7^a GARA MATEMATICA
CITTÀ DI PADOVA
14 MARZO 1992

SOLUZIONI

1.- Due numeri interi che abbiano somma e prodotto entrambi pari sono entrambi pari.
In due caselle contigue non ci possono stare quindi due numeri pari :

d	*p*	*d*
	d	

Se c’è un numero pari nella seconda casella, vedo che necessariamente la disposizione degli altri numeri pari è :

	p	
p		*p*
	p	

Se invece c’è un numero pari in una casella d’angolo, nessun pari può occupare una delle caselle mediane e le disposizioni possibili sono :

p		*p*
p		*p*

p		*p*
	p	
p		

p		*p*
	p	
		p

		p
	p	
p		*p*

p		
	p	
p		*p*

Per ciascuna di queste sei possibilità ci sono poi $4 \cdot 3 \cdot 2$ modi di scegliere i numeri 2, 4, 6, 8 da mettere nei posti pari e $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ modi di sistemare i numeri 1, 3, 5, 7, 9 nelle rimanenti caselle.
In totale abbiamo, nel rispetto delle condizioni richieste, $6 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)$ modi distinti di disporre i nove numeri naturali nelle caselle.

2.- *I° parte*

Il numero degli spigoli di una piramide è il doppio del numero *n* degli spigoli della base, con $n \geq 3$.

Il numero degli spigoli di un prisma è il triplo del numero *m* degli spigoli della base, con $m \geq 3$.

Le piramidi richieste sono quelle che hanno il numero degli spigoli divisibile per 3 e almeno uguale a 12.

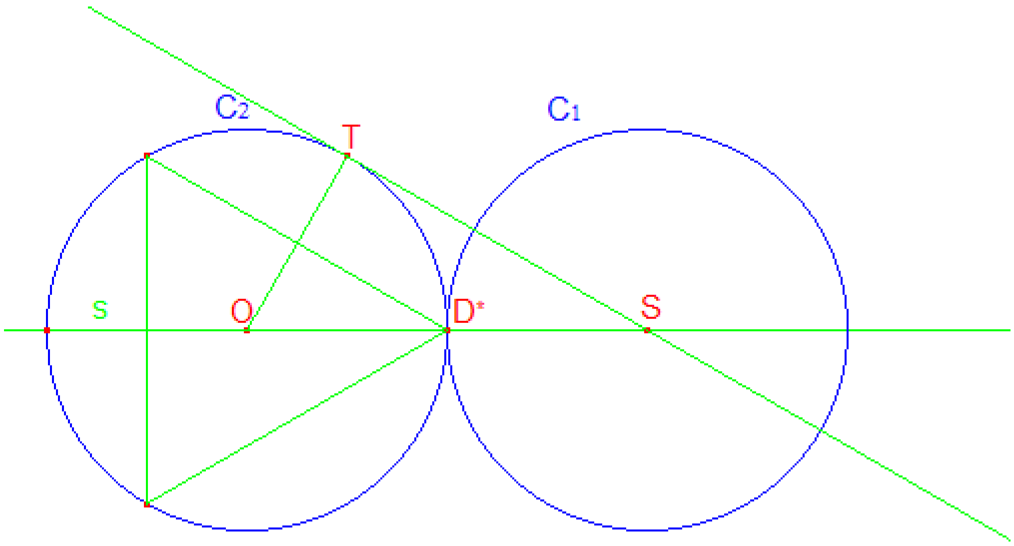
II° parte

I vertici della piramide sono $n + 1$, quelli del prisma $2 \cdot m$ e contemporaneamente $2n = 3m$, perciò :

