Soluzioni 35ª Gara matematica "Città di Padova"

9 aprile 2022

Associazione "Patavina Mathesis"

Problema 1

Determinare le soluzioni intere positive dell'equazione $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=w$.

Soluzione. Notiamo innanzitutto che se la quaterna (x,y,z,w) è una soluzione dell'equazione data, lo è anche una qualsiasi quaterna ottenuta permutando tra loro le prime tre componenti. Possiamo quindi limitarci a cercare tutte le soluzioni (x,y,z,w) con $x \le y \le z$.

Notiamo inoltre che se x, y, z sono interi positivi, allora $0 < \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le 3$. Dunque in ogni soluzione (x,y,z,w), w può solo assumere un valore in $\{1,2,3\}$. Pertanto, possiamo ridurre il problema a trovare le soluzioni (x,y,z) con $x \le y \le z$ delle tre equazioni

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$$

Caso 1: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

In questo caso si deve avere $x \le 3$, altrimenti se $x > 3$, lo sarebbero anche y e z e di conseguenza avremmo

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

Pertanto, x può essere 1, 2 o 3, ma anche il caso $x = 1$ può essere escluso dato che in tal caso si avrebbe

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1$$

Consideriamo dunque i sottocasi $x = 2$ e $x = 3$. Nel primo sottocaso dobbiamo trovare y e z tali che

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

ovvero

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}.$$

Possiamo notare che y può essere solo 3 o 4. Se infatti fosse uguale a 2, avremmo $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{2}$, mentre se fosse maggiore strettamente di 4 avremmo $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{2}$. Se $y = 3$, si ottiene che $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ da cui segue che $z = 6$. Se $y = 4$ invece $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ da cui segue che $z = 4$.

Nel secondo sottocaso, se $x = 3$, deve essere risolta l'equazione

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

ovvero

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}.$$

Possiamo notare che y può essere solo 3. Se infatti fosse maggiore strettamente di 3 avremmo $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{3}$.

Questo caso ci restituisce dunque tre soluzioni del sistema iniziale: $(2, 3, 6, 1)$, $(2, 4, 4, 1)$ e $(3, 3, 3, 1)$.

Caso 2: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

Si noti che in questo caso x può essere solo 1. Se infatti x fosse strettamente maggiore di 1, allora avremmo

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 2$$

Dunque dobbiamo trovare le coppie di interi (y, z) con $y \leq z$ tali che

$$1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$$

ovvero tali che

$$\frac{y + z}{yz} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

cioè tali che $y + z = yz$. Quest'ultima equazione equivale all'equazione $z = y(z - 1)$. Questa stabilisce che il numero positivo z deve essere divisibile per il suo predecessore. Questo può accadere solo se $z = 2$, da cui segue che $y = 2$. Pertanto, l'unica soluzione cercata è $y = z = 2$. Questo caso ci restituisce dunque una sola soluzione del sistema iniziale: $(1, 2, 2, 2)$.

Caso 3: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$

Si noti che in questo caso x, y, z devono essere tutti uguali ad 1. Se infatti uno di essi fosse maggiore strettamente di 1 si avrebbe

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 3$$

D'altra parte è chiaro che $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 3$. Questo caso ci restituisce dunque una sola soluzione del sistema iniziale: $(1, 1, 1, 3)$.

Problema 2

Dato il triangolo isoscele T, di lati 5, 5, 6 , determinare i triangoli isosceli con lo stesso perimetro e la stessa area di T.

