primo. Dunque p – 4 = 3 e quindi p = 7.

8.- Una ditta assegna ad una squadra di operai un lavoro che richiederebbe p ore nel caso che gli operai iniziassero a lavorare contemporaneamente (gli operai hanno tutti lo stesso rendimento e la stessa paga oraria). Gli operai invece iniziano a lavorare uno alla volta ad intervalli di tempo uguali ciascuno al precedente, in fine lavorano tutti assieme. A lavoro ultimato il primo operaio riceve un compenso che è m volte il compenso dell’ultimo.
Quanto tempo ha richiesto l’esecuzione del lavoro? Si esprima il risultato in funzione di m e di p.

Sia n il numero degli operai della squadra, indichiamo con t la lunghezza dell’intervallo di tempo in cui lavora un solo operaio, con s il tempo in cui lavorano tutti.
Si ha ovviamente:

$$\big(1+2+3+\cdots+(n-1)\big)t + ns = somma\ dei\ tempi\ di\ lavoro\ di\ ciasun\ operaio = np$$

Inoltre il tempo di lavoro del primo operaio (quello che ha lavorato di più) è uguale al tempo di esecuzione del lavoro:

$$X = (n-1)t + s$$

dove quello dell’ultimo operaio è s.
Si ha quindi:

$$n(n-1)\frac{t}{2} + ns = np \quad \rightsquigarrow \quad (n-1)t + 2s = 2p \quad \rightsquigarrow \quad (n-1)\mathrm{t} = 2(p-s)$$

e siccome la paga è proporzionale al tempo di lavoro

$$(n-1)t + s = ms \quad \rightsquigarrow \quad (n-1)t = (m-1)s$$

cosicché dalle due ultime:

$$2(p-s) = (m-1)s$$

per cui

$$s(m+1) = 2p$$

$$X = ms = 2\frac{pm}{(m+1)}$$