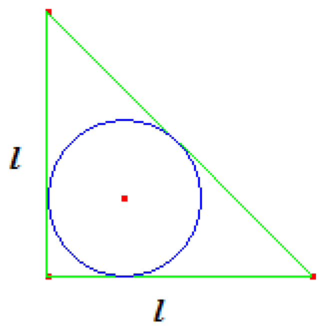
IV[a] GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA"
15 aprile 1989

SOLUZIONI

1.- Indichiamo con ℓ il lato del triangolo rettangolo isoscele :

Area del triangolo = $\dfrac{\ell^2}{2}$

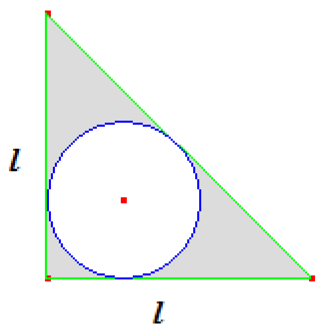
Area del cerchio inscritto = $\pi \cdot \dfrac{\ell^2}{(2+\sqrt{2})^2}$ che si ottiene dalla doppia area e dal perimetro.



Ora le confrontiamo tra loro :

$$A_T - A_{Ci} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{(2+\sqrt{2})^2}\right) \cdot \ell^2 = \frac{(2+\sqrt{2})^2 - 2\pi}{2 \cdot (2+\sqrt{2})^2} \cdot \ell^2 = \frac{3+2\sqrt{2}-\pi}{(2+\sqrt{2})^2} \cdot \ell^2$$

questa è l'area della *parte restante* : è più grande o più piccola dell'area del cerchio ?



$$\frac{3+2\sqrt{2}-\pi}{(2+\sqrt{2})^2} \cdot \ell^2 \gtrless \frac{\pi}{(2+\sqrt{2})^2} \cdot \ell^2 \;\rightarrow\; 3+2\sqrt{2}-\pi \gtrless \pi \;\rightarrow\; 3+2\sqrt{2}-\pi < \pi \;\;!$$

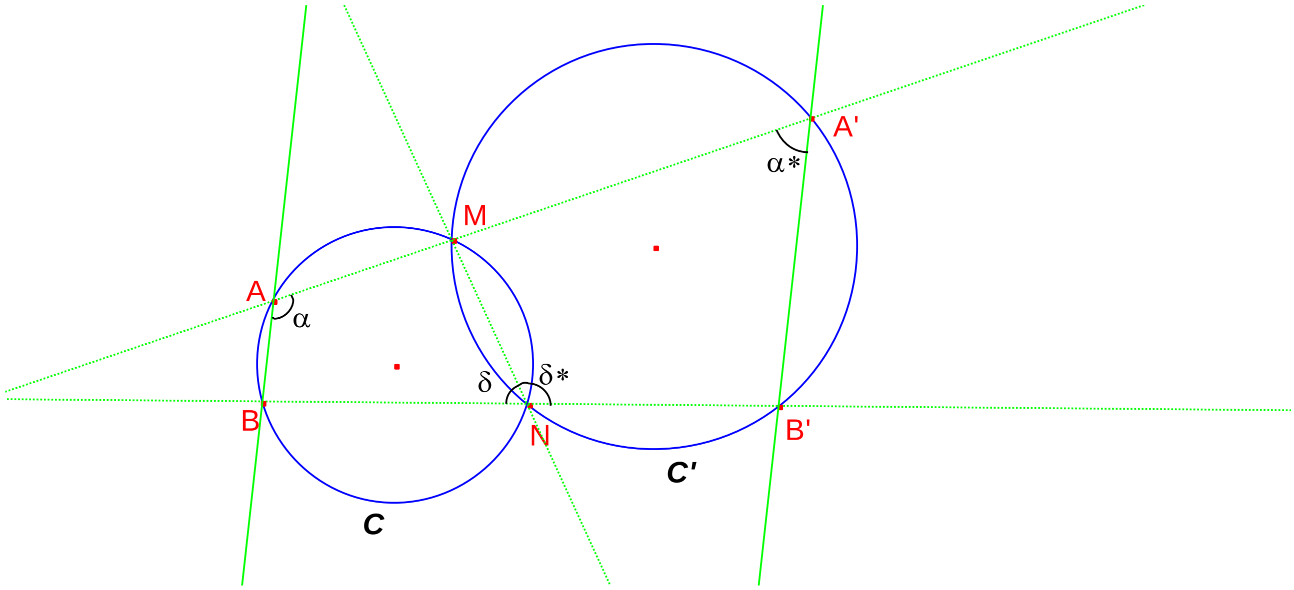
Si deduce che l'area della *parte restante* è minore dell'area del cerchio inscritto e dunque il doppio di quest'ultima è maggiore dell'area del triangolo rettangolo isoscele.