Soluzione Il perimetro di T vale 16, mentre la sua area vale $\frac{6\sqrt{5^2-3^2}}{2} = 12$. Pertanto, trovare tutti i triangoli isosceli con tale area e perimetro significa trovare le soluzioni positive del sistema

$$\begin{cases} x\sqrt{y^2 - x^2} = 12 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$$

dove i triangoli cercati hanno lati di lunghezza $2x, y, y$. Elevando al quadrato i membri della prima equazione otteniamo che le soluzioni del sistema sopra sono anche soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x^2(y^2 - x^2) = 144 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione $8 - x$ al posto di y, otteniamo che

$$x^2((8 - x)^2 - x^2) = 144$$

che, sviluppando il membro a sinistra e dividendo per 16 entrambi i membri, equivale a chiedere che

$$x^2(4-x) = 9$$

ovvero

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

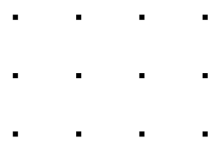
Conosciamo già una soluzione di questa equazione, $x = 3$, che ci è fornita dal triangolo T. Utilizzando un algoritmo di divisione tra polinomi otteniamo quindi che l'equazione può essere riscritta come:

$$(x-3)(x^2 - x - 3) = 0$$

Questo ci permette, tramite la formula per la risoluzione delle equazioni di secondo grado, di trovare altre due soluzioni dell'equazione: $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Dato che la prima di queste è negativa, essa deve essere esclusa. Resta quindi la soluzione $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ da cui si ricava che $y = \frac{15-\sqrt{13}}{2}$. Basta ora solo verificare che tali valori soddisfino la prima equazione nel sistema di partenza, per concludere che oltre a T esiste un solo altro triangolo con tali area e perimetro, cioè quello di lati $1 + \sqrt{13}$, $\frac{15-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{15-\sqrt{13}}{2}$.

Problema 3

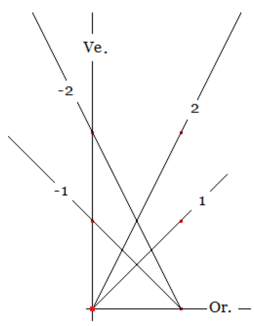
Consideriamo l'insieme delle rette che uniscono a due a due i punti della figura:



quante direzioni distinte esse individuano? Si supponga ora che la figura abbia sempre tre righe, ma sia formata da n colonne. Si trovi una formula che dia il numero delle diverse direzioni delle varie rette che uniscono a due a due i punti della nuova figura.

Soluzione Rappresentiamo i punti in una figura come quella sopra con n colonne, come punti a coordinate intere (x, y) del piano cartesiano con $x \in \{0, 1, 2\}$ e $y \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Le direzioni delle rette che congiungono due tra questi punti sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme C_n dei numeri razionali della forma $\frac{\pm a}{b}$ con $a \in \{0, 1, 2\}$ e $b \in \{1, ..., n-1\}$ a cui è aggiunto $+\infty$ (esso rappresenta la direzione verticale); essi infatti sono i coefficienti angolari delle rette che congiungono a due a due i punti in figura. Ovviamente $C_n \subseteq C_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Possiamo verificare facilmente che $C_2 = \{0, 1, 2, -1, -2, +\infty\}$, dunque $\#C_2 = 6$.



Supponiamo ora di conoscere il valore $\#C_n$ per un qualche $n \geq 2$. Distinguiamo due casi:

1. n è pari. In tal caso per ottenere l'insieme C_{n+1} vengono aggiunti ai coefficienti angolari in C_n solamente $\frac{1}{n}$ e $-\frac{1}{n}$, dato che le frazioni $\frac{a}{n}$ con $|a| \in \{0, 2\}$ rappresentano numeri razionali che sono già in C_n; in particolare $\#C_{n+1} = \#C_n + 2$.

2. n è dispari. In tal caso per ottenere C_{n+1} vengono aggiunti ai coefficienti angolari in C_n i razionali $\frac{1}{n}$, $-\frac{1}{n}, \frac{2}{n}$ e $-\frac{2}{n}$ dato che tali frazioni sono ridotte ai minimi termini; in particolare $\#C_{n+1} = \#C_n + 4$.

Possiamo quindi concludere che $\#C_3 = \#C_2 + 2 = 8$ e che, per ogni $n \geq 2$, $\#C_{n+2} = \#C_n + 6$. Grazie a questi fatti, possiamo dimostrare per induzione, separatamente, che $\#C_n = 3n$ per ogni $n \geq 2$ pari e $\#C_n = 3n - 1$ per ogni $n \geq 2$ dispari.

