VI[a] GARA MATEMATICA " CITTÀ DI PADOVA "
23 MARZO 1991

SOLUZIONI

1.- $0 < \frac{3a+1}{2} < 2 \quad \rightarrow \quad 0 < 3a + 1 < 4 \quad \rightarrow \quad -1 < 3a < 3 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{3} < a < 1.$
$-1 < 1 - b < 2 \rightarrow -2 < -b < 1 \rightarrow -1 < b < 2$.

$$\begin{matrix} -\frac{1}{3} < a < 1 \\ -1 < b < 2 \end{matrix} \rightarrow -\frac{4}{3} < a + b < 3$$ e, a fortiori, $-4 < a + b < 5$.

Dunque l'implicazione è vera.

2.- Un numero naturale *m* che divida due numeri naturali *a*, *b* divide anche la loro differenza :
se $a = ma'$, $b = mb'$ allora $a - b = m(a' - b')$.
Se *b* e *a* sono consecutivi l'unico fattore comune è dunque il numero 1.
Prendiamo ora un numero dispari *d* e il dispari successivo $d + 2$:
per quanto detto un loro fattore comune divide anche il numero 2; ma il 2 non è fattore di *d* poiché esso è dispari, dunque l'unico fattore comune è il numero 1.
A fortiori tre numeri dispari consecutivi hanno solo il numero 1 come fattore comune.

3.- Posso scegliere il presidente in 20 modi diversi, fatto ciò il vicepresidente in 19 modi diversi, quindi il segretario in 18 modi diversi : la terna presidente, vicepresidente, segretario in $20 \cdot 19 \cdot 18$ modi diversi.
Fatto ciò, posso scegliere il presidente del collegio sindacale in 17 modi diversi e i 5 consiglieri possono allora essere costituiti da uno qualunque degli insiemi di 5 persone scelte tra le sedici rimaste : $\binom{16}{5}$ possibilità.
In modo analogo per i due sindaci abbiamo : $\binom{11}{2}$ possibilità e per i due sindaci supplenti abbiamo $\binom{9}{2}$ possibilità.
In totale : $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \binom{16}{5} \cdot \binom{11}{2} \cdot \binom{9}{2}$.

[approssimando 1.005663859 E 12]

4.- Il logaritmo in base b è definito soltanto per b positivo diverso da 1. Dunque affinché sia definita l'espressione dovrà essere $x > 0$ e $x \neq 1$.

Il teorema del cambiamento di base afferma che : $\log_b c \cdot \log_c d = \log_b d$ e da qui

$$2\log_x(x+1) \cdot 3\log_{x+1}(x+1) \cdot 4\log_{x+2}(x+3) \cdot 5\log_{x+3}(2) = 120$$

Semplificando : $\log_x 2 = 1 \rightarrow x^1 = 2 \rightarrow x = 2$ che risulta accettabile.

5.- Supponiamo dapprima che a, b, c siano tutti strettamente positivi.

La terna $a + n, b + n, c + n$ sarà pitagorica se : $(a + n)^2 + (b + n)^2 = (c + n)^2$.

Sviluppando : $a^2 + 2an + n^2 + b^2 + 2bn + n^2 = c^2 + 2cn + n^2$ cioè, semplificando,

$2an + 2bn + n^2 = 2cn$ poiché a, b, c costituiscono una terna pitagorica.

Questa uguaglianza vale solo per $n = 0$, infatti $a + b > c$ e quindi $2an + 2bn > 2cn$.

La terna in questione non può essere pitagorica per nessun $n > 0$.

Sappiamo che a, b, c sono le misure dei lati di un triangolo (rettangolo) essi soddisfano perciò le disuguaglianze triangolari : $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$ così per ogni $n > 0$ valgono :

$a + n + b + n > c + n$

$a + n + c + n > b + n$

$b + n + c + n > a + n$

La terna $a + n, b + n, c + n$ soddisfa le disuguaglianze triangolari e può esprimere perciò le misure dei lati di un triangolo ***T***.