Possiamo utilizzare il calcolo approssimato per raggiungere lo stesso risultato :

$$\frac{\ell^2}{2} \gtrless \frac{\pi \cdot (2-\sqrt{2})^2}{2} \cdot \ell^2$$

In pratica dobbiamo confrontare : $1 \gtrless \pi \cdot (2-\sqrt{2})^2$ e considerando le approssimazioni, per difetto, 3.14 e 0.58 otteniamo $3.14 \cdot (0.58)^2 = 1.05\ldots > 1$.
Dunque l'area del triangolo è minore del doppio dell'area del cerchio.

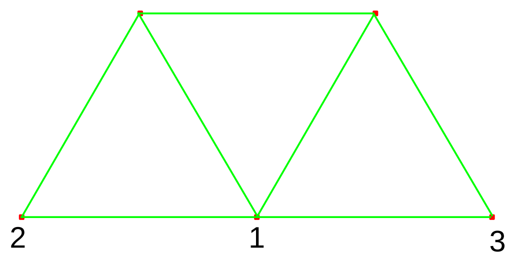
2.-



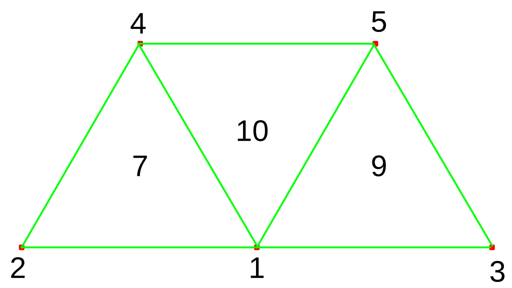
ABNM e A'B'NM sono due quadrilateri inscritti in una circonferenza e quindi gli angoli interni opposti sono supplementari, per esempio :
$\alpha + \delta = \alpha^* + \delta^* = \pi \;\rightarrow\; \alpha + \delta + \alpha^* + \delta^* = \alpha + \alpha^* + \delta + \delta^* = 2\pi \rightarrow \;\; \alpha + \alpha^* = \pi$
quest'ultima uguaglianza deriva dal fatto che δ e δ^* sono supplementari.
Ora α e α^* sono coniugati interni e supplementari, allora le due rette sono parallele.
Le altre disposizioni delle secanti si trattano allo stesso identico modo.

3.- Abbiamo a disposizione 5 caselle da riempire con cifre differenti : 10 scelte per la prima, 9 per la seconda, 8 per la terza, 7 per la quarta e, infine, 6 per la quinta cosicché le targhe con le cifre tutte differenti sono $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$. Meno della metà di tutte le targhe.
Le targhe con almeno una cifra ripetuta sono di più di quelle con le cifre tutte diverse.

