36^{a} Gara Matematica "Città di Padova"

25 marzo 2023

SOLUZIONI

Patavina Mathesis

(1) Determinare i numeri primi p tali che la media aritmetica di p, p^2 e p^3 sia un numero intero. In quale caso questa media diventa un numero primo?

Soluzione. Sia p un numero primo. Abbiamo che

$$\frac{p+p^2+p^3}{3}=\frac{p(1+p+p^2)}{3}$$

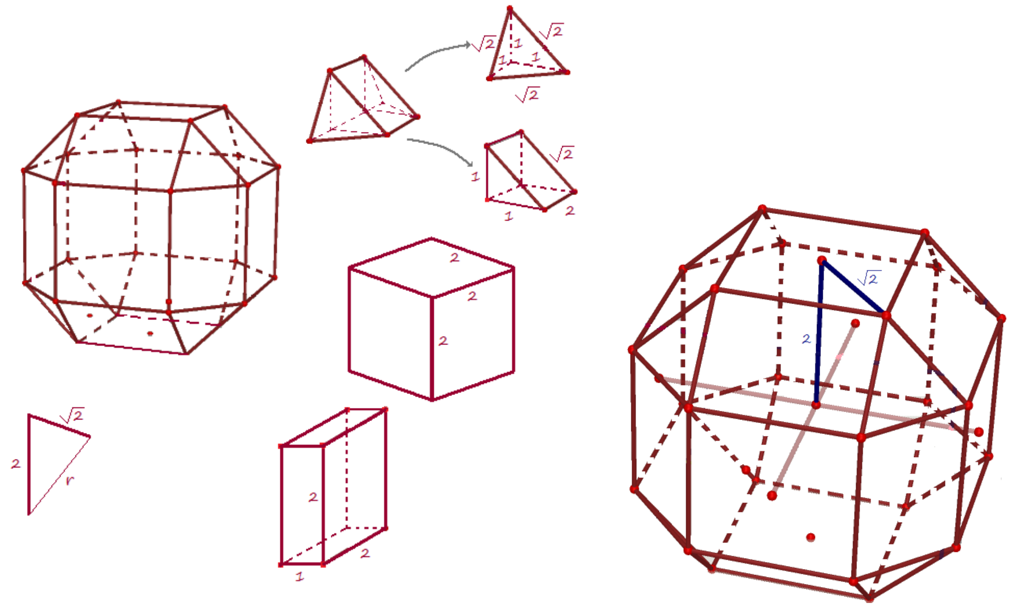
Questa quantità è intera se $p(1+p+p^2)$ è un multiplo di 3. Dato che 3 è un numero primo questo accade se e solo se 3 divide p o 3 divide $1+p+p^2$. Dato che p è primo, abbiamo che nel primo caso $p=3$. Nel secondo caso p non può essere un multiplo di 3, altrimenti $1+p+p^2$ darebbe resto 1 nella divisione per 3. Le altre possibilità sono che $p \equiv 1\,(mod\,3)$ o $p \equiv 2\,(mod\,3)$. Nel primo caso $1+p+p^2 \equiv 1+1+1 \equiv 0\,(mod\,3)$, nel secondo caso $1+p+p^2 \equiv 1+2+4 \equiv 1\,(mod\,3)$. Dunque la media di p, p^2 e p^3 è un numero intero quando $p=3$ o p dà resto 1 nella divisione per 3.

Per quanto riguarda il secondo punto, dobbiamo trovare tutti i primi p tali che

$$p(1+p+p^2)=3q$$

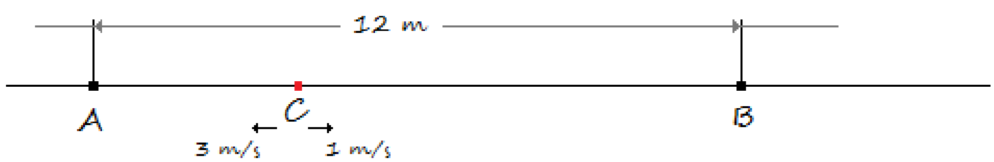
per qualche numero primo q. Dato che 3 è primo, 3 divide p o $(1+p+p^2)$. Nel primo caso, abbiamo già visto che $p=3$, da cui segue che $q=1+p+p^2=1+3+9=13$ è primo. Dunque $p=3$ è una soluzione. Se invece 3 divide $1+p+p^2$, allora p divide q da cui segue, dato che p e q sono entrambi primi, che $p=q$; abbiamo quindi che $1+p+p^2=3$, che ha come soluzione intera $p=1$ che però non è un numero primo. Quindi l'unica risposta alla seconda domanda è $p=3$.