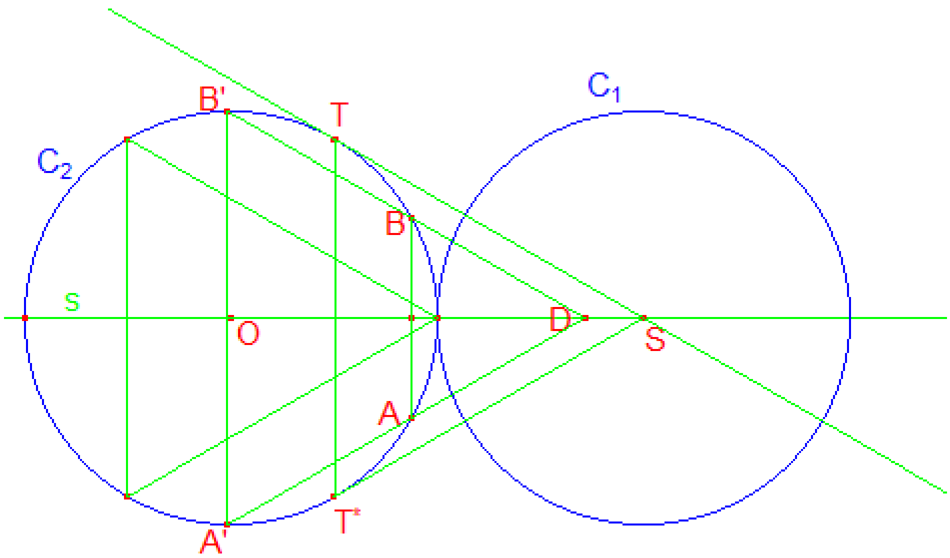
$$\begin{cases} 2n = 3m \\ n + 1 = 2m \end{cases} \rightarrow\ 2(2n - 1) = 3m\ \rightarrow\ m = 2$$

Ma $m \geq 3$ e quindi non esistono siffatte piramidi.

3.- Consideriamo le due circonferenze C_1 , C_2 di raggio *r* e tangenti esternamente in D^* : costruiamo su C_2 il triangolo equilatero inscritto di vertice D^*, tale punto è punto della circonferenza C_1 quindi il luogo non è vuoto;

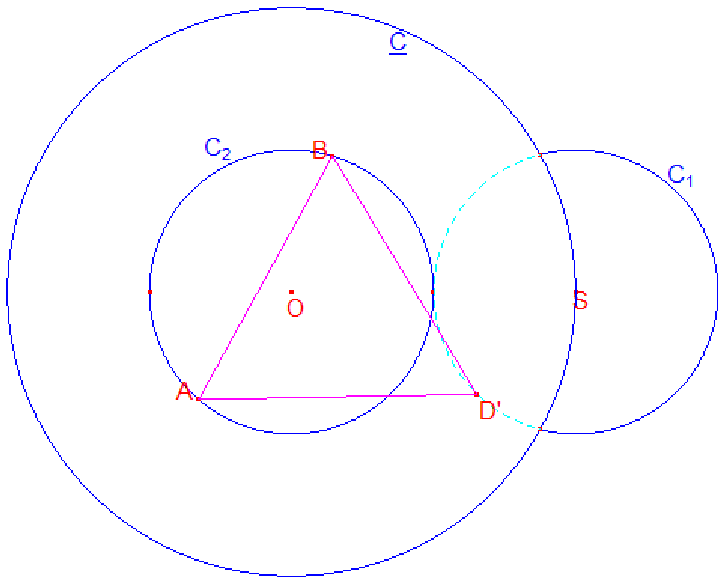


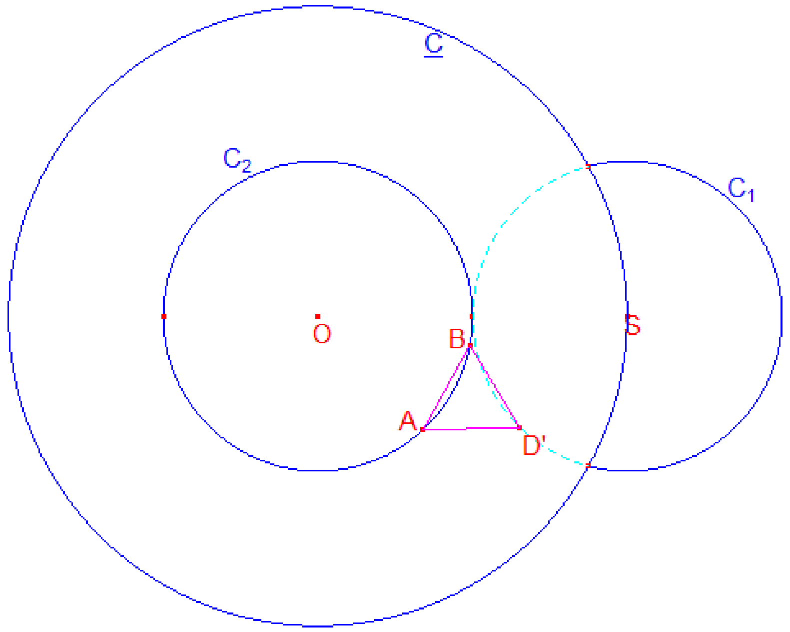
Ora costruiamo un triangolo equilatero che abbia due vertici A e B su C_2 e il terzo vertice D sulla retta *s* asse della corda AB, ovviamente il lato BD risulta parallelo alla tangente TS



Osserviamo che OT = 2OS e se scegliamo nel tratto OS un punto D , le parallele alle tangenti TS e T^*S passanti per D intersecano la circonferenza C_2 in 2+2 punti è possibile quindi costruire due triangoli equilateri aventi due vertici su C_2 e il terzo vertice in D : A’B’D e ABD.