Per le considerazioni svolte in precedenza risulta sempre (quando $n > 0$) :

$(a + n)^2 + (b + n)^2 > (c + n)^2$

ma allora il lato $c + n$ del triangolo ***T*** risulta minore della ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti $a + n, b + n$ e ne consegue che nel triangolo ***T*** l'angolo opposto al lato $c + n$ è acuto e inoltre poiché $c + n$ è il lato maggiore tutti gli angoli interni di ***T*** sono acuti.

Se $a = 0$ allora $b = c$ e per ogni $n > 0$:

$n^2 + (b + n)^2 > (c + n)^2$

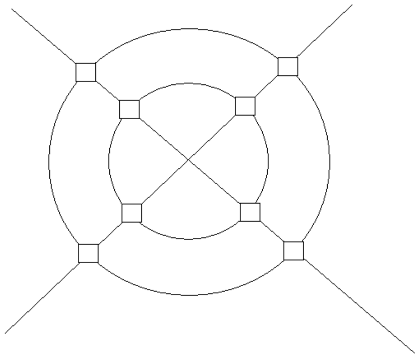
$n + b + n > c + n$

$n + c + n > b + n$

$b + n + c + n > n$

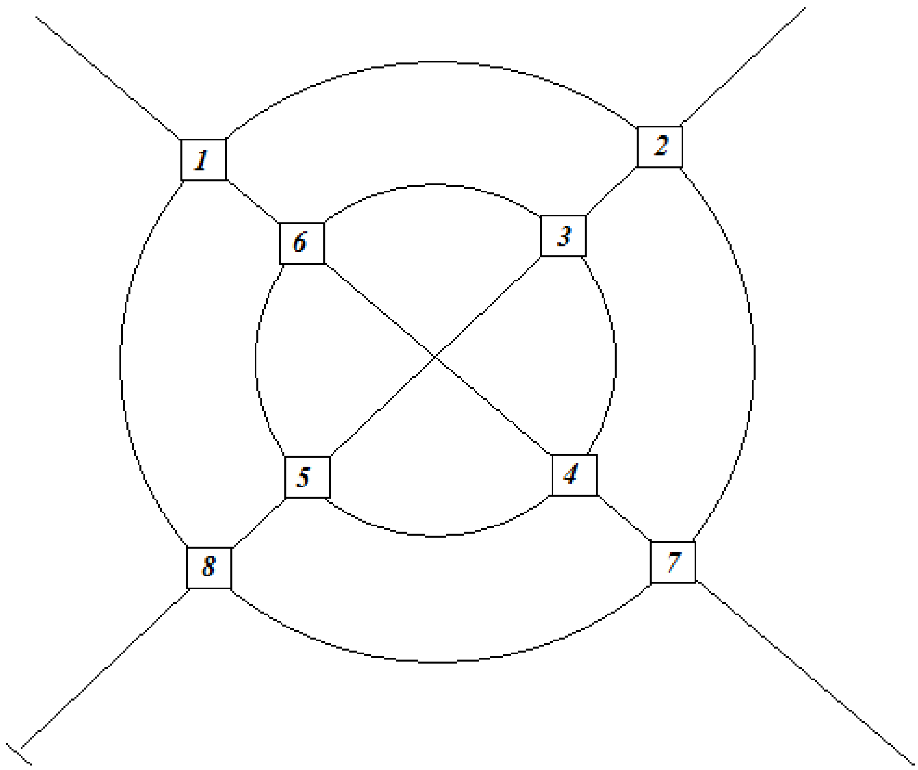
e possiamo ripetere le conclusioni già tratte in precedenza.

6.- La ruota



I° parte

Si può comporre per esempio nella seguente ruota magica :



con costante magica $k = 18$.

II° parte

Se a ciascuno degli otto numeri si aggiunge uno stesso numero intero h si determina un'altra soluzione di costante magica $k^* = 18 + 4 \cdot h$.

D'altra parte la somma di otto numeri interi consecutivi vale :

$(h + 1) + (h + 2) + \ldots + (h + 7) + (h + 8) = 36 + 8 \cdot h$

la cui metà è proprio $18 + 4 \cdot h$.