(2) Si consideri un cubo di lato 4 e su ogni faccia si disegni il quadratino di lato 2 con lo stesso centro della faccia e con i lati paralleli agli spigoli della faccia. Fatto questo si consideri il solido che ha per spigoli i lati di tali quadratini e i segmenti che congiungono ogni vertice di un tale quadratino con i due vertici più vicini tra quelli degli altri quadratini. Si descrivano le facce del solido così ottenuto e il loro numero. Si calcoli inoltre la sua superficie totale e il suo volume. Si dimostri infine che esiste la sfera circoscritta al solido e se ne calcoli il raggio.



Soluzione. (Vedi figure.) Il solido ha 6 facce quadrate di lato 2, 12 facce rettangolari $2 \times \sqrt{2}$ e 8 facce a forma di triangolo equilatero di lato $\sqrt{2}$. La sua superficie totale vale $S = 6 \cdot 2 \cdot 2 + 12 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24(1+\sqrt{2}) + 4\sqrt{3}$ e il suo volume $V = 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 12 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot 2 + 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{136}{3}$. Tutti i vertici hanno la stessa distanza dal centro del cubo di partenza e tale distanza vale $r = \sqrt{(2)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$.

(3) Due punti A e B su una retta orizzontale distanti tra loro 12 metri (A sta a sinistra di B) iniziano a muoversi a mezzanotte verso destra con velocità costante di $1\, m/s$. Un altro punto C che si trova all'istante iniziale in corrispondenza del punto A si muove con velocità costante di $2\, m/s$ inizialmente verso destra, ma ogni volta che incontra uno dei due punti rimbalza cambiando direzione. Alle 11:15':46" quanto sono distanti A e C?



Soluzione. Consideriamo un sistema di riferimento inerziale che coincide in ogni momento con la posizione del punto A. Rispetto a tale sistema inerziale il punto C si muove a destra con la velocità di $1\, m/s$ e verso sinistra con la velocità di $3\, m/s$. Quindi per andare da A a B il punto C impiega $12\, s$ e per tornare da B ad A impiega $4\, s$. In particolare, la posizione di C rispetto ad A è una funzione periodica di periodo $16\,s$. Trasformando $11h15'46''$ in secondi, otteniamo un numero di secondi uguale a

$$11 \cdot 3600 + 15 \cdot 60 + 46 \equiv 0 + (-1) \cdot (-4) + (-2) \equiv 2\,(mod\,16)$$

Quindi dopo questo tempo sono passati 2 secondi dalla fine di un ciclo di andata/ritorno e C dista dunque 2 metri da A (ricordiamoci che C si muove rispetto ad A a destra con velocità di $1\,m/s$).

(4) Un gruppo di 12 persone è composto di 4 famiglie (ogni famiglia ha almeno un componente). Ogni famiglia fa un regalo ad ogni membro delle altre famiglie e inoltre ogni componente di ogni famiglia fa un regalo ad ogni altro componente della sua famiglia. Dimostrare che il numero di regali che vengono fatti è almeno 60.

Soluzione. Ogni persona riceve 3 regali dalle altre famiglie. Dunque i regali tra famiglie diverse sono 36. Supponiamo quindi che le quattro famiglie abbiano rispettivamente a, b, c, d componenti. I regali all'interno delle famiglie sono $a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a - b - c - d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 12$, dato che sappiamo che $a + b + c + d = 12$. Il numero totale di regali è dunque $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 24$. Dobbiamo dunque dimostrare che $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 36$. Ma per la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \leq \frac{a + b + c + d}{4} = 3$$

da cui segue che $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 9 \cdot 4 = 36$,

