2ª GARA MATEMATICA " CITTÀ DI PADOVA "
4 Aprile 1987

SOLUZIONI

1.- Siano n, $n+1$, $n+2$ tre numeri naturali consecutivi .

A) la loro somma sarà :

$S = n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3 \cdot (n+1)$

quindi S risulta divisibile per 3 qualsiasi sia il valore di $n \neq 0$.

B) analogamente proviamo per 4 numeri consecutivi : $n, n+1, n+2, n+3$ siano quattro naturali consecutivi allora:

$S = n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6 = 2 \cdot (2n+3)$

S risulta sicuramente pari per ogni $n \neq 0$, ma non è divisibile per 4, infatti $2n + 3$ è dispari.

C) ora operiamo con cinque numeri naturali consecutivi $n, n+1, n+2, n+3, n+4$:

$S = n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5 \cdot (n+2)$

ne deduciamo che S è divisibile per 5 per ogni valore di $n \neq 0$.

D) siano $n, n+1, n+2, ..., n+k-1$, k numeri naturali consecutivi con k dispari, allora :

$$S = n + (n+1) + (n+2) + ... + (n+k-1) = kn + (1+2+3+...+k-1) = kn + \frac{k(k-1)}{2}$$

$S = k(n + \frac{k-1}{2})$ ma k è dispari, perciò S è divisibile per k qualunque sia n $\neq 0$.

2.- Siano a = 3 e b = 3k , con k intero positivo, una coppia di valori che soddisfa la condizione A), per la condizione B) avremo :

$$2 < \log_3 3k < 3 \ \rightarrow\ 2 < \log_3 3 + \log_3 k < 3 \ \rightarrow\ 1 < \log_3 k < 2 \ \rightarrow\ 3^1 < k < 3^2$$

perciò $3 < k < 9$.

Possiamo formare 5 coppie con $k \in I = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

Con l'insieme I possiamo generare infinite coppie (a, b) di soluzioni ponendo :

$a = 3^n$,

$b = (3k)^n$,

$k \in I$,

$n \in \mathbb{N} - \{0\}$

poiché $\log_a b = \log_{3^n} (3k)^n = \log_3 3k$ soddisfa per ogni valore di n la seconda relazione.

3.- Dall'identità :

$$(a^n - 1) = (a-1)(a^{n-1} + ... + a + 1) = (a-1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a^i$$

ponendo a = 4 otteniamo :

$$(4^n - 1) = (4-1) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a^i = 3 \cdot k$$ quindi $4^n - 1$ è multiplo di 3 per ogni $n \neq 0$.

Per induzione :
Sia P(n) il seguente predicato :

$$P(n) := (4^n - 1) \text{ è divisibile per } 3$$

P(1) è proposizione vera : 4 – 1 = 3 è divisibile per 3;
ora dimostriamo il passo induttivo P(n) → P(n+1) :
sia $4^n - 1$ divisibile per 3, allora $4^n - 1 = 3k$ quindi :

$$4^{n+1} - 1 = 4\cdot 4^n - 1 = (3+1)\cdot 4^n - 1 = 3\cdot 4^n + 4^n - 1 = 3\cdot 4^n + (4^n - 1) = 3\cdot 4^n + 3k = 3\cdot(4^n + k)$$

perciò resta dimostrato che P(n) vera → P(n+1) vera, quindi P(n) è vera per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

4.- <u>1ª Via</u>

dai teoremi $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ e $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ avremo :

$$\log_2 x \cdot \log_4 x^2 \cdot \log_8 x^3 = \log_2 x \cdot (2\log_4 2 \cdot \log_2 x) \cdot (3\log_8 2 \cdot \log_2 x) =$$

$$= \log_2 x \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 x\right) \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3}\log_2 x\right) = (\log_2 x)^3$$

