8^a GARA MATEMATICA
CITTÀ DI PADOVA
27 MARZO 1993

SOLUZIONI

1.- Consideriamo gli *ultimi* elementi u_n di ciascuna riga :

se $n > 5$, $u_n = u_{n-1} + n$

$u_5 = 5$, $u_6 = 5 + 6$, $u_7 = 11 + 7$, …… , $u_n = 5 + 6 + 7 + \ldots + n$

$$u_n = \frac{(n+5)(n-4)}{2} = \frac{n^2+n-20}{2} .$$

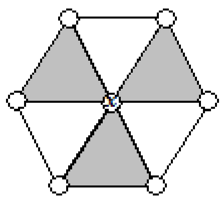
Per i *primi* elementi p_n di ciascuna riga si ha : $p_n = u_n - (n-1)$.

La somma S_n degli n elementi della n-esima riga è :

$$S_n = \frac{(p_n+u_n)\cdot n}{2} = u_n - \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n^3+n^2-20n}{2} - \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

$$S_n = \frac{n^3-19n}{2} \quad .$$

2.- Indicato con x il numero posto al centro dello schema :

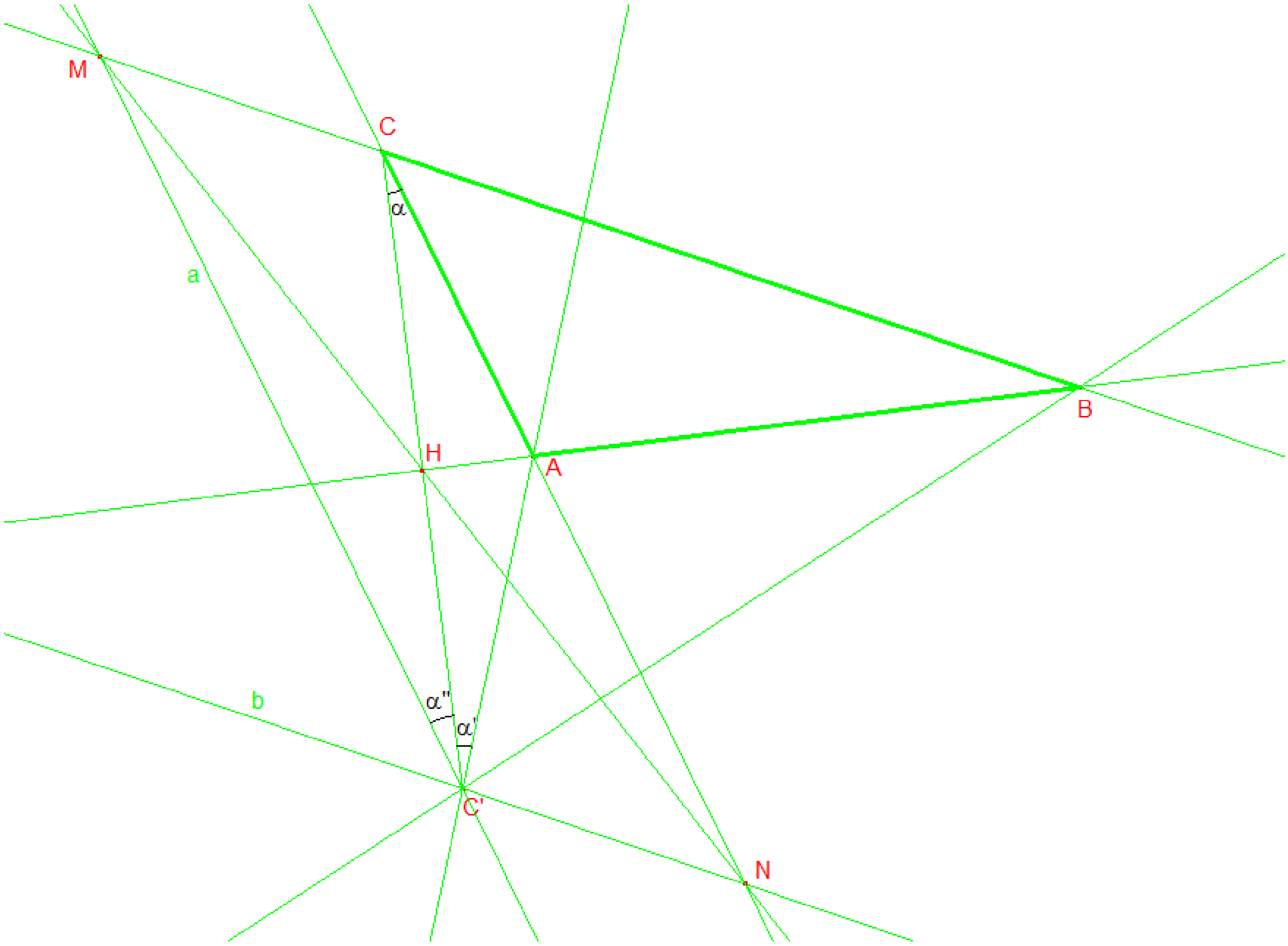


Il numero $1 + 2 + 3 + \ldots + 2x$ deve essere un multiplo di 3 .
Allora x può assumere solo i valori : 1, 4, 7 .
Per esempio sia $x = 7$: in ogni triangolo ombreggiato gli altri due vertici devono dare somma :

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{3} = 7$$

A Ovest si può scegliere arbitrariamente un numero y tra i rimanenti (6 scelte) che "obbliga" la scelta 7 – y a Nord-Ovest.
Ora a Est si può scegliere arbitrariamente un numero z tra i rimanenti (4 scelte) che "obbliga" la scelta 7 – z a Nord-Est.
Gli ultimi numeri si possono disporre in due modi (2 scelte) a Sud-Ovest e Sud-Est.