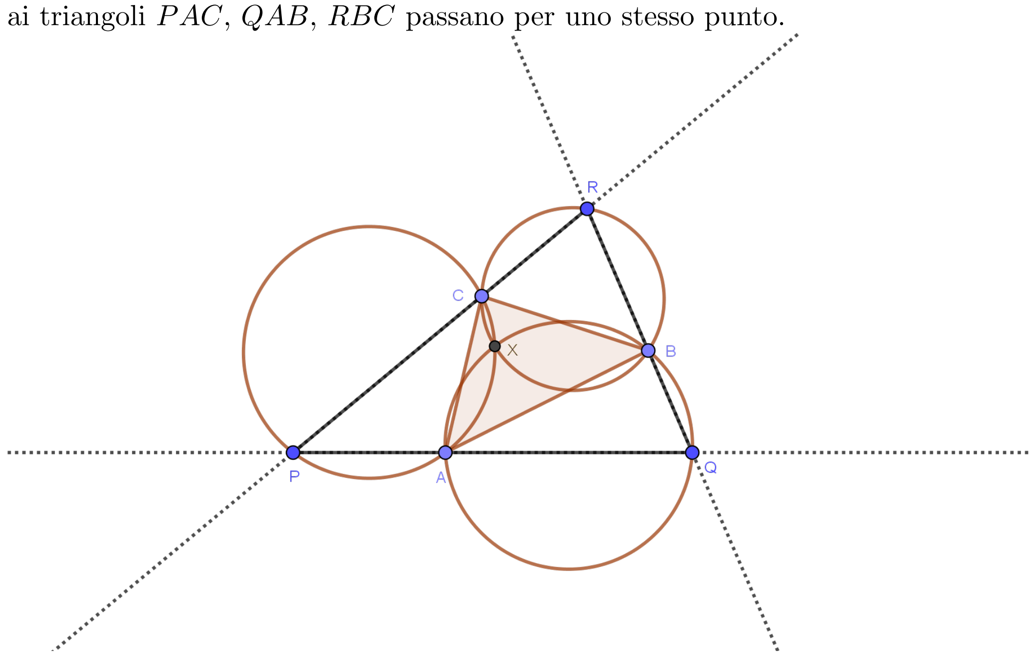
(5) Nell'isola di Smullyan ogni persona è un cavaliere (e in tal caso dice sempre la verità) o un furfante (e in tal caso dice sempre il falso). Ci sono quattro abitanti A, B, C e D che si conoscono bene l'un l'altro. Ciascuno di essi tiene in mano una carta di cui noi vediamo solo una faccia; loro, invece, possono vedere entrambe le facce delle carte degli altri. Le carte hanno un numero su una faccia, mentre l'altra faccia può essere scura o chiara. Quello che vediamo è: un 1 sulla carta di A, un 2 sulla carta di B, una carta scura in mano a C, una carta chiara in mano a D. Inoltre, A afferma che ogni carta pari ha il retro scuro; B afferma che D ha una carta pari; C afferma che B ha una carta scura; infine, D afferma: "Se C è un furfante lo sono anch'io". Quali carte è indispensabile chiedere di girare per scoprire la natura degli abitanti?

Soluzione. Consideriamo D. Se D fosse un furfante, allora ciò che afferma dovrebbe essere falso. Pertanto C dovrebbe essere un furfante e lui un cavaliere (un'implicazione è falsa solo quando la premessa è vera e la conclusione è falsa); ma questa è una contraddizione. Quindi D deve essere un cavaliere e ciò che dice deve essere vero. Allora anche C deve essere un cavaliere, altrimenti D dovrebbe essere un furfante (assurdo). Dunque abbiamo concluso che sia C che D sono cavalieri. Questo ci dice in particolare che la carta di B è scura.

Per verificare se la frase di A è vera, dovremmo considerare le carte pari e le carte chiare per assicurarci che le prime non siano chiare dietro e le seconde non abbiano un numero pari dall'altra parte. Nel nostro caso tali carte sono quelle di B e di D; ma sappiamo già, dato che C dice il vero, che la carta di B è scura sul retro.

Pertanto possiamo concludere che A è un cavaliere se e solo se la frase pronunciata da A è vera se e solo se la carta di D ha un numero dispari se e solo se B è un furfante. Dunque abbiamo due possibilità: se la carta di D ha un numero dispari, allora B è un furfante e A è un cavaliere, mentre se essa ha un numero pari, allora B è un cavaliere e A è un furfante. Pertanto dobbiamo girare la carta di D per stabilire la natura di tutti i personaggi (ed è necessario farlo altrimenti restano aperte due possibilità).

(6) Dimostrare che, dato un triangolo PQR, se i vertici A, B, C di un triangolo giacciono rispettivamente sui lati PQ, QR, RP, allora le tre circonferenze circoscritte ai triangoli PAC, QAB, RBC passano per uno stesso punto.