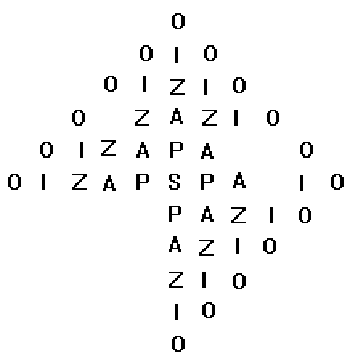
<u>2ª Via</u>

dal teorema $\log_{a^n} b^n = \log_a b$ avremo :

$$\log_2 x \cdot \log_4 x^2 \cdot \log_8 x^3 = \log_2 x \cdot \log_{2^2} x^2 \cdot \log_{2^3} x^3 = \log_2 x \cdot \log_2 x \cdot \log_2 x = (\log_2 x)^3$$

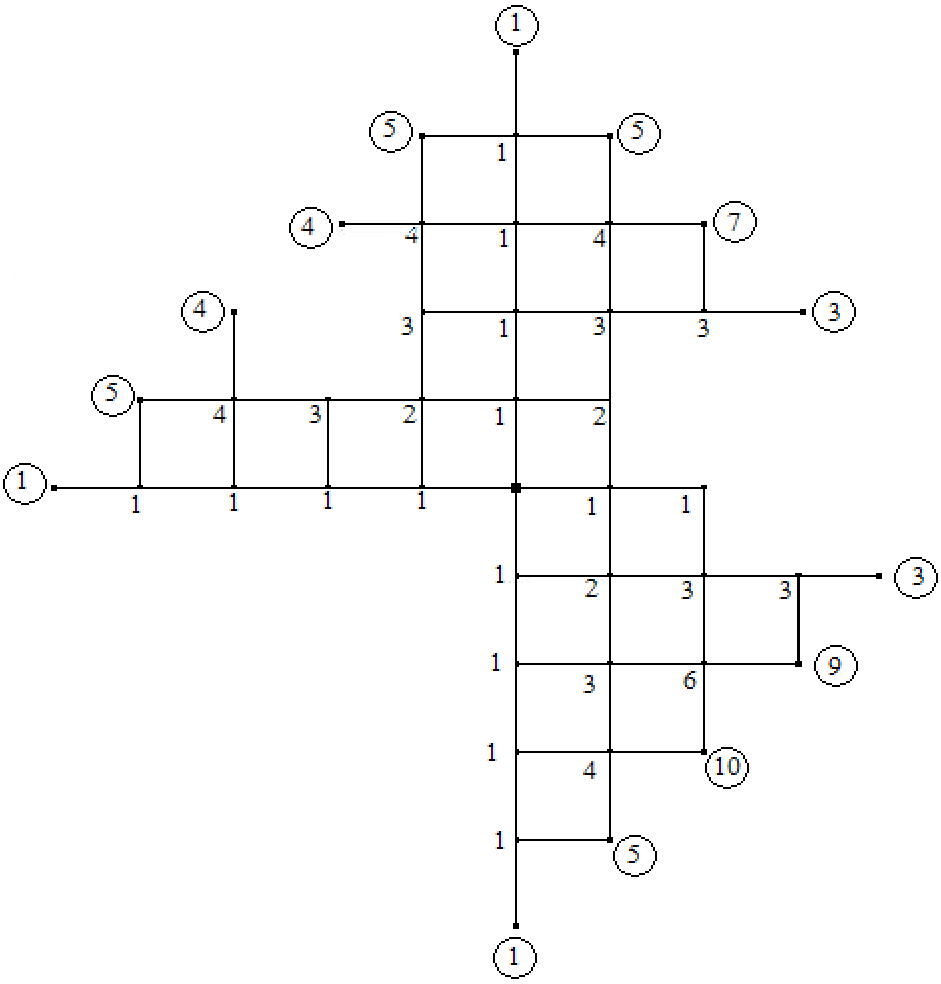
quindi la relazione data è una identità sotto la condizione x > 0.

