V^{a} GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA"

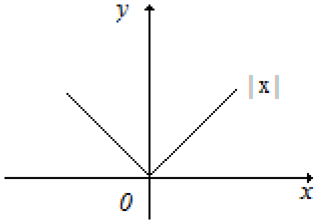
10 MARZO 1990

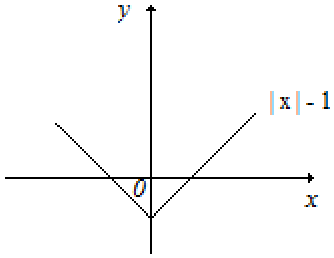
SOLUZIONI

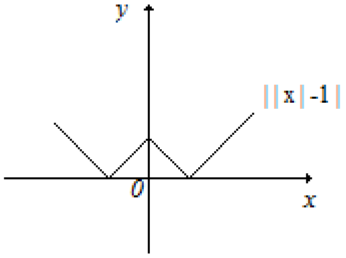
1.- Di solito si intende che i numeri in questione abbiano la prima cifra diversa da 0. Trattiamo questo caso.
Nel sacchetto A si trovano 180 numeri : 90000 sono i numeri di cinque cifre e di questi i multipli di 500 sono 180.
Le cifre dei numeri del sacchetto B, per la condizione della somma, sono : 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.
Con una sola cifra $\neq 0$ c'è soltanto il 70000.
Con due cifre $\neq 0$ ce ne sono $6 \cdot 4 = 24$, infatti fissata la prima cifra (presa tra 6, 5, 4, 3, 2, 1) la seconda resta individuata univocamente e può occupare uno qualsiasi dei quattro posti a disposizione, ad esempio : la prima cifra sia 5, allora la seconda è 2 e i numeri che ottengo sono 52000, 50200, 50020, 50002. (Osserva che puoi scambiare 2 con 5 …)
Con tre cifre $\neq 0$ quelle a disposizione risultano 5, 4, 3, 2, 1 e i numeri che posso costruire sono $15 \cdot 6 = 90$, infatti 15 sono i numeri di tre cifre $\neq 0$ con somma 7 :
prima cifra 5, allora le altre due sono (1, 1) che posso disporre su quattro posti, in totale 6 numeri (51100, 51010, 51001 ; 50011, 50101, 50110) ;
prima cifra 4, allora le altre due sono (1, 2) ancora due oggetti da disporre su quattro posti ma ora trattasi di oggetti distinti e quindi $2 \cdot 6$ numeri totali ;
prima cifra 3, allora le altre due possono essere (1, 3) e (2, 2) : nel primo caso ancora $2 \cdot 6$ numeri, nel secondo 6 : in totale $3 \cdot 6$ numeri ;
prima cifra 2, allora le altre possono essere (1, 4) e (2, 3) : ogni uno conta $2 \cdot 6$: in totale $4 \cdot 6$ numeri ;
prima cifra 1, allora le altre due possono essere (1, 5) , (2, 4) , (3, 3) : due casi distinguibili e quindi $4 \cdot 6$ numeri, un caso indistinguibile $1 \cdot 6$ numeri : in totale $5 \cdot 6$ numeri.
Quindi $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 6 = 90$ numeri.
Nel sacchetto B ci sono perciò $1 + 24 + 90 = 115$ numeri .
Conviene pescare dal sacchetto B.

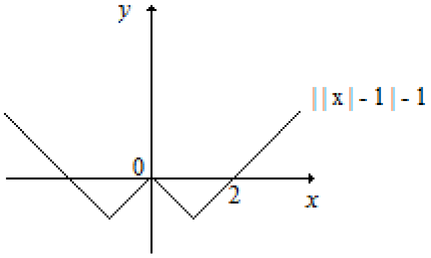
Osservazione : se considerassimo la possibilità di avere come prima cifra lo 0 dovremmo rifare i calcoli : 200 i numeri presenti in A, 215 i numeri presenti in B.
In tal caso converrebbe pescare dal sacchetto A.