Soluzione. Consideriamo le prime due circonferenze; esse hanno il punto A in comune (quindi sono secanti o tangenti). Sia X l'ulteriore loro punto di intersezione (o A stesso nel caso le due circonferenze siano tangenti). Vogliamo dimostrare che X appartiene anche alla circonferenza per R, B e C; per far ciò ci basta far vedere che il quadrilatero $RCXB$ è ciclico (= inscrivibile); questo accade se e solo se due dei suoi angoli opposti (e quindi anche gli altri due) sono supplementari. Verifichiamo che $B\widehat{X}C = \pi - C\widehat{R}B$. (Qui tutti gli angoli sono letti in senso antiorario rispetto alla configurazione mostrata in figura. La dimostrazione rimane formalmente corretta anche in altre configurazioni e anche se alcuni o tutti i punti A B e C si trovano sui prolungamenti dei lati del triangolo PQR.) Sfruttando il fatto che $PAXC$ e $QBXA$ sono ciclici per costruzione, abbiamo $B\widehat{X}C = 2\pi - C\widehat{X}B = 2\pi - (C\widehat{X}A + A\widehat{X}B) = (\pi - C\widehat{X}A) + (\pi - A\widehat{X}B) = A\widehat{P}C + B\widehat{Q}A = Q\widehat{P}R + R\widehat{Q}P = \pi - P\widehat{R}Q = \pi - C\widehat{R}B$.

(7) Esistono numeri naturali palindromi in notazione decimale, il cui quadrato, in notazione decimale, è un numero palindromo di sei cifre?

Soluzione. Sia n un numero naturale il cui quadrato è un palindromo in base 10 di 6 cifre. Allora

$$999 \geq n > 316 = [\sqrt{100000}]$$

Grazie al criterio di divisibilità per 11 abbiamo che n^2 è un multiplo di 11. Infatti n^2, in quanto palindromo, sarà della forma $ABCCBA$ in notazione decimale e $A - B + C - C + B - A = 0$. Ne segue che n è un multiplo di 11. Inoltre n deve essere palindromo in base 10, dunque della forma DED in notazione decimale. Dato che $3 \leq D \leq 9$ e $0 \leq E \leq 9$, allora $-3x \leq 2D - E \leq 18$ e pertanto $2D - E$ può essere solo 0 o 11. Dunque

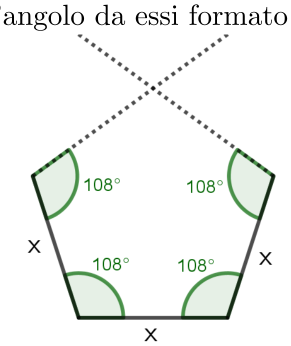
$$n \in \{363, 484, 616, 737, 858, 979\}$$

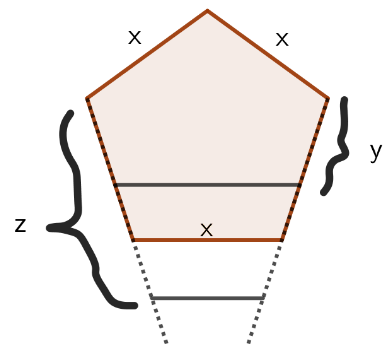
Il quadrato di 363 ha cifra più a sinistra 1 e delle unità 9. Il quadrato di 484 ha cifra più a sinistra 1 o 2 e delle unità 6. Il quadrato di 616 ha cifre più a sinistra 3 o 4 e delle unità 6. Il quadrato di 737 ha cifre più a sinistra 4 o 5 e delle unità 9. Il quadrato di 858 ha cifra più a sinistra 6 o 7 e delle unità 4. Il quadrato di 979 ha cifra più a sinistra 8 o 9 e delle unità 1. Dunque nessuno di questi numeri può avere quadrato palindromo. Ne segue che non esistono numeri palindromi in base 10 il cui quadrato sia un palindromo di 6 cifre in base 10.

(8) Diciamo che un poligono è semiregolare se è equiangolo e i suoi lati possono avere al massimo due misure diverse. Ad esempio i rettangoli sono gli unici quadrilateri semiregolari.
   (a) Si dimostri che tutti i pentagoni semiregolari sono regolari, ma esistono esagoni semiregolari non regolari.
   (b) Si dimostri che per ogni numero naturale pari $n > 2$ esiste un poligono semiregolare non regolare con n lati.
   (c) Si dimostri che per ogni numero naturale composto n esiste almeno un poligono semiregolare non regolare con n lati.

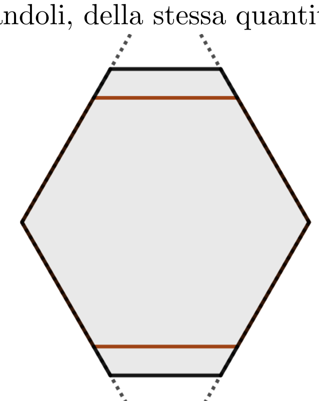
Soluzione.