In totale le possibilità sono $3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 144$.

3.-



Per costruzione AB è asse di CC' quindi $\alpha = \alpha'$.
La retta a è simmetrica di AC' rispetto a CC' quindi $\alpha'' = \alpha' = \alpha$.
Ma α e α'' sono alterni interni e dunque la retta a e il lato AC sono paralleli : $MC' \parallel CN$.
In modo analogo possiamo stabilire il parallelismo tra la retta b e BM : $MC \parallel NC'$.
Per quanto visto il quadrilatero MCNC' è un parallelogramma e le sue diagonali si tagliano scambievolmente a metà in H : le retta AB, MN, CC' passano tutte per H.

4.- Se $P(x^2) + x \cdot Q(x^2) = (x-2) \cdot (x+2) \cdot R(x)$ sostituendo a x prima 2 e poi – 2 si ottiene :
$P(4) + 2 \cdot Q(4) = 0$
$P(4) - 2 \cdot Q(4) = 0$
e sommando membro a membro otteniamo : $2 \cdot P(4) = 0 \rightarrow P(4) = 0$.
Per il teorema del resto, P(x) è divisibile per $x - 4$.

Sottraendo membro a membro otteniamo : $4 \cdot Q(4) = 0 \rightarrow Q(4) = 0$ e le medesime conclusioni

$Q(x)$ è divisibile per $x - 4$.

Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi divisibili per $x - 4$:

$A(x) = (x - 4) \cdot E(x)$
$B(x) = (x - 4) \cdot F(x)$

con $E(x)$, $F(x)$ polinomi non nulli , allora :

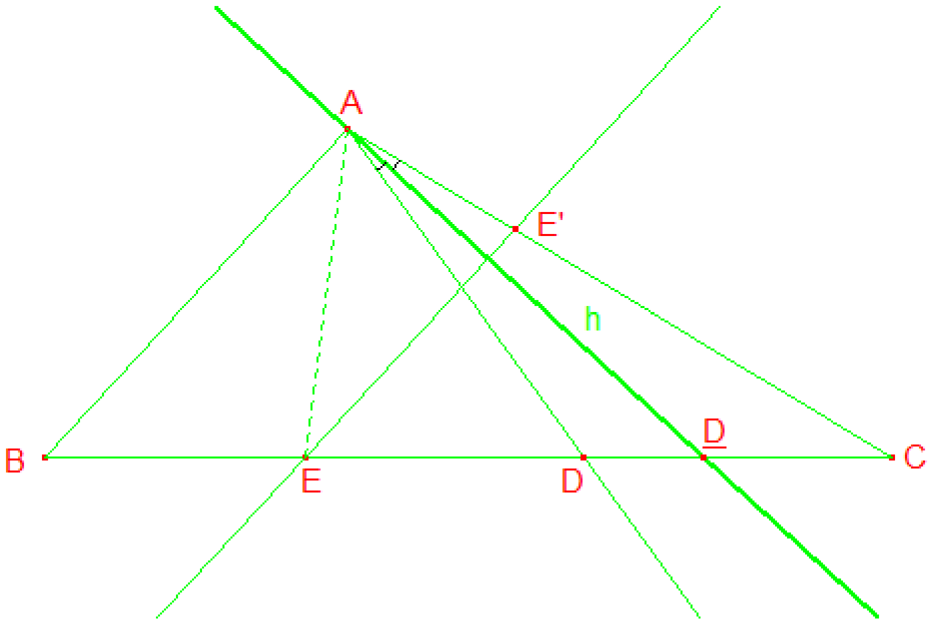
$A(x^2) = (x^2 - 4) \cdot E(x^2)$
$B(x^2) = (x^2 - 4) \cdot F(x^2)$

