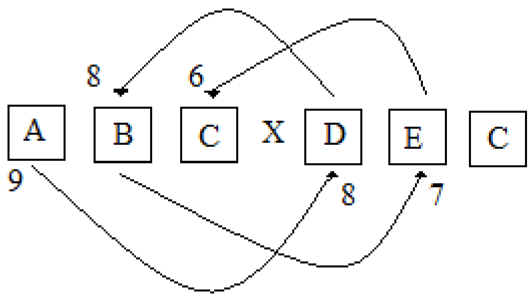
III^{a} GARA MATEMATICA “ CITTÀ DI PADOVA “
9 APRILE 1988

SOLUZIONI

1.- La cifra delle centinaia A viene scelta tra 1, 2, …, 9 mentre quella delle centinaia D, diversa da quella scelta per A, dovrà scegliersi tra 8 cifre, per B abbiamo ancora 8 scelte (perché è finalmente possibile inserire anche 0), per E sono 7 le scelte, per C sono 6.



In totale N = 9·8·8·7·6 = 24192.

2.- Siano a, b, c le cifre, allora la scrittura polinomiale porge per i due numeri :

$$x = a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c \;;\quad y = c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a$$

e quindi :

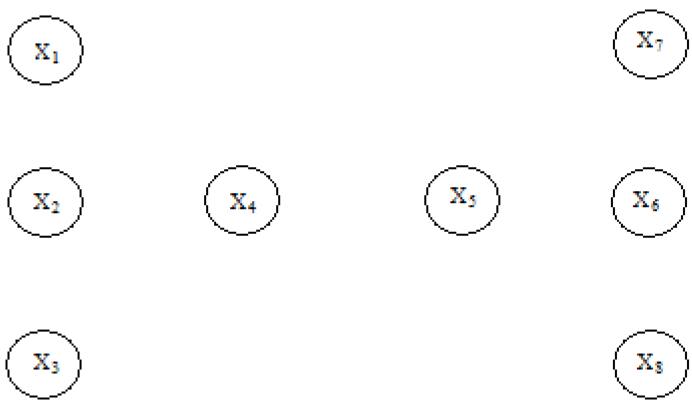
$x + y = (a + c)\cdot 10^2 + 2b\cdot 10 + (a + c) = (a + c)\cdot(9 + 1)^2 + 2b\cdot(9 + 1) + (a + c)$

otteniamo così:

$x + y = 9\cdot k + (a + c) + 2b + (a + c) = 9\cdot k + 2\cdot(a + b + c)$

x + y differisce da un multiplo di 9 per *il doppio della somma delle sue cifre*.

3.-



La somma dei numeri da 1 a 8 è 36 ed inoltre : $x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = x_7 + x_6 + x_8$ vale anche :

$$36 + x_2 + x_6 = 3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \to x_1 + x_2 + x_3 = 12 + \frac{x_2 + x_6}{3}$$

perciò $x_2 + x_6$ è multiplo di 3 e abbiamo le seguenti possibilità :

i) $x_2 + x_6 = 3$;
ii) $x_2 + x_6 = 6$;
iii) $x_2 + x_6 = 9$;
iv) $x_2 + x_6 = 12$;
v) $x_2 + x_6 = 15$.

Oltre non è possibile poiché la somma massima è 8 + 7 = 15.

i) se $x_2 + x_6 = 3$ allora $x_2 = 1$ e $x_6 = 2$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 12 + \frac{3}{3} = 13$ e possiamo ricavare le altre