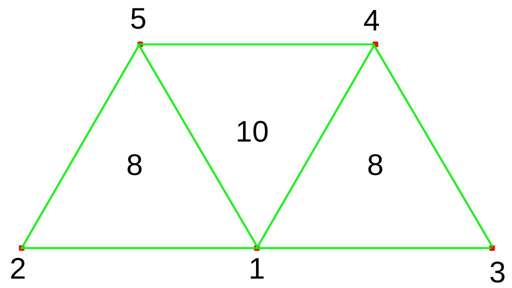
4.- Esercizio che possiamo risolvere *provando* :



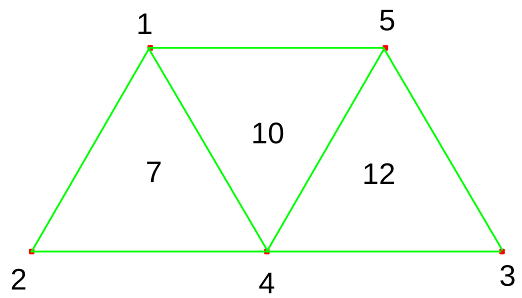
I numeri 1, 2, 3 devono stare nei vertici e a disposizione restano 4, 5, 6, 7, 8.
Se utilizziamo 4 in uno dei due vertici restanti all'interno del triangolo dovremmo porre o 7 oppure 8, ma nell'altro avremmo 5 con somma rispettivamente 10 e 9 : impossibile.



Oppure somme 8, 8, 10 : ancora impossibile.



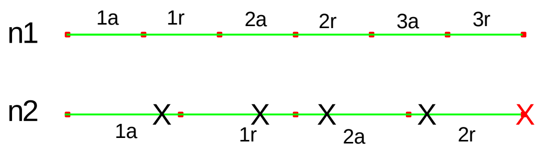
Disponendo 1, 2, 3 in altro modo la situazione non cambia.



Il problema non ha soluzione.

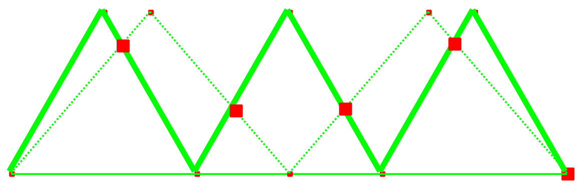
5.- Il rapporto tra le velocità è $\frac{2}{3}$.

Quando il primo nuotatore compie tre vasche complete, il secondo ne compie due : una volta si incontrano proprio al termine (a dire il vero qui si *raggiungono*).
I veri e propri incontri (perché in versi opposti) sono quattro e, con l'ultimo, in totale cinque.
Possiamo scegliere le rappresentazioni :



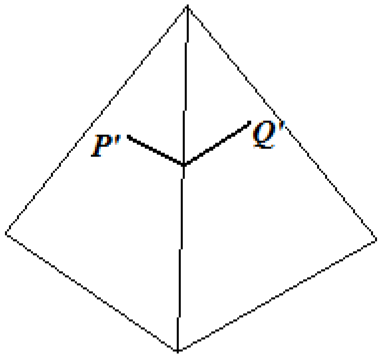
Lineare : i nuotatori si incontrano nel : primo ritorno-prima andata, seconda andata-primo ritorno, secondo ritorno-seconda andata, terza andata-secondo ritorno e, alla fine, terzo ritorno-secondo ritorno. Possiamo anche osservare che i nuotatori si trovano da bande opposte della piscina quando il primo ha fatto tre vasche semplici e il secondo due..

Rette spezzate :

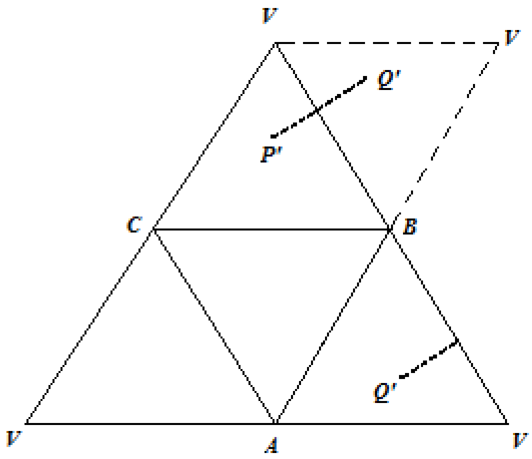


Il grafico rappresenta lo spazio percorso in funzione del tempo per i due nuotatori e come evidente essi si incontrano cinque volte e a metà dell'intervallo di tempo si ritrovano da bande opposte della piscina.