cosicché :

$A(x^2) + x \cdot B(x^2) = (x^2 - 4) \cdot E(x^2) + x \cdot (x^2 - 4) \cdot F(x^2) = (x^2 - 4) \cdot [E(x^2) + x \cdot F(x^2)]$

perciò la risposta è si con $C(x) = E(x^2) + x \cdot F(x^2)$.

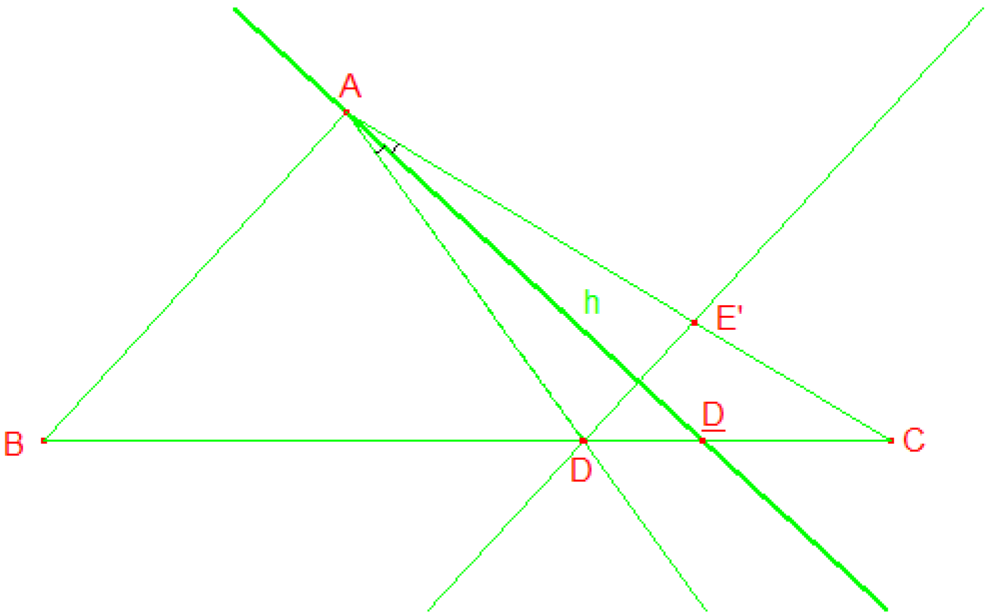
5.-



Consideriamo sul segmento BC un punto E , per esso tracciamo la parallela al lato AB fino ad incontrare AC nel punto E'.
Per il teorema di Talete BE : BC = AE' : AC .
Se fosse AE = AE' , il punto E sarebbe il punto cercato D e l'altezza h del triangolo isoscele AEE' (ossia AED) risulterebbe bisettrice dell'angolo alla base .

Se tracciamo la retta h passante per A e perpendicolare ad AB andiamo ad intersecare il lato

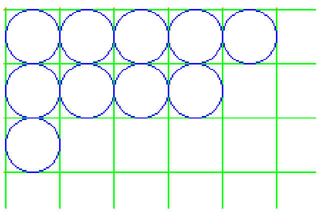
BC nel punto $\underline{D}$, inoltre la retta simmetrica del lato AC rispetto ad h interseca il lato BC nel punto cercato D :



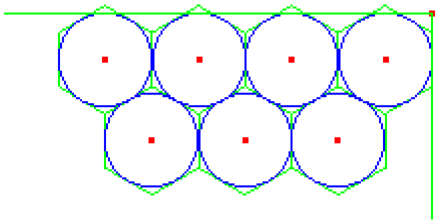
La costruzione mostra che se il triangolo è ottusangolo in A il punto D esiste perché h interseca BC in $\underline{D}$ e quindi la retta simmetrica del lato AC rispetto ad h interseca BC in un punto interno al tratto B$\underline{D}$ del lato BC, mentre se l'angolo in A è acuto h taglia il prolungamento di BC e quindi D risulterebbe esterno.