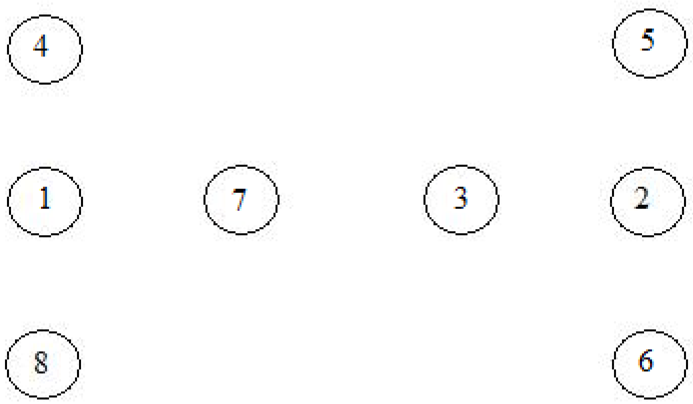
relazioni : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \to x_1 + x_3 = 12 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 13 \to x_4 + x_5 = 10 \\ x_7 + x_6 + x_8 = 13 \to x_7 + x_8 = 11 \end{cases}$

e i numeri a disposizione sono : 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Abbiamo due coppie additive di 10 : (3, 7) e (4, 6) :

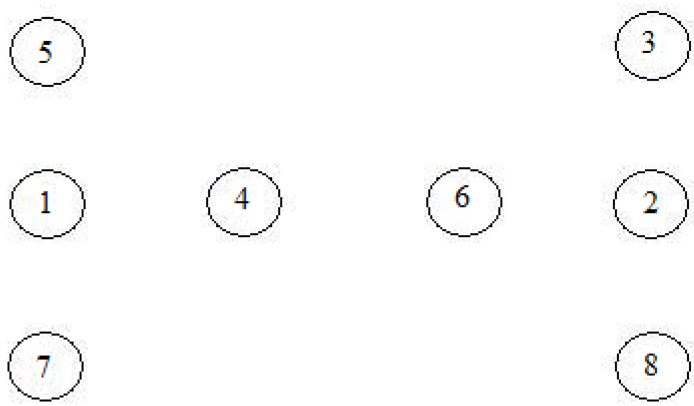
1) $x_4 + x_5 = 3 + 7 \to \begin{cases} x_1 + x_3 = 12 \\ x_7 + x_8 = 11 \end{cases}$ con i numeri 4, 5, 6, 8 e la scelta obbligata (5, 6) e (4, 8)

otteniamo la soluzione



2) $x_4 + x_5 = 4 + 6 \to \begin{cases} x_1 + x_3 = 12 \\ x_7 + x_8 = 11 \end{cases}$ con i numeri 3, 5, 7, 8 e la scelta obbligata (3, 8) e (5, 7)

ottenendo la soluzione :



ii) se $x_2 + x_6 = 6$ allora possiamo avere : (1, 5) e (2, 4) con $x_1 + x_2 + x_3 = 12 + \frac{6}{3} = 14$;

a.) $x_2 = 1$, $x_6 = 5$, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 14 \to x_1 + x_3 = 13 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 14 \to x_4 + x_5 = 8 \\ x_7 + x_6 + x_8 = 14 \to x_7 + x_8 = 9 \end{cases}$ con i numeri 2, 3, 4, 6, 7, 8.

Partendo da $x_4 + x_5 = 8$ proponiamo i numeri 2 e 6, cosicché resterebbero 3, 4, 7, 8 per comporre 13 e 9 : manifestamente impossibile.

b.) $x_2 = 2$, $x_6 = 4$, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 14 \to x_1 + x_3 = 12 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 14 \to x_4 + x_5 = 8 \\ x_7 + x_6 + x_8 = 14 \to x_7 + x_8 = 10 \end{cases}$ con i numeri 1, 3, 5, 6, 7, 8.