Ne consegue :

1) ogni insieme di otto numeri interi consecutivi si può sistemare in modo da rendere magica la ruota;
2) le costanti magiche relative sono del tipo $18 + 4 \cdot h$, con h intero (non tutti i numeri possono fare da costanti magiche, per esempio non 20 …).

III° parte

Osserviamo ora che, a partire dalla soluzione trovata, ruotando rigidamente la ruota o scambiando radialmente i circoli si ottengono altre 7 soluzioni..

Possiamo contare le soluzioni che hanno il numero 1 in alto a sinistra e poi moltiplicare per 8 : nella posizione simmetrica rispetto al centro non possiamo inserire i numeri 2, 3, 5 poiché $18 = 1 + 2 + x + y$ implica $x = 7$, $y = 8$ o viceversa, e questi non possono stare contemporaneamente sul diametro (passante per 1) e sul cerchio esterno. Analogamente per i numeri 3, 5.

Se invece come simmetrico di 1 poniamo 4, oppure 6, oppure 7 troviamo delle soluzioni per esempio 1, 7 e allora ho le coppie 6, 4 oppure 8, 2 che posso disporre o sul cerchio esterno o sul diametro (passante per 1).

Fatta questa scelta si ottengono ancora 8 diverse soluzioni scambiando 2 con 8, oppure 4 con 6, oppure 3 con 5.

Se infine il simmetrico di 1 è 8 possiamo comporre le ruote in 3 modi :

I° ruota	1 – 8 – 2 – 7	1 – 8 – 3 – 6	1 – 8 – 4 – 5
II° ruota	3 – 4 – 5 – 6	2 – 4 – 5 – 7	2 – 3 – 6 – 7

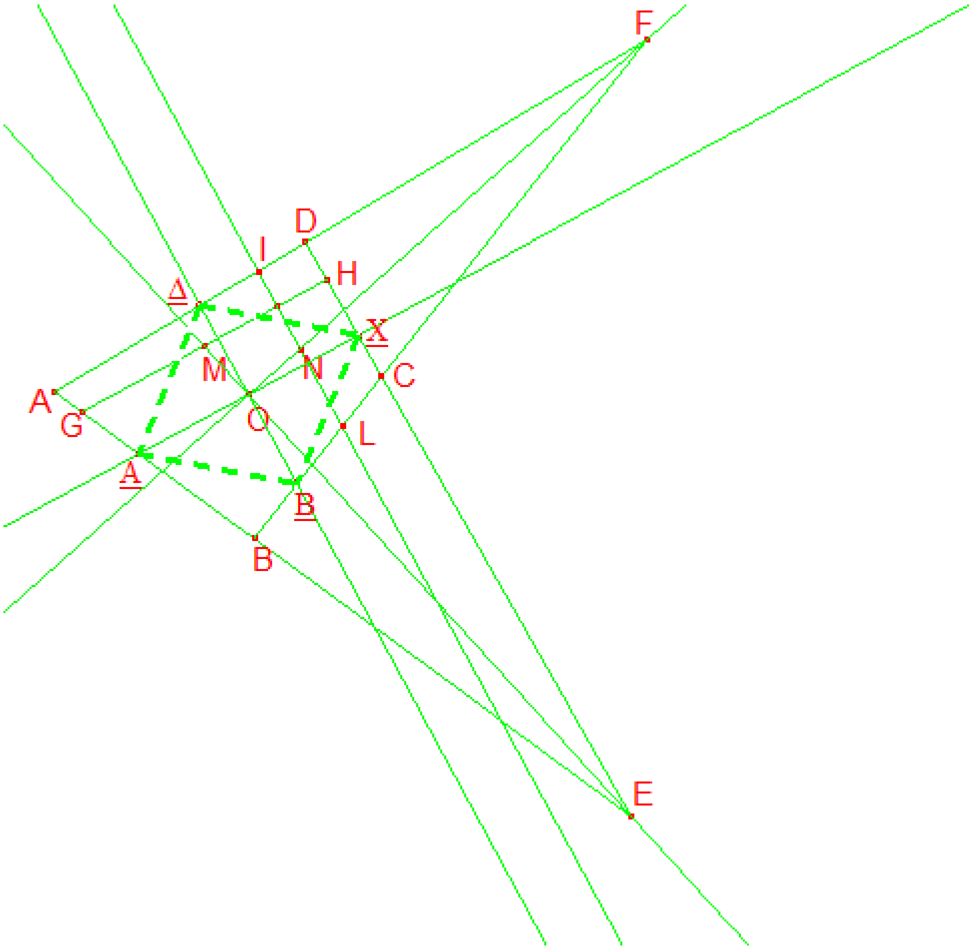
e per ciascuna di queste composizioni si trovano le 16 varianti precedenti.