Nel primo caso, infatti, il passo base vale perché $\#C_2 = 6 = 3 \cdot 2$, mentre se assumiamo che $\#C_n = 3n$ per un certo numero pari n, allora $\#C_{n+2} = \#C_n + 6 = 3n + 6 = 3(n + 2)$.

Allo stesso modo si tratta il caso dispari.

Problema 4

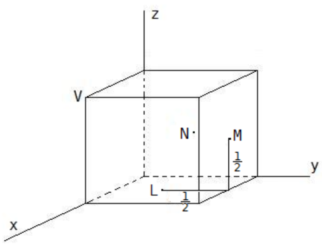
Un mucchio di ghiaia dev'essere caricato su un camion. Lavorando da soli gli operai A, B, C impiegherebbero, rispettivamente, 3, 4, 6 ore. Alle $8h30'00''$ l'operaio C inizia a caricare il camion, un'ora dopo si aggiunge B e dopo un'altra ora si aggiunge anche A. A che ora, minuto, secondo viene concluso il lavoro?

Soluzione A ha una velocità di lavoro di $\frac{1}{3}\frac{mucchi}{ora}$, B di $\frac{1}{4}\frac{mucchi}{ora}$ e C di $\frac{1}{6}\frac{mucchi}{ora}$. Pertanto dopo un'ora C ha caricato $\frac{1}{6}$ di mucchio, mentre nell'ora successiva B e C hanno caricato $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ di mucchio. Ad A, B e C insieme rimangono quindi $1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{12} = \frac{5}{12}$ di mucchio da caricare. La velocità di caricamento di A, B e C insieme è di $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}\frac{mucchi}{ora}$. Dunque il tempo necessario per concludere il lavoro per A, B e C insieme è di $\frac{5}{12} : \frac{3}{4} = \frac{5}{9}$ di ora. Dato che in un'ora di sono 3600 secondi, sono quindi necessari 2000 secondi, ovvero $0h33'20''$, per concludere il lavoro al gruppo composto da A, B e C. Quindi il lavoro è concluso alle ore $11h03'20''$.

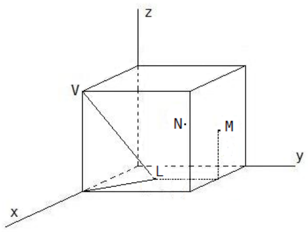
Problema 5

Si consideri un vertice V di un cubo C, ed i centri L, M, N delle tre facce di C che non contengono V. Si trovi il rapporto tra il volume del cubo e quello del tetraedro $VLMN$.

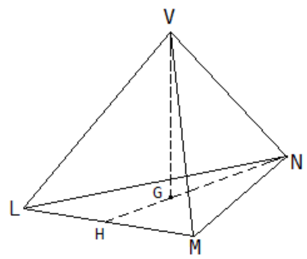
Soluzione Senza ledere la generalità, supponiamo che il cubo abbia lato unitario.



Usando il teorema di Pitagora, $LM = LN = MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$. L'area del triangolo equilatero LMN vale dunque $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$.



Inoltre, sempre grazie al teorema di Pitagora, $VN = VM = VL = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.



Ora, per calcolare l'altezza del tetraedro, iniziamo con il calcolare l'altezza del triangolo equilatero di base; NH è infatti uguale a $MN \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Dato che LMN è un triangolo equilatero, $NG = \frac{2}{3} \cdot NH = \frac{\sqrt{6}}{6}$. Possiamo dunque calcolare l'altezza VG del tetraedro grazie al teorema di Pitagora:

$$VG = \sqrt{VN^2 - NG^2} = \sqrt{\frac{6}{4} - \frac{6}{36}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