Partendo da $x_4 + x_5 = 8$, ci troviamo di fronte a due possibilità : (1, 7) e (3, 5) :
nel primo caso resterebbero a disposizione 3, 5, 6, 8 per comporre 10 e 12 : impossibile;
nel secondo caso resterebbero a disposizione 1, 6, 7, 8 ancora impossibile.

iii) se $x_2 + x_6 = 9$ con coppie additive (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5) ed inoltre
$x_1 + x_2 + x_3 = 12 + \frac{9}{3} = 15$ e operando come in precedenza avremo :

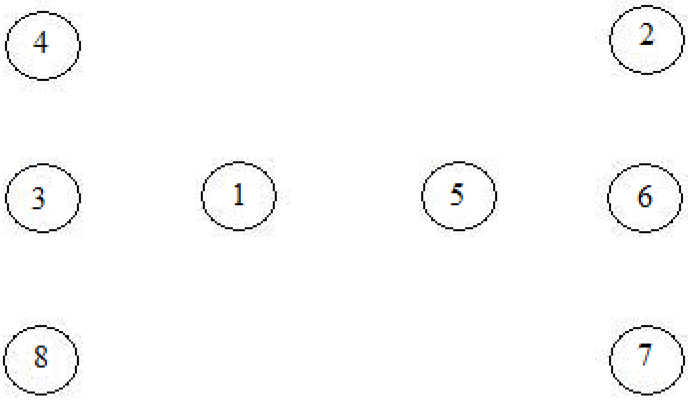
a.) (1, 8) $\to \begin{cases} x_1 + x_3 = 14 \\ x_4 + x_5 = 6 \\ x_7 + x_8 = 7 \end{cases}$ con i numeri 2, 3, 4, 5, 6, 7 : impossibile ottenere 14;

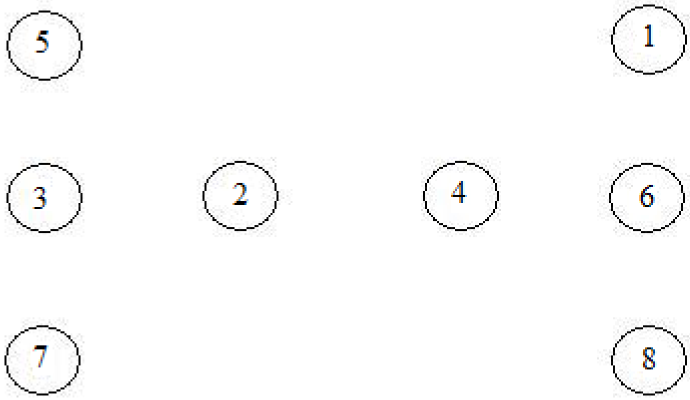
b.) (2, 7) $\to \begin{cases} x_1 + x_3 = 13 \\ x_4 + x_5 = 6 \\ x_7 + x_8 = 8 \end{cases}$ con i numeri 1, 3, 4, 5, 6, 8 : 5 + 8 = 13, ma allora non posso più ottenere gli altri : impossibile;

c.) (3, 6) $\to \begin{cases} x_1 + x_3 = 12 \\ x_4 + x_5 = 6 \\ x_7 + x_8 = 9 \end{cases}$ con i numeri 1, 2, 4, 5, 7, 8 : proviamo 1 + 5 = 6 allora restano 2, 4, 7, 8 per comporre 12 e 9 : (4, 8) e (2, 7) !

Ora proviamo 2 + 4 = 6, allora restano 1, 5, 7, 8 per comporre 12 e 9 : (5, 7) e (1, 8) !

Le soluzioni trovate porgono :

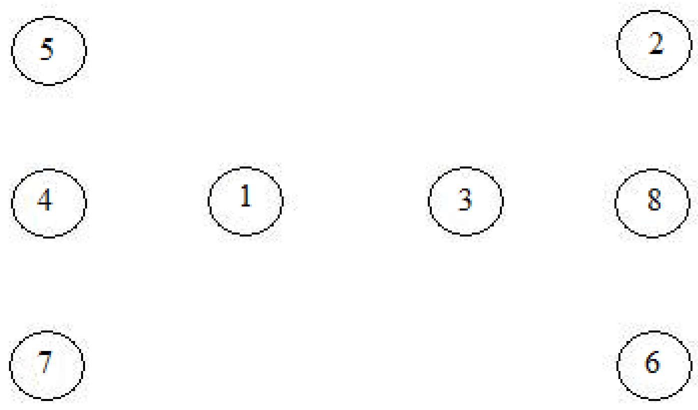




d.) (4, 5) $\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 11 \\ x_4 + x_5 = 6 \\ x_7 + x_8 = 10 \end{cases}$ con i numeri 1, 2, 3, 6, 7, 8 : impossibile comporre 6.