6.- Per individuare il percorso minimo è sufficiente considerare lo *sviluppo piano* del solido :

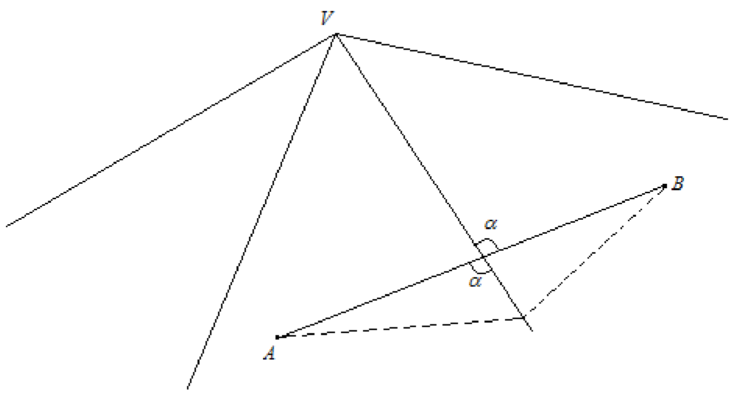


Diventa infatti :

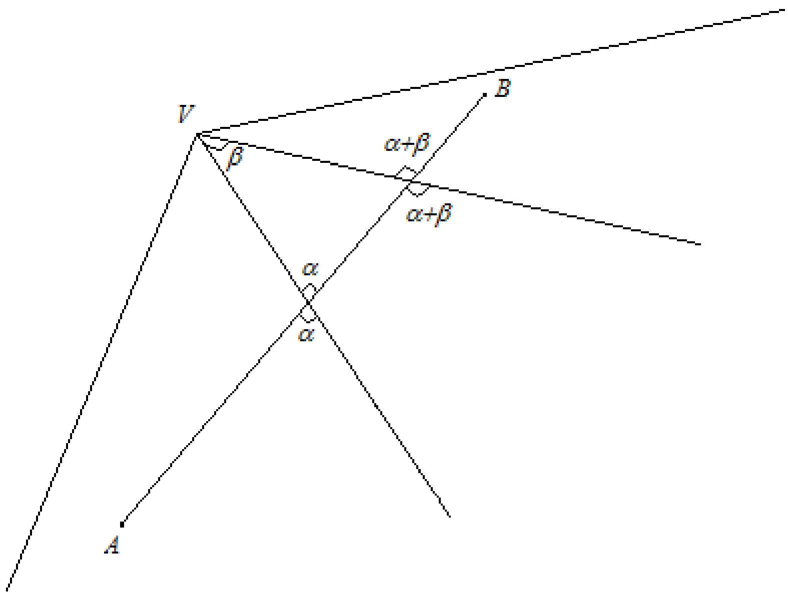


Chiaramente i vertici di nome V coincidono e la faccia ABV è stata traslata e ruotata nella BVV per rendere manifesto che il percorso minimo è il segmento che congiunge i due punti.