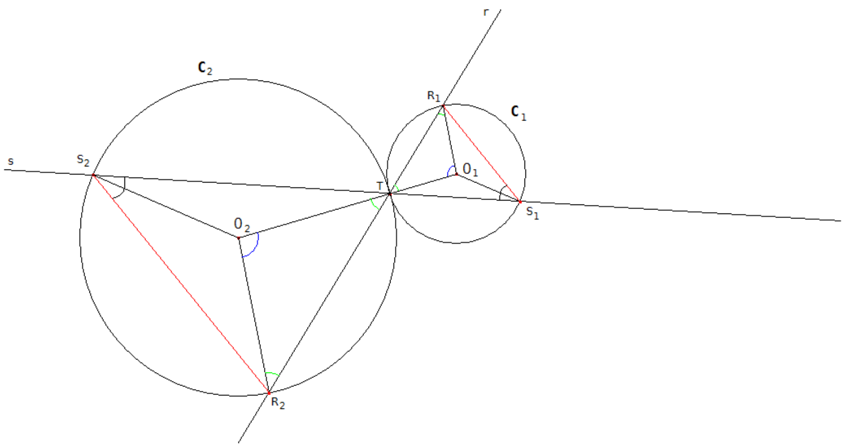
Il volume del tetraedro è dunque

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{12}$$

Problema 6

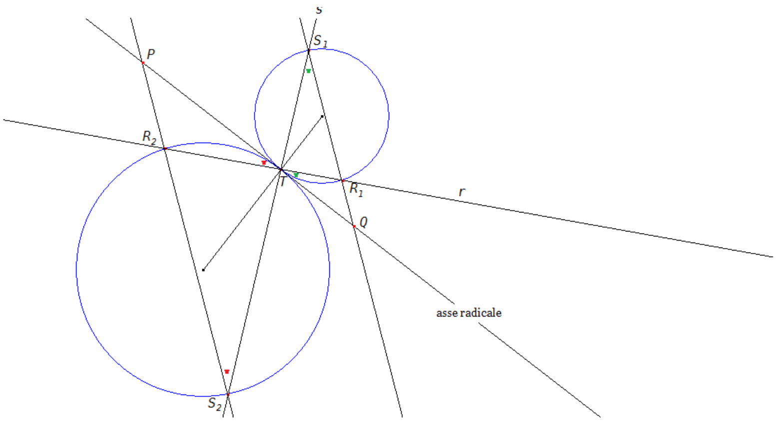
Due circonferenze C_1, C_2 sono tangenti esternamente nel punto T. Due rette r, s passanti per T intersecano le circonferenze in altri due punti R_1, S_1 di C_1 e due punti R_2, S_2 di C_2 . Si dimostri che le due rette R_1S_1 e R_2S_2 sono parallele.

Soluzione 1 Consideriamo il caso in cui i centri delle due circonferenze siano racchiusi tra le due rette r e s come in figura; la dimostrazioni nelle altre configurazioni sarà simile.



Dato che $\widehat{R_1TO_1} = \widehat{R_2TO_2}$, perché opposti al vertice, i triangoli iscosceli R_1TO_1 e R_2TO_2 sono simili. Da questo segue che $\widehat{R_1O_1T} = \widehat{R_2O_2T}$, ma essi sono angoli al centro che insistono sugli stessi archi sui quali insistono gli angoli alla circonferenza $\widehat{R_1S_1T}$ e $\widehat{R_2S_2T}$ rispettivamente, che sono pertanto uguali. Questi angoli sono però angoli alterni interni delle rette R_1S_1 e R_2S_2 rispetto alla trasversale s, quindi R_1S_1 e R_2S_2 sono parallele.