5.-



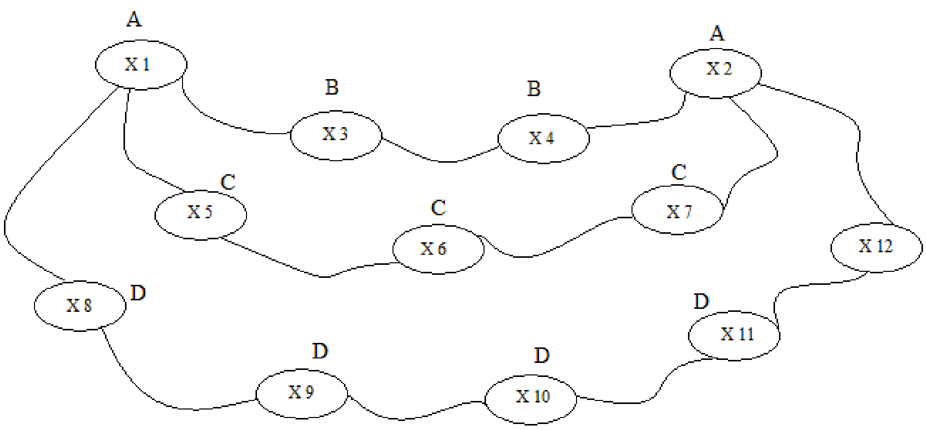
I numeri presenti ai nodi rappresentano la somma dei cammini che danno accesso al nodo stesso secondo tutte le sequenze possibili di lettura della parola S P A Z I O.
Il numero totale delle letture è dato dalla somma dei numeri cerchiati :

$$N_{tot} = 1 + 5 + 4 + 4 + 5 + 1 + 5 + 7 + 3 + 3 + 9 + 10 + 5 + 1 = 63$$



6.- Sia k la costante magica. Essendo ripetuta su tre fili avremo:

$$3\cdot k = 3\cdot(x_1 + x_2) + (x_3 + \ldots + x_{12}) \rightarrow (x_3 + \ldots + x_{12}) = 3\cdot h, \text{ multiplo di } 3$$



$1+2+...+12=\frac{13\cdot 12}{2}=78$ somma dei primi dodici numeri naturali.

Ora abbiamo anche che :

$$k=x_1+x_2+\frac{x_3+...+x_{12}}{3}$$

inoltre :

$(x_1 + x_2)_{min} = 1+2 = 3 \rightarrow x_3 + \ldots + x_{12} = 78 - 3 = 75 \rightarrow k_{min} = 3+\frac{75}{3}=28$

$(x_1 + x_2)_{max} = 10 + 11 = 21 \rightarrow x_3 + \ldots + x_{12} = 78 - 21 = 57 \rightarrow k_{max} = 21+\frac{57}{3}=40$

Quindi $28 \leq k \leq 41$, ma :

k = 28 non è possibile poiché $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 + x_4 = 25$ impossibile.

x_1+x_2	24	21	18	15	12	9	6	3
$x_3+\ldots+x_{12}$	54	57	60	63	66	69	72	75
k		40	38	35	34	32	10	28

Analogamente k = 30 non è possibile, mentre k = 32 sì e con diverse soluzioni di cui una :

$(x_1, x_2) = (1, 8)$;

$(x_3, x_4) = (11, 12)$;

$(x_5, x_6, x_7) = (4, 9, 10)$;

$(x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}) = (2, 3, 5, 6, 7)$.

Tutti i diademi magici ottenuti ridistribuendo i numeri all'interno delle stesse file si ottengono calcolando :

- P_1 = permutazioni dei numeri in posizione A $\rightarrow$ 2;
- P_2 = permutazioni dei numeri in posizione B $\rightarrow$ 2;
- P_3 = permutazioni dei numeri in posizione C $\rightarrow 3\cdot 2 = 6$;
- P_4 = permutazioni dei numeri in posizione D $\rightarrow 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 120$.