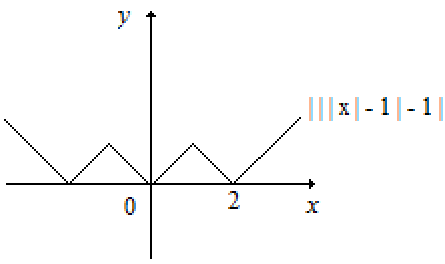
2.- Costruiamo successivamente i grafici delle funzioni

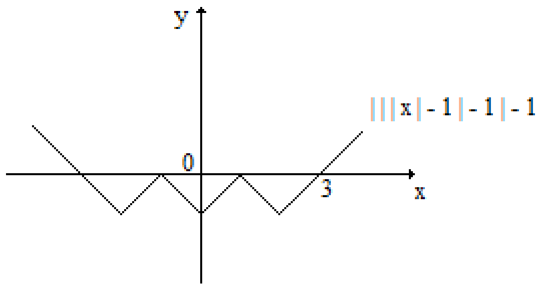


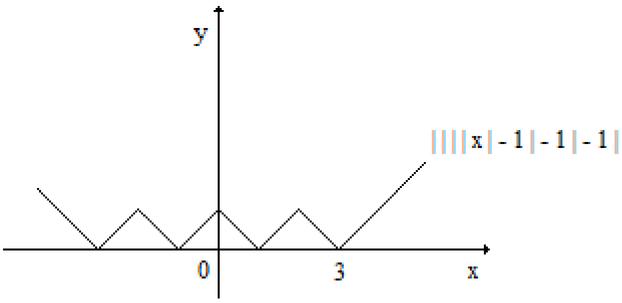








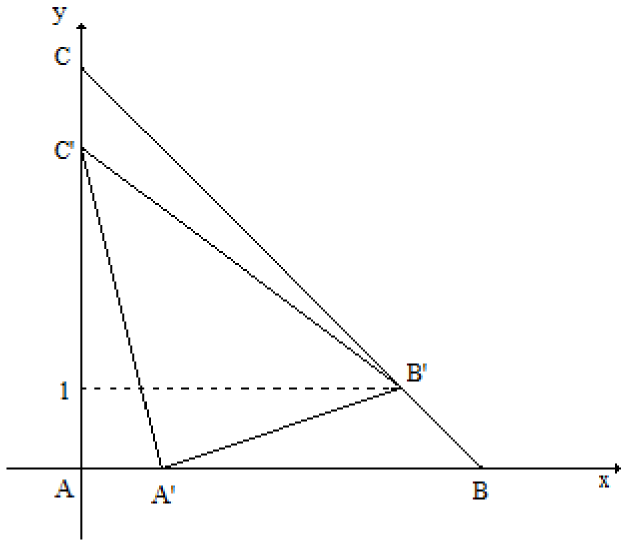




La disequazione si risolve facilmente con l'aiuto del grafico finale e risulta :

$$-4 \leq x \leq 4 .$$

3.-



Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane, come in figura, prendendo AA' come unità di misura.

Risulta allora : A'(1, 0) ; B'(n – 1, 1) ; C'(0, n – 1).

I coefficienti angolari delle rette A'B' e A'C' risultano perciò :

$$m_{A'B'} = \frac{1}{n-2} \qquad m^*_{A'C'} = 1 - n$$

la condizione di perpendicolarità impone $m \cdot m^* = \frac{1-n}{n-2} = -1$ falsa per qualsiasi valore di n.

La risposta è no.