Soluzione 2



Consideriamo l'asse radicale delle due circonferenze e siano P e Q due punti sull'asse radicale opposti rispetto alla retta che congiunge i centri delle due circonferenze, il primo dalla parte di R_2 e il secondo da quella di R_1 (nella figura i punti P e Q sono le intersezioni tra l'asse radicale e le rette R_2S_2 e R_1S_1, ma se tali intersezioni non esistono, una qualsiasi altra coppia di punti va bene). Abbiamo che $\widehat{PTR_2} = \widehat{R_2S_2T}$ dato che essi sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Per lo stesso motivo $\widehat{QTR_1} = \widehat{R_1S_1T}$. Ma $\widehat{PTR_2} = \widehat{QTR_1}$ perché opposti al vertice. Ne segue che $\widehat{R_1S_1T} = \widehat{R_2S_2T}$. Ma questi ultimi sono angoli alterni interni delle rette R_1S_1 e R_2S_2 rispetto alla trasversale s, quindi R_1S_1 e R_2S_2 sono parallele.

Problema 7

Fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, chiameremo "razionale" un punto del piano le cui coordinate siano entrambe razionali. Si dimostri che: (i) esistono circonferenze del piano prive di punti razionali; (ii) esistono circonferenze del piano che contengono precisamente un punto razionale; (iii) esistono circonferenze del piano che contengono precisamente due punti razionali; (iv) non esistono circonferenze del piano che contengono soltanto tre punti razionali.

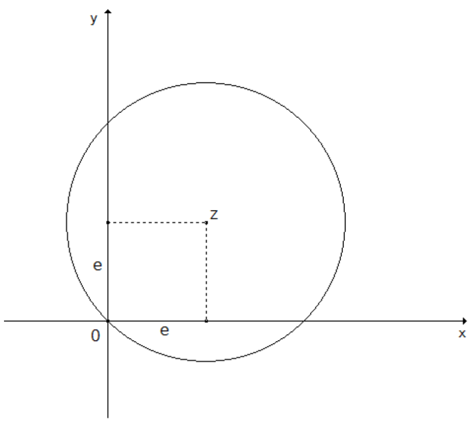
Soluzione

(i) Consideriamo una circonferenza con raggio r tale che r^2 sia irrazionale, per esempio la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 = e$$

Essa non può contenere punti razionali (x, y), dato che se $x, y \in \mathbb{Q}$, allora $x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}$.

(ii) Consideriamo ora la circonferenza di centro (e, e) e di raggio $R = \sqrt{2}e$.



La sua equazione è

$$x^2 + y^2 - 2ex - 2ey = 0$$

Essa ha dunque un punto razionale: $(0,0)$. Notiamo inoltre che l'unico punto (x, y) della circonferenza con $x + y = 0$ è il punto $(0,0)$. Infatti 0 è l'unica soluzione di $2x^2 = 0$, ovvero dell'equazione della circonferenza nel momento in cui si sostituisce y con $-x$.

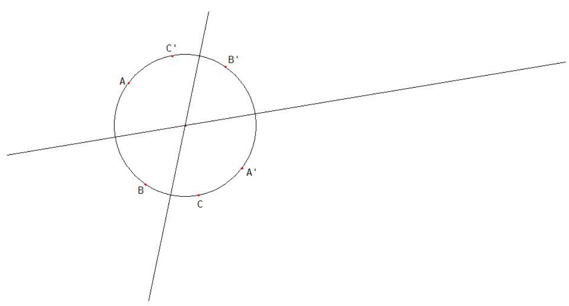
Dimostriamo infine che $(0,0)$ è anche l'unico punto razionale della circonferenza: se $(x, y) \neq (0,0)$ fosse un punto razionale della circonferenza, allora $x^2 + y^2$ e $x + y$ sarebbero numeri razionali diversi da 0 e avremmo che $e = \frac{x^2+y^2}{x+y} \in \mathbb{Q}$, un assurdo.

Prima di procedere alla dimostrazione dei successivi due punti, facciamo qualche osservazione preliminare:

Fatto 1 Se due punti A e B sono razionali, allora il loro punto medio M è razionale. Infatti esso ha coordinate

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

Fatto 2 Se A, B, C sono tre punti razionali distinti su una circonferenza, le rette BC e AB sono rette a coefficienti razionali e pertanto i loro assi, grazie al Fatto 1, sono rette a coefficienti razionali. Di conseguenza il loro punto di incontro, ovvero il centro della circonferenza, è razionale, e quindi i punti A', B', C' sulla circonferenza simmetrici rispetto al centro di A, B e C sono razionali.