Totale dei modi possibili = $P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot P_4 = 2\cdot 2\cdot 6\cdot 120 = 2880$.

7.- Data la parabola *K*, scegliamo come assi cartesiani y ed x rispettivamente il suo asse di simmetria e la retta ad esso ortogonale passante per il vertice V di *K*.

Come unità di misura sui due assi prendiamo la distanza fuoco-vertice FV.

L'equazione di *K* è : $y=\frac{1}{4}x^2$, poiché $FV=\frac{1}{4a}=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$.

Per la scelta fatta A(–2, 1), mentre B(2, 1) non ci servirà.

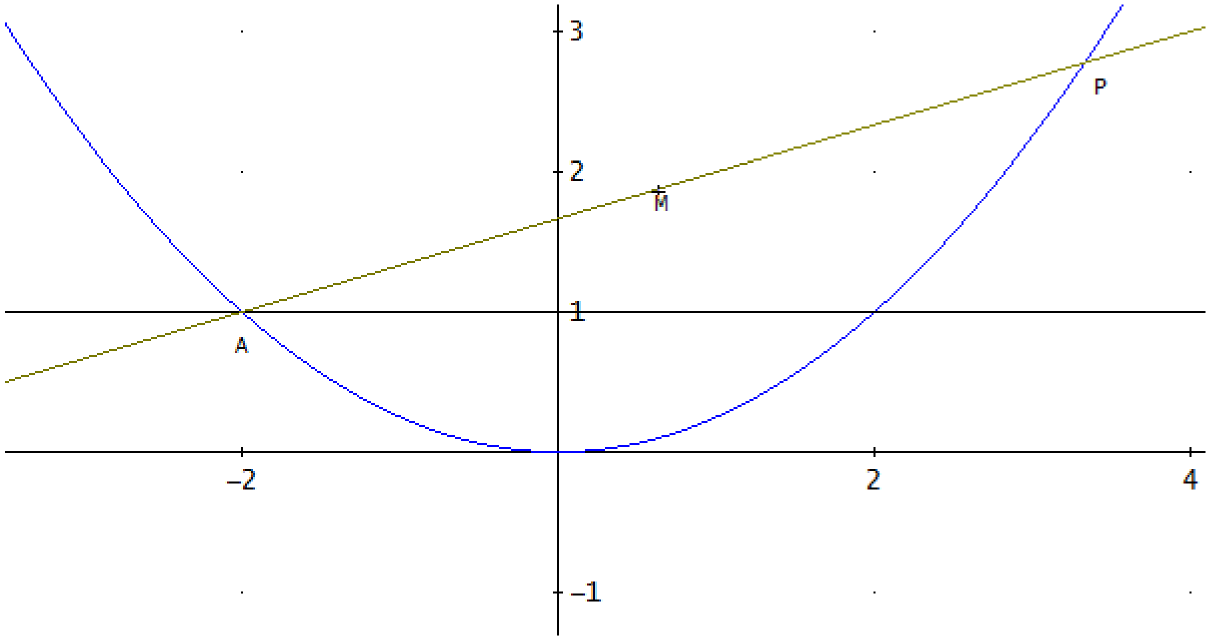
Il generico punto P di *K* ha coordinate : $P\left(\alpha, \frac{1}{4}\alpha^2\right)$, mentre il generico punto M del luogo *K'* avrà coordinate, per quanto richiesto, date da :

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{\alpha-2}{2} \\ y_M=\dfrac{\frac{1}{4}\alpha^2+1}{2} \end{cases}$$

ricavando x dalla prima e sostituendo nella seconda :

$\alpha = 2x + 2 \rightarrow \; y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ equazione di *K'* il luogo cercato : ancora una parabola.

Osserviamo che $F''V' = \frac{1}{4a'} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} FV$.



e qui sotto abbiamo rappresentato entrambi i luoghi :