9ª GARA MATEMATICA
CITTÀ DI PADOVA
19 MARZO 1994

SOLUZIONI

1.- Nella prima giornata la squadra B gioca con una delle tre rimanenti (vi sono 3 scelte possibili) e le altre due una contro l'altra.

	1	2	3
I°	B – C	B – D	B – E
	D – E	C – E	C – D

Nel primo caso, nella seconda giornata, la squadra D gioca o con la A o con la C (vi sono due scelte possibili) :

	1	2
II°	D – A	D – C
	C – E	A – E

Analogamente si vede che ci sono solo due scelte possibili (nella seconda giornata) pure se si considera il secondo o il terzo caso della I° giornata.
Nella terza giornata la scelta è in ogni caso obbligata : se, nella seconda giornata, abbiamo optato per la prima soluzione allora giocano D – B, A – E, altrimenti giocano D – A, B – E.
Nella quarta giornata la scelta è di nuovo obbligata; e così pure nella quinta.
In tutto ci sono $3 \cdot 2 = 6$ modi di programmare il calendario del torneo.

2.- La condizione è sufficiente : se $b = -a$, si ha

$$a^3 + (-a)^3 + c^3 = (a - a + c)^3 \quad \rightarrow \quad c^3 = c^3$$

Stesso discorso se $c = -b$ oppure se $a = -c$.

Viceversa se :

$$a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3 = 0$$

si avrà :

$$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) + [\, c - (a + b + c) \,] \cdot [\, c^2 + c \cdot (a + b + c) + (a + b + c)^2 \,] = 0$$

e sviluppando i calcoli :

$$(a + b) \cdot [\, a^2 - ab + b^2 - c^2 - ac - bc - c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \,] = 0$$

$$(a + b) \cdot [\, -3ab - 3ac - 3bc - 3c^2 \,] = 0$$

$$-3 \cdot (a + b) \cdot [\, c \cdot (c + b) + a \cdot (c + b) \,] = 0$$

$$-3 \cdot (a + b) \cdot (b + c) \cdot (a + c) = 0$$

Quest'ultimo prodotto è nullo se e solo se :

o $a + b = 0$, o $b + c = 0$, o $a + c = 0$.

Altra soluzione

Scriviamo x al posto di a e consideriamo l'equazione $(x + b + c)^3 - x^3 - b^3 - c^3 = 0$
avente come soluzioni $x = -b$, $x = -c$.
Ma allora per il teorema del resto :

$$(x + b + c)^3 - x^3 - b^3 - c^3 = (x + b) \cdot (x + c) \cdot k$$

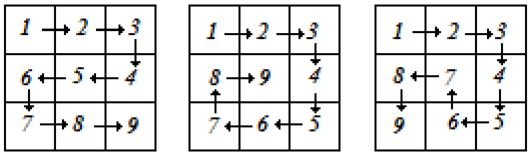
dove k è il coefficiente di x^2 nel polinomio , ossia $3\,(b + c)$ e riscrivendo a al posto di x :

$$a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3 = 3 \cdot (a + b) \cdot (b + c) \cdot (a + c)$$

3.- Mettiamo i segni + , – uno di seguito all'altro e in modo che caselle contigue abbiano segno opposto :

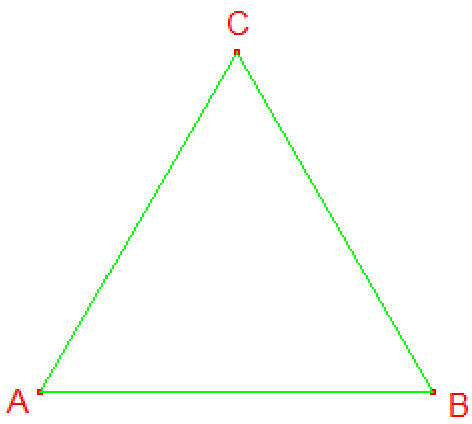
+	–	+
–	+	–
+	–	+

Se mettiamo il numero 1 in una casella col (+), il 2 va in una col (–), il 3 in una col (+) e così via … e dopo 8 cambiamenti troverò il 9 in una casella col (+).
Se mettiamo 1 in una casella col (–), il 2 col (+), il 3 col (–), … , 8 col (+) e basta perché ho finito le caselle col (–). Lo stesso per il 9.
Se il numero 1 occupa il posto centrale (oppure il 9) il percorso è " a spirale " ; mentre se 1 e 9 sono in caselle di vertici opposti , il percorso è " ad esse " ; se sono in caselle di vertici contigui , il percorso risulta " a greca " .