(iii) Consideriamo la circonferenza di centro $(1, \sqrt{5})$ e di raggio $\sqrt{6}$. Essa ha equazione

$$(x-1)^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 6$$

ovvero

$$x^2 + y^2 - 2x - 2\sqrt{5}y = 0$$

Tale circonferenza ha punti razionali $(0,0)$ e $(2,0)$, e non può avere altri punti razionali dato che il suo centro non è razionale (Fatto 2).

(iv) Se una circonferenza ha tre punti razionali A, B, C, allora almeno uno di essi non è simmetrico rispetto al centro della circonferenza di un altro di essi. Quindi, grazie al Fatto 2, possiamo concludere che la circonferenza ha almeno un altro punto razionale.

Problema 8

In un torneo di calcio partecipano $n > 1$ squadre. Ogni squadra affronta ogni altra squadra esattamente una volta. In ogni partita vengono assegnati 3 punti alla squadra vincitrice e 0 a quella sconfitta, mentre in caso di pareggio viene assegnato 1 punto a ciascuna squadra. Alla fine del torneo viene stilata la classifica delle squadre in base al numero di punti conquistati. (i) sia k la somma dei punteggi delle squadre nella classifica finale. Quali sono i valori che k può assumere? (ii) Qual è il minor numero di punti con cui una squadra potrebbe vincere il torneo (non a pari merito)?

Soluzione Innanzitutto notiamo che il numero di partite giocate nel torneo è $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Inoltre in ognuna di queste partite vengono assegnati 2 punti in caso di pareggio (uno a squadra) oppure 3 in caso di vittoria di una delle due squadre. Pertanto, il minimo valore di k si ottiene quando tutte le partite finiscono con un pareggio ed è quindi $2\binom{n}{2} = n(n-1)$, mentre il massimo valore si ottiene quando tutte le partite terminano con una vittoria, e in questo caso k vale $3\binom{n}{2} = \frac{3}{2}n(n-1)$. Per mostrare che ogni valore compreso tra $n(n-1)$ e $\frac{3}{2}n(n-1)$ è un possibile valore di k, basta notare che per ogni $j = 1, ..., \binom{n}{2}$, $k = n(n-1) + j$ se nel torneo ci sono state esattamente j partite concluse con una vittoria. Con questo abbiamo concluso il punto (i).

Per quanto riguarda il punto (ii), se le squadre sono solo due, allora chiaramente il minor numero di punti con cui una delle due squadre può vincere (non a pari merito) il torneo è 3 (essa deve vincere l'unica partita che gioca). Dimostriamo ora che questo fatto può essere generalizzato, ovvero che anche per ogni $n > 2$, il minor numero di punti $\mathbf{m}$ con cui una squadra potrebbe vincere il torneo è $n + 1$. Innanzitutto osserviamo che $\mathbf{m} > n - 1$. Se così non fosse la somma k dei punteggi delle squadre sarebbe inferiore strettamente a $n(n-1)$ in contrasto con quanto dimostrato nel punto (i). Notiamo quindi che $\mathbf{m} \leq n + 1$ dato che possiamo produrre un esempio di una situazione in cui una squadra vince con $n + 1$ punti: in tutto il torneo tutte le partite sono finite in pareggio, tranne una. Resta quindi da dimostrare che $\mathbf{m}$ è diverso da n. Supponiamo quindi per assurdo che una squadra possa vincere, non a pari merito, il torneo con n punti. In tal caso tutte le altre devono aver totalizzato meno di n punti, da cui segue che $k \leq n + (n-1)(n-1) = n(n-1) + 1$, ovvero che nel torneo c'è stata al massimo una partita finita con una vittoria. Ma se una squadra ha totalizzato n punti essa dever vinto almeno una partita e perso almeno una partita. Questo ci porta a una contraddizione.