1° GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA"
5 Aprile 1986

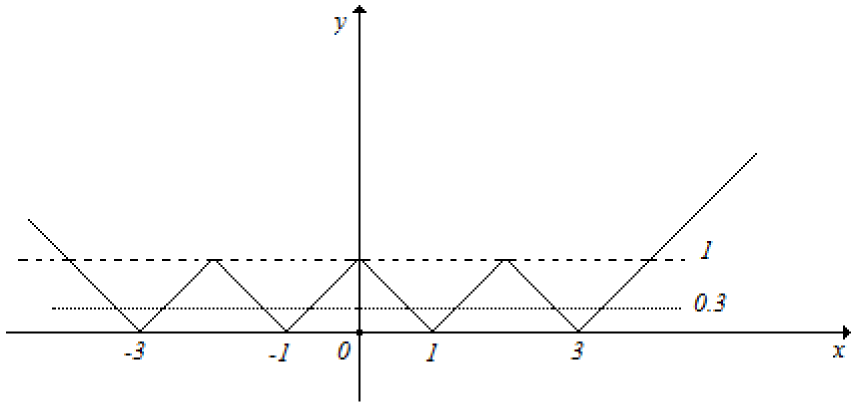
SOLUZIONI

1.- | | | | x | - 1 | - 1 | - 1 | = 0.3 → | | | x | -1 | - 1 | -1 = ± 0.3 → | | | x | - 1 | - 1 | = 1 ± 0.3 →

caso i) | | | x | - 1 |–1 | = 1.3 → | | x | - 1 | - 1 = ± 1.3 → | | x | - 1 | = 1 ± 1.3 : due sottocasi
i.1) | | x | - 1 | = 2.3 → | x | - 1 = ± 2.3 → | x | = 1 ± 2.3 : accettabile solo | x | = 3.3 →
→ x = ± 3.3 ;
i.2) | | x | - 1 | = - 0.3 → impossibile ;

caso ii) | | | x | -1 | - 1 | = 0.7 → | | x | - 1 | - 1 = ± 0.7 → | | x | - 1 | = 1 ± 0.7 : due sottocasi
ii.1) | | x | - 1 | = 1.7 → | x | - 1 = ± 1.7 → | x | = 1 ± 1.7 → accettabile solo | x | = 2.7
→ x = ± 2.7 ;
ii.2) | | x | - 1 | = 0.3 → | x | - 1 = ± 0.3 → | x | = 1 ± 0.3 → due csi :
| x | = 1.3 → x = ± 1.3,
| x | = 0.7 → x = ± 0.7 .

In definitiva le soluzioni sono : ± 0.7, ± 1.3, ± 2.7, ± 3.3 , ben rappresentate in figura con le intersezioni della retta y = 0.3 con la funzione y = |||| x | – 1 | – 1| –1 | :



2.- $\begin{cases} y^{\log_3 \log_y \log_3 x} = 1 \\ y = \log_x 3 \end{cases}$ il sistema è definito per : y > 0 , y ≠ 1 (1° eq.), x > 0 , x ≠ 1 (2° eq.)

1° eq.) $y^{\log_3 \log_y \log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \log_3 \log_y \log_3 x = 0 \Leftrightarrow \log_y \log_3 x = 1 \Leftrightarrow y = \log_3 x$

inseriamo nella 2° eq. :

$\log_3 x = \log_x 3 \Leftrightarrow x = 3 \; oppure \; x = \frac{1}{3}$

$ma \; x = 3 \Rightarrow y = 1 : non \; accettabil\,e$

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = -1 : non \; accettabil\,e$

Il sistema non ha soluzioni.

3.- Il numero di terne ordinate che si possono formare con *n* numeri diversi fra loro è :

$$n(n-1)(n-2)$$

prodotto di tre numeri interi consecutivi.
Tale numero è sicuramente un multiplo di 3 mentre il numero dato non lo è.
Il calcolo è sbagliato.

4.- *Dimostrazione per induzione* :
consideriamo il predicato P(n) := " $5^{(3+2n)}$ ha per ultime cifre 1,2,5 "

Per n = 0 abbiamo $5^{(3+2\cdot 0)} = 5^3 = 125$ quindi P(0) è vera;

Sia P(n) vera, allora $5^{(3+2n)} = x \cdot 1000 + 125$ con x numero naturale, ma :

$$5^{(3+2(n+1))} = 5^{(3+2n)+2} = (x \cdot 1000 + 125) \cdot 25 = x \cdot 1000 \cdot 25 + 125 \cdot 25 = 25000x + 3000 + 125$$

quindi P(n+1) è vera.

5.- $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=\dfrac{13\cdot 12}{2}=78$

Indichiamo con x_i (dove i = 1, ..., 12) gli elementi dell'insieme numerico dato e impostiamo il sistema :

$$\begin{cases} 2(x_1+x_2+x_3+x_4)+x_5+x_6+...+x_{12}=4\cdot 20=80 \\ \quad x_1+x_2+x_3+.....................+x_{11}+x_{12}=78 \end{cases}$$

se sottraiamo membro a membro otteniamo

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ ma non esistono quaterne di numeri naturali distinti che la soddisfino : il problema risulta impossibile.

6.- Indichiamo con *l* e con *h* rispettivamente il lato e l'altezza di un triangolo equilatero.