Se D va oltre S, la parallela alla TS passante per D non intersecherà C_2 e il triangolo equilatero non sarà costruibile.
La retta *s* è una qualunque retta per O cosicché i punti D vertici dei triangoli equilateri descrivono il disco $\underline{C}$ di centro O e raggio $2r$, perciò il luogo richiesto è l’arco di C_1 contenuto in tale disco.





Come possiamo osservare dalle figure, se D’ è punto appartenente all’arco di C_1 individuato dalla circonferenza <u>C</u> di centro O e raggio 2r, sono due i triangoli equilateri aventi vertice in D’ e gli altri due vertici sulla circonferenza C_2 .

4.- *I° parte*

Si ha $\left(a\sqrt{2}+b\sqrt{2}\right)^2 = c^2$ cioè $2ab\sqrt{6} = c^2 - 2a^2 - 3b^2$.

Siccome $\sqrt{6}$ è irrazionale, dev’essere $2ab = c^2 - 2a^2 - 3b^2 = 0$ perché altrimenti $\sqrt{6}$ risulterebbe quoziente di due numeri naturali : $c^2 - 2a^2 - 3b^2$ e $2ab$.

Perciò o $a = 0$ o $b = 0$:

se $a = 0$ allora $b\sqrt{3} = c$ e, per lo stesso motivo, $b = c = 0$;

se b = 0 allora $\overline{a\sqrt{2} = c}$ e, ancora, $a = c = 0$.

II° parte

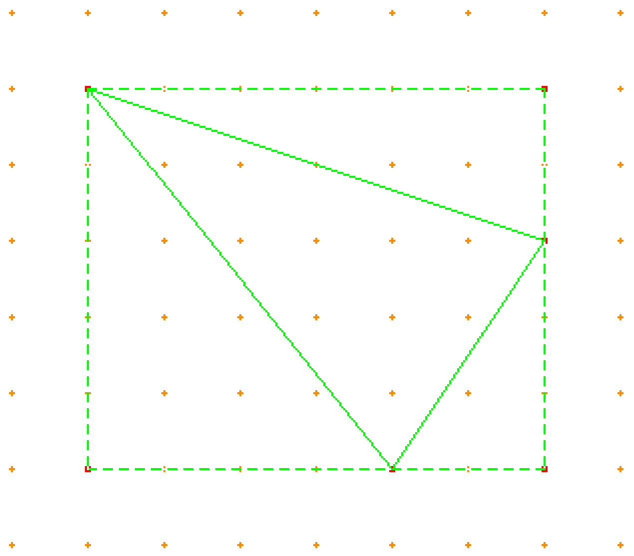
Se Q(a, b) e Q(c, d) sono due punti di coordinate intere appartenenti ad uno stesso circolo di centro $C\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$, le distanze PC e QC sono uguali e vale :

$$\left(a-\sqrt{2}\right)^2 + \left(b-\sqrt{3}\right)^2 = \left(c-\sqrt{2}\right)^2 + \left(d-\sqrt{3}\right)^2$$

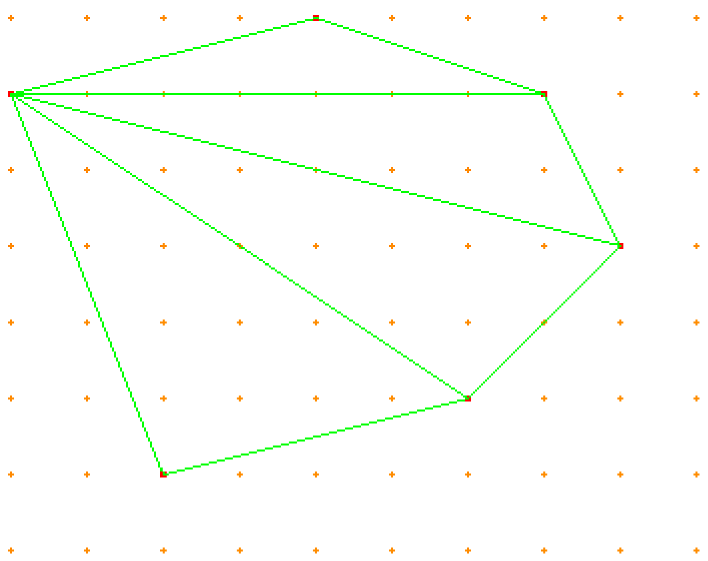
$$2(a-c)\sqrt{2} + 2(b-d)\sqrt{3} = c^2 + d^2 - a^2 - b^2$$