iv) se $x_2 + x_6 = 12$, allora abbiamo come coppie additive (4, 8) e (5, 7) ed inoltre deve essere $x_1 + x_2 + x_3 = 12 + \frac{12}{3} = 16$ cosicché :

a.) (4, 8) $\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 12 \\ x_4 + x_5 = 4 \\ x_7 + x_8 = 8 \end{cases}$ con i numeri 1, 2, 3, 5, 6, 7 : (1, 3) per x_4 e x_5 e quindi restano 2, 5, 6, 7 per 12 e 8 : (2, 6) e (5, 7) ! Altra soluzione:



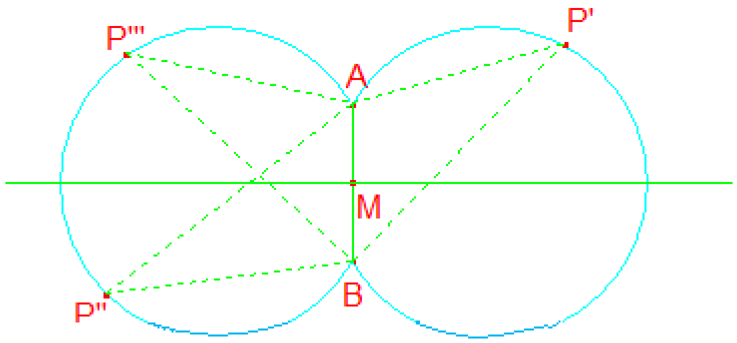
b.) (5, 7) $\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 11 \\ x_4 + x_5 = 4 \\ x_7 + x_8 = 9 \end{cases}$ con i numeri 1, 2, 3, 4, 6, 8 : obbligati per 4 a scegliere (1, 3)

ci restano 2, 4, 6, 8 per comporre 11 e 9 : impossibile.

v) se $x_2 + x_6 = 15$, abbiamo solo (7, 8) e $x_1 + x_2 + x_3 = 12 + \frac{15}{3} = 17$ e possiamo scrivere :

$\begin{cases} x_1 + x_3 = 10 \\ x_4 + x_5 = 2 \\ x_7 + x_8 = 9 \end{cases}$ manifestamente impossibile comporre 2 con i numeri a disposizione.