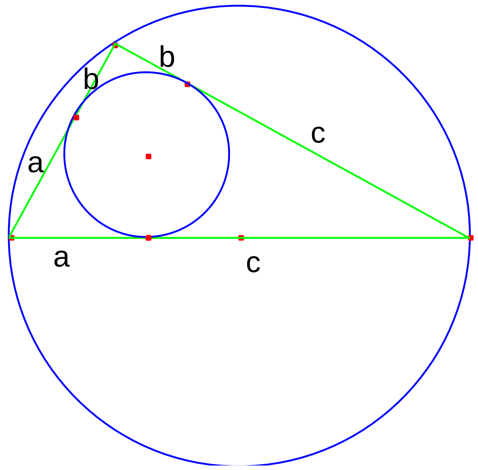
4.- Poiché 3^{2n} è dispari e 2^{2n} è pari ne consegue che $3^{2n} - 2^{2n}$ è dispari. Allora basta provare che tale numero è divisibile per 5.

Riscriviamo : $3^{2n} - 2^{2n} = (3^n)^2 - (2^n)^2 = (3^n - 2^n)\cdot(3^n + 2^n)$.

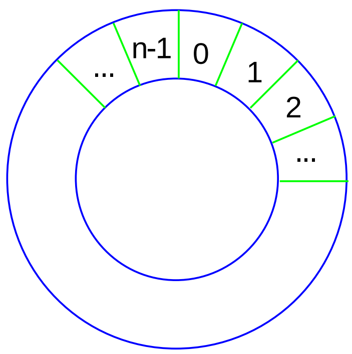
Se n è dispari vale : $3^n + 2^n = (3 + 2)\cdot(3^{n-1} - 3^{n-2}\cdot 2 + \dots \dots)$ e l'affermazione è vera;

se n è pari vale : $n = 2k$ e $3^n - 2^n$ diventa $3^{2k} - 2^{2k}$ e si riapplica quanto già visto concludendo dopo al più $\lfloor \log_2 n \rfloor$ passi.

5.- La figura risolve il problema :



6.- Numeriamo le caselle da 0 a n – 1 :



Siano *s* i salti successivi di *x* posti, perciò : 0→ *x* → *2x* → … → ***sx*** è l'arrivo se non si è compiuto un giro, oppure si arriva in ***sx* – *n*** se compiuto 1 giro, oppure in ***sx* – *2n*** se compiuti 2 giri , … e così via .
Se la casella 1 (prima o dopo) viene raggiunta dovrà essere 1 = ***s·x* – *r·n*** per qualche ***s* , *r*** :
in questo caso ***x*** ed ***n*** non hanno fattori primi comuni, cioè il loro MCD è 1.
Viceversa, sia MCD(x, n) =1 e supponiamo che s salti ed s' salti (con s > s') portino sulla stessa casella, allora ***s·x* – *r·n*** = ***s'·x* – *r'·n*** cioè ***(s – s')·x*** = ***(r – r')·n*** e poiché, come abbiamo supposto, MCD(x, n) =1 , n è divisore di s – s' , in particolare s ≥ n + s'.
Ma allora i primi n salti portano a caselle tutte diverse (l'n-esimo a quella di partenza).

7.- Quando compare lo stesso numero, i contachilometri segnano :

0	0	A	B	C	D	
			A	B	C	D

e dunque A = B = C = D.
Per la prima volta (dopo la partenza) ciò avviene quando tutte le cifre sono uguali a 1 e quindi gli ettometri percorsi sono 11111, cioè 1111 km + 1 hm .

8.- Le due situazioni estreme si hanno :

A) quando tutti gli abbonati al telefono sono anche abbonati alla TV:
in questo caso $N_2 = 68$ è massimo, $N_1 = 72 - 68 = 4$ è minimo, $N_0 = 100 - 72 = 28$ è massimo;

B) quando tutti i non abbonati al telefono sono abbonati alla TV :
in questo caso $N_2 = 72 + 68 - 100 = 40$ è minimo, $N_1 = 100 - 72 + 100 - 68 = 60$ è massimo, $N_0 = 0$ è minimo.

In definitiva : $40 \leq N_2 \leq 68$; $4 \leq N_1 \leq 60$; $0 \leq N_0 \leq 28$.