e, per quanto visto nella I° parte, abbiamo $a - c = 0$ e $b - d = 0$ e i due punti coincidono.

5.- Sia dato un <u>triangolo</u> con i vertici a coordinate intere : esso si può sempre "inscrivere" in un rettangolo coi lati paralleli agli assi e vertici interi.



Il dato triangolo si può pensare "*differenza*" tra il rettangolo e (al più) tre triangoli rettangoli con i cateti paralleli agli assi e vertici a coordinate intere :
il rettangolo ha area intera, ciascuno dei triangoli rettangoli ha area intera oppure la metà di un numero intero, si conclude che per i triangoli la proprietà vale.
Per i <u>poligoni</u> con numero di lati superiore a 3 si può osservare che sono unione di triangoli a coordinate intere e quindi si applica quanto già visto.



6.- Detta M la quantità di impurità nel gas di scarico, il primo filtro ne lascia passare :

$$\left(1-\frac{70}{100}\right)M = 0.3M$$

Il secondo :

$$\left(1-\frac{50}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{70}{100}\right)M = 0.15M$$

Il terzo :

$$\left(1-\frac{40}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{50}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{70}{100}\right)M = 0.09M$$

I tre filtri trattengono complessivamente il 91 % delle impurità e il risultato ottenuto è, per la commutatività del prodotto, indipendente dall'ordine sequenziale.
I lati di un triangolo non degenere soddisfano la disuguaglianza triangolare : *il lato maggiore di un triangolo è minore della somma degli altri due*.
Se il primo filtro nel tubo è S, esso trattiene una quantità di impurità pari al 70 %, rimane così il 30 % di impurità, ma allora gli altri due filtri non possono trattenere complessivamente una quantità superiore al 70 %.
Stesso discorso se il primo filtro è C, esso trattiene il 50 %, allora gli altri due complessivamente non possono superare il 50 %.
Se l'ordine è Q, S, C le quantità trattenute sono rispettivamente 40 %, il 70 % del 60 % cioè 42 % e, infine, 9 % : risulta 42 < 40 + 9, perciò tale ordine è possibile.
Anche l'ordine Q, C, S può andar bene, poiché le quantità trattenute risultano rispettivamente 40 %, 50 % del 60 % cioè il 30 % e, infine, il 70 % del 30 % cioè il 21 % : 40 < 30 + 21 .

7.- Ricordiamo che se b, d sono numeri positivi $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se e solo se $ad < bc$ cioè $bc - ad > 0$.
Le due disuguaglianze del primo quesito risultano verificate poiché :

$$7(4\alpha + 3\beta) - 4(7\alpha + 5\beta) = \beta > 0$$

$$3(7\alpha + 5\beta) - 5(4\alpha + 3\beta) = \alpha > 0\ .$$

Cerchiamo ora due interi positivi α, β tali che :

$$\frac{a}{b} = \frac{4\alpha + 3\beta}{7\alpha + 5\beta}$$

Per esempio risolvendo il sistema :

$$\begin{cases} a = 4\alpha + 3\beta \\ b = 7\alpha + 5b \end{cases}$$

Tale sistema ha l'unica soluzione $\alpha = 3b - 5a$, $\beta = 7a - 5b$ con α, β interi perché lo sono a e b, inoltre α > 0, β > 0 .

8.- Il prof. B si avvia sulla strada di casa mezz'ora prima che arrivi a Padova sua moglie A.
Egli incontra l'auto della moglie dopo 25 minuti, così la moglie risparmia 5 minuti di viaggio dal punto di incontro in città.
Nel ritorno risparmia poi altri 5 minuti : quelli della strada da Padova al punto di incontro.
La signora A e il prof. B rientrano a casa 10 minuti prima del solito.