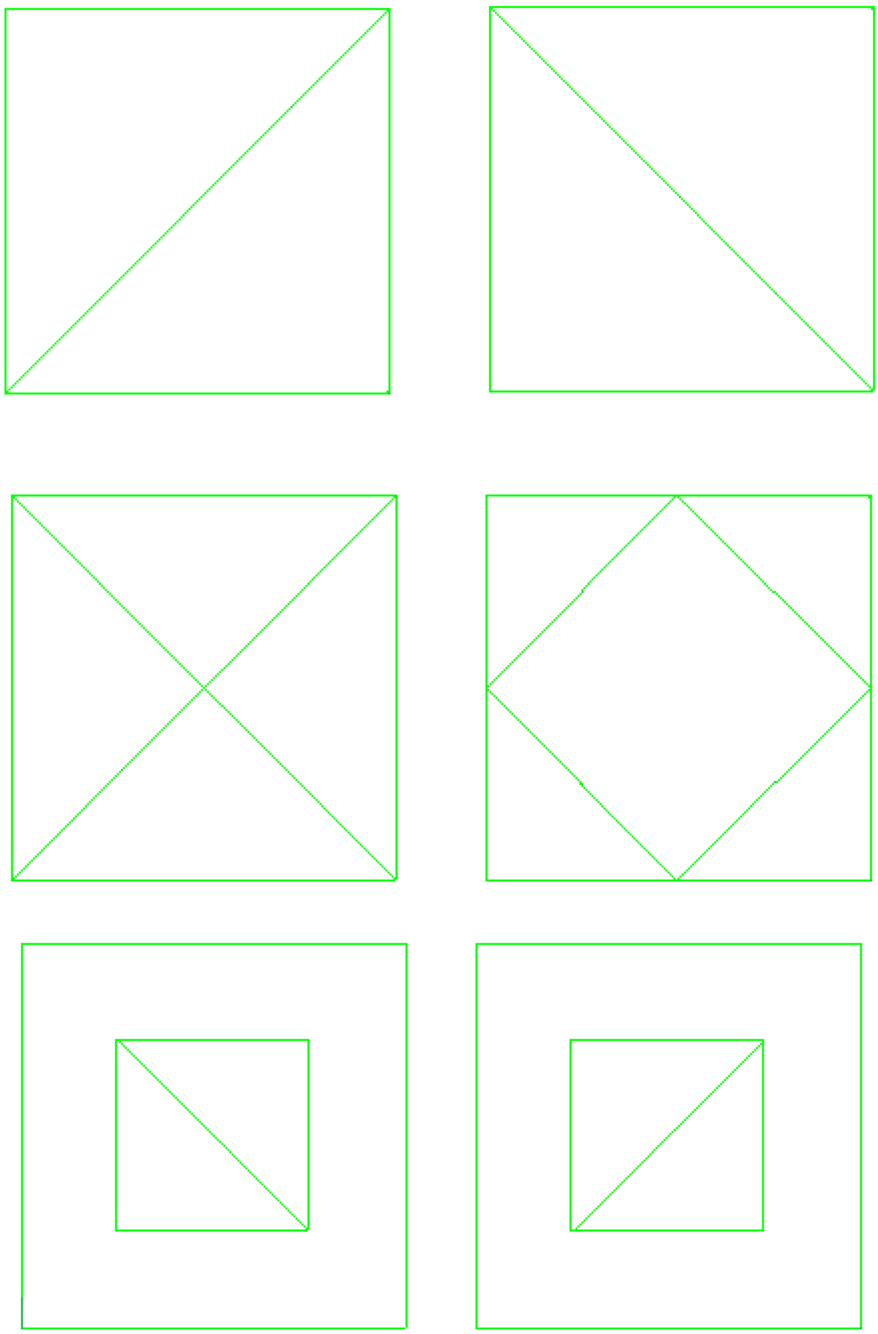
4.-

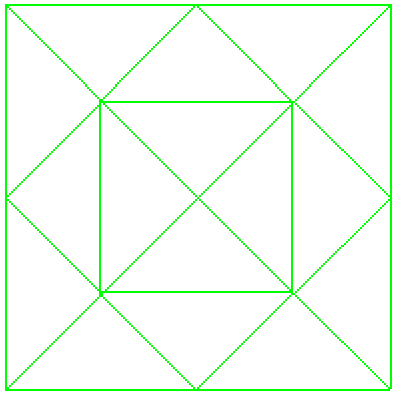


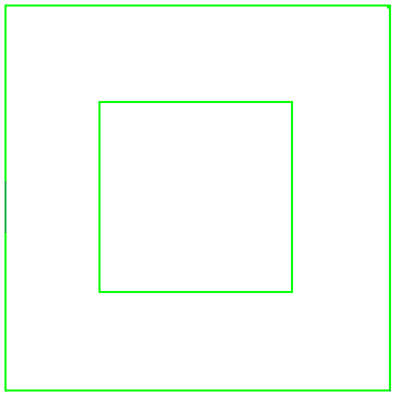
Il luogo cercato è costituito da due archi di circonferenza di raggio 3 e aventi in comune il segmento AB di lunghezza 3 : l'esagono regolare inscritto ha lato pari al raggio cosicché l'angolo alla circonferenza che insiste su di una corda uguale al raggio vale 30°.