In totale con 1 in alto a sinistra :

16 sol. (1 – 7) + 16 sol. (1 – 4) + 16 sol. (1 – 6) + $3 \cdot 16$ sol. (1 – 8) = $6 \cdot 16 = 96$

quindi in tutto $8 \cdot 96 = 768$ soluzioni.

7.- Dato il quadrilatero ABCD se ne prolunghino i lati opposti fino ai punti di incontro E, F .
Si tracci il segmento GH congiungente due punti arbitrari scelti su AB e CD rispettivamente e sia M il punto medio di GH.
Si tracci una perpendicolare a GH che intersechi i due lati AD e BC nei punti I e L rispettivamente e sia N il punto medio di IL.
Le rette EM e FN si intersecano nel punto O:



La retta per O parallela a GH interseca AB e DC nei punti : $\underline{A}$, $\underline{X}$.
La retta per O parallela a IL interseca BC e AD nei punti : $\underline{B}$, $\underline{\Delta}$.
Il quadrilatero $\underline{AB X \Delta}$ è il rombo che risolve il problema.
Poiché la scelta del segmento GH è arbitraria, i rombi "inscritti" nel quadrilatero sono infiniti.

8.- Una "retta" passa per un "punto" fissato (x_0, y_0) del "piano" se e solo se $y_0 = x_0^2 + b\, x_0 + c$ e dunque le equazioni di tali "rette" sono :

$$y = x^2 + bx - x_0^2 - bx_0 + y_0$$

Esse sono quindi infinite (variando con b) e affinché una di queste "rette" passi per un altro "punto" (x_1 , y_1) dovrà valere :

$$y_1 = x_1^2 + bx_1 - x_0^2 - bx_0 + y_0 . \qquad (*)$$

La condizione $x_1 \neq x_0$ determina il valore di b in modo univoco :

$$b = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - x_1 - x_0$$

cosicché la "retta" passante per i due "punti" distinti è unica, mentre se $x_1 = x_0$ e quindi $y_1 \neq y_0$, non esiste alcun b che verifichi la (*) e di conseguenza nessuna "retta" passa per questi due "punti" distinti (non c'è alcuna parabola $y = x^2 + bx + c$ che passi per due punti distinti ma di medesima ascissa!)

Consideriamo due "rette" :
$y = x^2 + bx + c$
$y = x^2 + b^*x + c^*$
un eventuale loro "punto" comune avrà coordinate che soddisfano il sistema della due equazioni e quindi anche l'equazione ottenuta per sottrazione membro a membro :
$0 = (b - b^*)\cdot x + c - c^*$ (**)
se $b \neq b^*$ il sistema ha soluzione unica (ricaviamo x da (**) e lo sostituiamo in una delle due "rette" per ricavarci la corrispondente y);
se $b = b^*$ e $c \neq c^*$ non ci sono soluzioni per la (**) e quindi neppure per il sistema :
la condizione di parallelismo tra "rette" è $b = b^*$.

Dati allora una "retta" $y = x^2 + bx + c$ e un "punto" (x_0, y_0), per esso passa una e una sola "retta" parallela alla "retta" data, precisamente:
$y = x^2 + bx - x_0^2 - bx_0 + y_0$

Conclusione

Nel nostro modello valgono gli assiomi A_1 e A_3 ma non vale l'assioma A_2:
l'assioma A_2 è indipendente dagli altri due.