Sappiamo che $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}l$ o, meglio che $\dfrac{h}{l}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Dimostriamo che tale rapporto è irrazionale (*ricalcando la dimostrazione della irrazionalità di* $\sqrt{2}$) per assurdo supponiamo che esso sia razionale con *h* e *l* primi tra loro, allora :

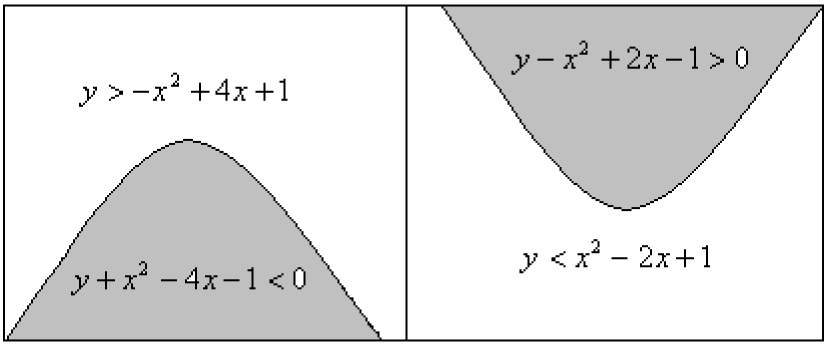
$\dfrac{h^2}{l^2}=\dfrac{3}{4}$ $\rightarrow 4h^2 = 3l^2$ ne consegue :

h^2 multiplo di 3 $\rightarrow$ h multiplo di 3 $\rightarrow$ h^2 multiplo di 9 $\rightarrow$ $h^2 = 9q^2$ $\rightarrow 4h^2 = 4\cdot 9q^2 = 3l^2 \rightarrow$

$\rightarrow l^2 = 3\cdot 4q^2 \rightarrow l^2$ multiplo di 3 $\rightarrow$ l multiplo di 3 quindi sia l che h risultano multipli di 3.

Assurdo poiché *h* e *l* sono primi tra loro : *h/l non è razionale* .

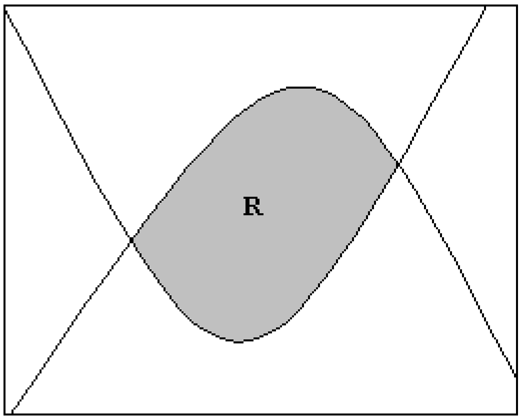
7.-



$$y>x^2-2x+1 \Rightarrow y-x^2+2x-1>0$$
$$y<-x^2+4x+1 \Rightarrow y+x^2-4x-1<0$$

L'area delimitata dalle due parabole si potrà rappresentare come :

$$R=\sqrt{y-x^2+2x-1}\cdot\sqrt{-(y+x^2-4x-1)}>0$$



Le equazioni di una simmetria centrale sono date da $\begin{cases} x \mapsto 2x_0 - x' \\ y \mapsto 2y_0 - y' \end{cases}$ che nel nostro caso diventano : $\begin{cases} x \mapsto -2 - x' \\ y \mapsto 4 - y' \end{cases}$ se applicate alla regione R (dimenticando gli apici) danno *R'* :

$$R' = \sqrt{(4-y)-(-2-x)^2+2(-2-x)-1} \cdot \sqrt{-(4-y)-(-2-x)^2+4(-2-x)-1} > 0$$

e semplificando otteniamo :

$$R' = \sqrt{-y-x^2-4x-5} \cdot \sqrt{y-x^2-8x-17} > 0 \ .$$

8.- Consideriamo $\dfrac{15n^2+16n+4}{3n+1}$ e vediamo se risulta possibile scomporre il numeratore :

dobbiamo trovare due numeri tali che il prodotto sia 60 e la somma 16 : (banale !) 6 e 10.
Perciò :
$15n^2 + 16n + 4 = 15n^2 + 10n + 6n + 4 = 5n(3n+2) + 2(3n+2) = (5n+2)\cdot(3n+2)$
cosicché la nostra frazione diventa :

$$\frac{(5n+2)\cdot(3n+2)}{3n+1} \ .$$

<u>1° caso</u>

$$\frac{5n+2}{3n+1} = \frac{ka}{kb} \ con\ k \neq 1 \ \rightarrow \ \begin{cases} 5n+2 = ka \\ 3n+1 = kb \end{cases} \ \rightarrow \ \begin{cases} n = \dfrac{ka-2}{5} \\ n = \dfrac{kb-1}{3} \end{cases} \rightarrow \ \frac{ka-2}{5} = \frac{kb-1}{3} \ \rightarrow$$

$\rightarrow \ 3ka - 6 = 5kb - 5 \ \rightarrow \ k(3a-5b) = 1$ ma 1 ha come unico divisore se stesso così $k \neq 1$ non è ammissibile, donde $5n+2$ è primo con $3n+1$.

<u>2° caso</u>

$\dfrac{3n+2}{3n+1} = \dfrac{ka}{kb}$ con $k \neq 1$ e si ripete il ragionamento già fatto.

Conclusione : la frazione non è riducibile per nessun valore di *n* .