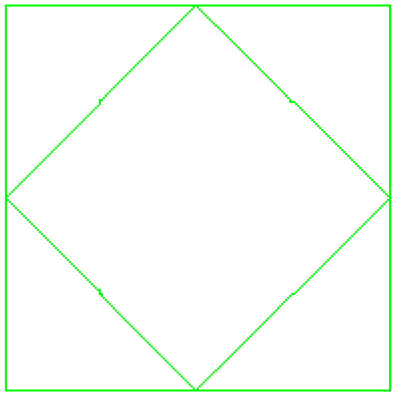
La figura è simmetrica rispetto al segmento AB e rispetto alla retta perpendicolare ad esso passante per il punto medio M che risulta perciò centro di simmetria.

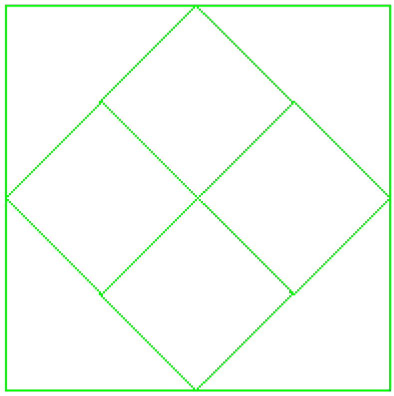
5.- I triangoli sono 32 e i quadrati 7.











Se osserviamo le figure possiamo individuare le aree richieste come composizione del modulo-base sedicesima parte del quadrato che possiamo chiamare ***t*** :

T = 16***t*** + 16***t*** + 16***t*** + 8***t*** + 4***t*** + 4***t*** + 16***t*** = 80***t***
Q = 16***t*** + 4***t*** + 8***t*** + 8***t*** = 36***t*** .

Ora consideriamo il rapporto tra le aree richieste : $\frac{\sum_T}{\sum_Q} = \frac{20}{9}$.

In effetti i triangoli e i quadrati della figura sono costituiti tutti dall' elemento-base che è il triangolo rettangolo isoscele di base $\frac{l}{2}$ e di lati obliqui $\frac{l\sqrt{2}}{4}$. Quindi la somma di tutte le aree dei triangoli e la somma di tutte le aree dei quadrati sono due numeri multipli interi dell'area dell'elemento-base : il loro rapporto è razionale.

6.- Consideriamo una generica potenza di 11 utilizzando il binomio di Newton :

$$(10+1)^n = \binom{n}{0} \cdot 10^n + \binom{n}{1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot 10 + \binom{n}{n}$$

Si nota che la cifra delle unità è sempre 1, quella delle decine è $\binom{n}{n-1} = n$ chiaramente modulo 10. Perciò, usando le lettere del testo, ne viene che r – s = 10.

Possiamo trovare lo stesso risultato anche elementarmente : nel moltiplicare per 11 la cifra delle decine si ottiene sommando le cifre delle unità e delle decine del fattore diverso da 11, ma se i fattori sono tutti 11 avremo : per potenza 2, cifra delle decine 1 + 1 = 2; per potenza 3, cifra delle decine 1 + 2 = 3; per potenza 4, cifra delle decine 1 + 3 = 4; … e così via. Ovvio, ora, il risultato.

7.- Se α = 2 ed n = 2 abbiamo $2 = \log_2(2 \cdot 2)$.

Se α = 2 ed n = 3 allora $2 < \log_2(2 \cdot 3) < 3$ e quanto affermato dal testo dell'esercizio è vero.

Supponiamo che la relazione sia vera per *n* e dimostriamo che è vera per *n + 1* :

$$n > \log_\alpha(\alpha \cdot n) \rightarrow \alpha^n > \alpha \cdot n$$

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha > (\alpha \cdot n) \cdot \alpha = (\alpha \cdot n) + (\alpha \cdot n) + \ldots + (\alpha \cdot n) > \alpha \cdot n + \alpha = \alpha \cdot (n+1)$$

perciò : $n+1 > \log_\alpha \alpha \cdot (n+1)$: come volevasi dimostrare.