6.- Consideriamo la somma di due numeri primi dispari consecutivi p + q :
i) poiché sono dispari , la somma è pari : $p + q = 2s$
ora s è la media aritmetica perciò non può essere primo essendo p e q numeri primi successivi;
ii) se $p < q < 100$ allora $p + q < 200$, ma $p + q = 2s$ quindi 2 è fattore della somma e gli altri fattori primi non possono essere tutti maggiori di 7 e cioè almeno uguali a 11 poiché :
$p + q = 2 \cdot 11 \cdot 11 = 242 > 200$.

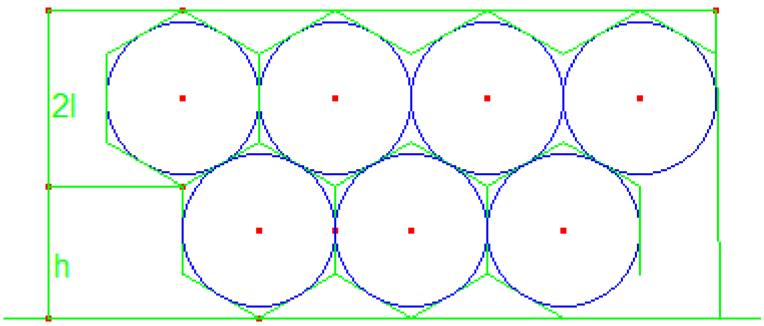
7.- Troviamo una approssimazione di M per difetto : disposti i dischi uno accanto all'altro nello schema a quadrati (a partire dall'angolo in alto a Sx) otteniamo 9 file di 9 dischi ciascuna e



Quindi $9 \cdot 9 = 81$ dischi , così $81 \leq M$.
Una migliore approssimazione si ottiene considerando la disposizione ad esagoni :



Detta anche ad alveare, come illustra la figura dell'angolo superiore Dx:
qui due righe successive contengono 9 + 8 = 17 esagoni circoscritti ai dischi.
La prima riga di esagoni sta in una striscia di altezza uguale a due volte il lato l dell'esagono :



Ma gli esagoni delle varie righe successive si incastrano con quelli della riga immediatamente precedente ed hanno bisogno, per ciascuna riga, di un ulteriore spessore $h = \frac{3}{2}l$.

Nel quadrato ci possono stare n righe di esagoni se :

$2 \cdot l + (n - 1) \cdot h < 18$

Però sappiamo che $l = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, che $h = \frac{3}{2}l = \sqrt{3}$ e che $2l = h + \frac{\sqrt{3}}{3}$ perciò

$nh + \frac{\sqrt{3}}{3} < 18$

Ma $18 : h = 18 : \sqrt{3} = 10, \ldots$ e risulta $18 - 10\sqrt{3} > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Quindi nel quadrato ci stanno 10 righe di esagoni e dunque almeno $5 \cdot 17 = 85$ dischi..

Osserviamo che la superficie totale dei dischi è $\pi \cdot M < 324$ e quindi $M < 103$.

In effetti ciascun disco occupa, nel quadrato, un'area non minore di quella

dell'esagono circoscritto che vale $2\sqrt{3}$ perciò : $2\sqrt{3}M < 324 \rightarrow M < 93$.

8.- *I° parte*

sappiamo che le rette del piano cartesiano non parallele all'asse y sono rappresentate da equazioni del tipo : $y = mx + q$.

Si tratta allora di vedere se esistono valori di m e q tali che se x è razionale il corrispondente valore di $y = mx + q$ non lo sia .

Si vede subito che q non deve essere razionale perché per $x = 0$ abbiamo $y = q$.

Proviamo a scegliere $q = 2$, $m = 1$ ($m \neq 0$, altrimenti la retta risulta parallela all'asse x) :

$y = x + 2$

tale retta non passa per alcun punto di S poiché se a e b sono entrambi razionali lo è anche la loro differenza $b – a$ e non può essere $b = a + 2$ cioè $b – a = 2$.

II° parte

No perché se ciò fosse avremmo:

$$a^2 + b^2 = \pi^2$$

con a e b razionali, ma ciò non può essere perché π^2 non è razionale.