(a) Gli angoli di un pentagono semiregolare devono misurare tutti $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = 108°$. Inoltre, devono necessariamente esserci almeno tre lati congruenti, diciamo di misura x. Si possono presentare due casi: (i) ci sono tre lati consecutivi di misura x oppure (ii) misurano x due lati consecutivi e il lato opposto all'angolo da essi formato (vedi figure).



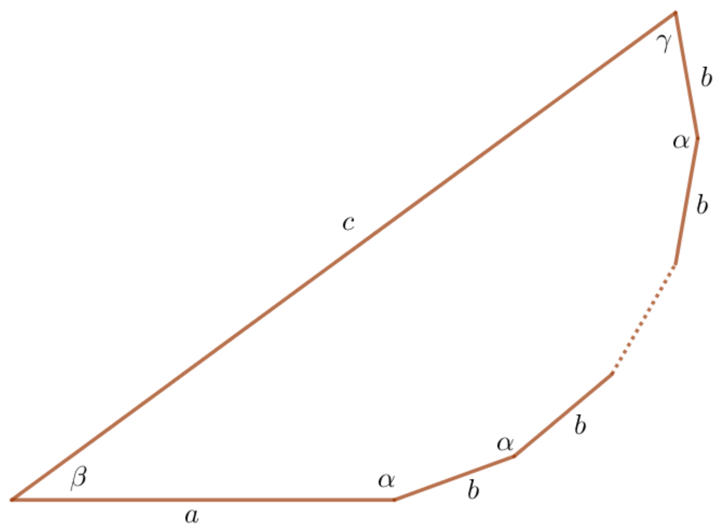


Nel primo caso, i tre lati di misura x individuano quattro vertici di un pentagono regolare; il quinto vertice deve essere l'intersezione delle semirette tratteggiate che, viste le inclinazioni, non sono altro che le rette dei rimanenti due lati del pentagono regolare: il loro unico punto d'intersezione non può che essere il quinto vertice del pentagono regolare. Nel caso (ii), l'ipotetico pentagono semiregolare si può immaginare come ottenuto a partire dal pentagono regolare di lato x in cui il lato orizzontale (in riferimento alla figura) sia stato traslato verso l'alto o verso il basso (questo è giustificato dal fatto che gli angoli sono determinati); entrambe le costruzioni, però, portano a pentagoni con tre diverse misure dei lati: traslando verso l'alto si otterrebbe un pentagono di lati x, y $(< x)$ e x' $(> x)$, traslando verso il basso si otterrebbe un pentagono di lati x, z $(> x)$ e x' $(< x)$.
Invece, si possono costruire facilmente esagoni semiregolari, ad esempio come mostrato in figura (intuitivamente, basta traslare due lati opposti allontanandoli dal centro, o avvicinandoli, della stessa quantità).



(b) Come nel caso dell'esagono costruito al punto precedente, se n è pari basta partire dall'n-gono regolare e "traslare" una coppia di lati opposti.
In alternativa si può particolarizzare la costruzione data al punto seguente...

(c) Un numero naturale composto n è della forma kp con p primo e $k \geq 2$; anzi, possiamo supporre che p e k siano diversi da 2, altrimenti si procede come al punto precedente. Consideriamo il seguente poligono di $k+1$ lati, dove $\alpha = \frac{n-2}{n}\pi = \frac{kp-2}{kp}\pi$.



[Si parte da un segmento di lunghezza a; poi si continua con $k-1$ segmenti di lunghezza b, con $b \neq a$, ognuno inclinato di un angolo α rispetto al precedente; infine si chiude con un segmento di lunghezza c (determinata da a, b e α) che avrà due angoli adiacenti β e γ (anch'essi determinati da a, b e α).] Notiamo che $\beta + \gamma = (k-1)\pi - (k-1)\alpha = (k-1)(\pi - \alpha) = \frac{2(k-1)}{kp}\pi$.
Consideriamo, inoltre, un p-agono regolare di lato c e su ciascuno dei suoi lati incolliamo (esternamente) una copia del poligono in figura. Otteniamo così un n-gono con i lati di due misure, a e b. Per dimostrare che sia semiregolare ci basta controllare che gli angoli misurino tutti α. Attorno a ciascuno dei vertici del p-gono regolare si incollano tre angoli di ampiezze, rispettivamente, β, γ e $\frac{p-2}{p}\pi$ (uno degli angoli originari del p-gono regolare). La loro somma è proprio $\frac{2(k-1)}{kp}\pi + \frac{p-2}{p}\pi = \frac{kp-2}{kp}\pi = \alpha$.