Domanda : è possibile tracciare il percorso minimo senza "sviluppare" il solido ?
In effetti è possibile : basta tracciare il percorso in modo che gli angoli *opposti al vertice* secondo cui il cammino taglia lo spigolo risultino uguali.
Se i due punti appartengono a due facce adiacenti avremo :



Se i due punti appartengono a due facce non adiacenti avremo :



7.- Se X, Y, Z sono tutti pari, possiamo scrivere : X = 2x, Y = 2y, Z = 2z e quindi :

$$4x^2 + 4y^2 = 3 \cdot 4z^2 \text{ e dividendo per 4} \rightarrow x^2 + y^2 = 3z^2$$

cosicché anche x, y, z risulterebbe soluzione dell'equazione.:
Per provare quanto richiesto basta considerare il caso in cui *almeno uno* dei tre numeri sia dispari :
se Z pari, X dispari, Y dispari : Z = 2z, X = 2x + 1, Y = 2y + 1 avremo:

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 3 \cdot 4z^2$$

impossibile perché il II° membro è divisibile per 4 mentre il I° no.

se Z è dispari e uno degli altri è pari, per esempio Y, avremo : Z = 2x + 1, X = 2x + 1, Y = 2y:

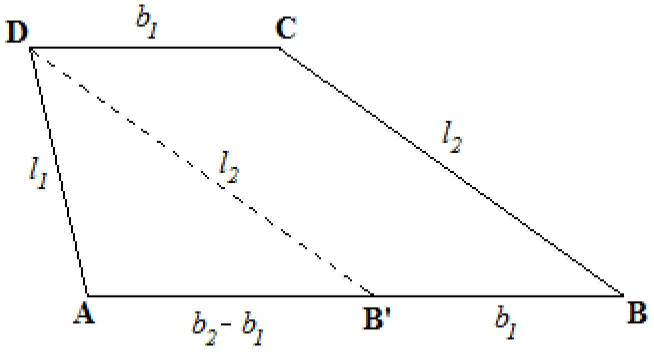
$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 = 3 \cdot (4z^2 + 4z + 1)$$

$$4x^2 + 4x + 4y^2 - 3 \cdot 4z^2 - 3 \cdot 4z = 3 - 1 = 2$$

$$4 \cdot (x^2 + x + y^2 - 3z^2 - 3z) = 2$$

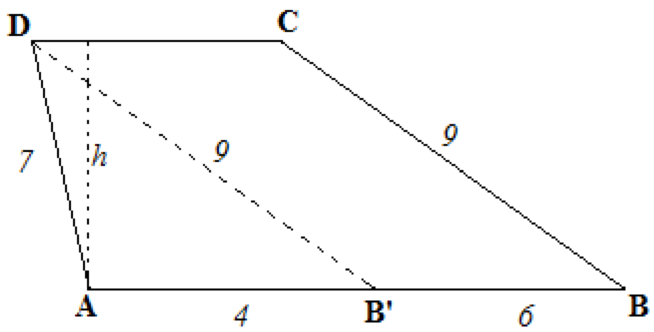
manifestamente impossibile .

8.- Dato il trapezio ABCD si tracci la parallela DB' al lato CB e si prenda in considerazione il triangolo ADB' :



I lati di ADB' misurano rispettivamente l_1, l_2, $b_2 - b_1$: perciò se sono note le misure dei due lati e delle due basi del trapezio possiamo:
1) costruire il triangolo ADB' poiché sono noti i suoi lati (III° criterio di congruenza)
2) accostargli il parallelogramma b_1, l_2 per ottenere il trapezio .
Per un qualunque trapezio i tre numeri l_1, l_2, $b_2 - b_1$ soddisfano la disuguaglianza triangolare.
Se $b_2 = 10$, $b_1 = 6$, $l_1 = 7$, $l_2 = 9$, i numeri 10 – 6, 7, 9 soddisfano la disuguaglianza triangolare e ricordando Erone possiamo determinare l'area del triangolo:

A(ADB') = $\sqrt{(10 \cdot (10 - 4) \cdot (10 - 7) \cdot (10 - 9)} = \sqrt{180} = 6 \cdot \sqrt{5}$



Possiamo determinare h = $2 \cdot 6 \cdot \sqrt{5} / 4 = 3 \cdot \sqrt{5}$ e di conseguenza l'area del parallelogramma :
A(DCBB') = $6 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 18 \cdot \sqrt{5}$ e in totale **A**(ABCD) = $24 \cdot \sqrt{5}$.