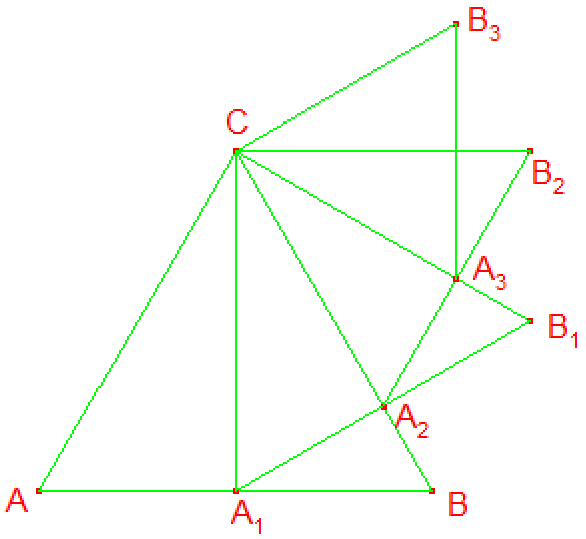


Sono 8 i percorsi “ a esse “ : 4 scelte per 1 e , per ciascuna di queste, 2 scelte del primo lato : orizzontale o verticale .
Sono 16 i percorsi “ a spirale “ : se 1 si trova in una delle caselle d’angolo, abbiamo 4 scelte per 1 e per ognuna di esse 2 scelte del primo lato e poi, per ciascuno di questi, 2 percorsi con versi opposti (uno con 1 all’angolo e 9 al centro, uno con le posizioni invertite : 1 al centro e 9 all’angolo) .
Sono 16 i percorsi “ a greca “ .
In totale 8 + 16 + 16 = 40 .

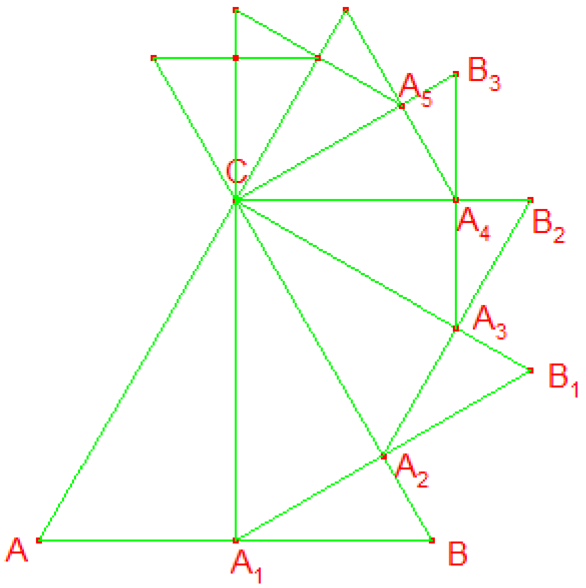
4.- Dato il triangolo equilatero ABC :



Sia CA_1 una sua altezza, costruiamo il triangolo equilatero A_1B_1C in modo che B e B_1 stiano dalla stessa parte rispetto alla retta CA_1 , sia CA_2 una sua altezza e quindi si costruisca il triangolo equilatero A_2B_2C (in modo che B_1 e B_2 stiano dalla stessa parte rispetto alla retta CA_2) :



E proseguendo costruiamo la successione di punti A, A_1, A_2, A_3, … , An, ….



Poiché AB = 2 abbiamo : $AA_1 = 1$, $A_1A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_2A_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, …..

I segmenti che compongono la poligonale costituiscono una progressione geometrica di dodici (perché 360° : 30° = 12) termini e di ragione $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La spezzata misura :

$$\frac{1\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}\right]}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1-\frac{729}{4096}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3367}{4096}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3367}{2048}}{2-\sqrt{3}} \cong \frac{1.644}{0.27} \cong 6.088$$

Per le aree :

Area (ACA_1) = $1 \cdot \sqrt{3}$;

Area (A_1CA_2) = $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}$;

Area (A_2CA_3) = $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}$;

e così via per ognuno dei 12 triangoli.

Otteniamo una progressione geometrica di 12 termini e di ragione $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ poiché il rapporto delle aree di poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine .

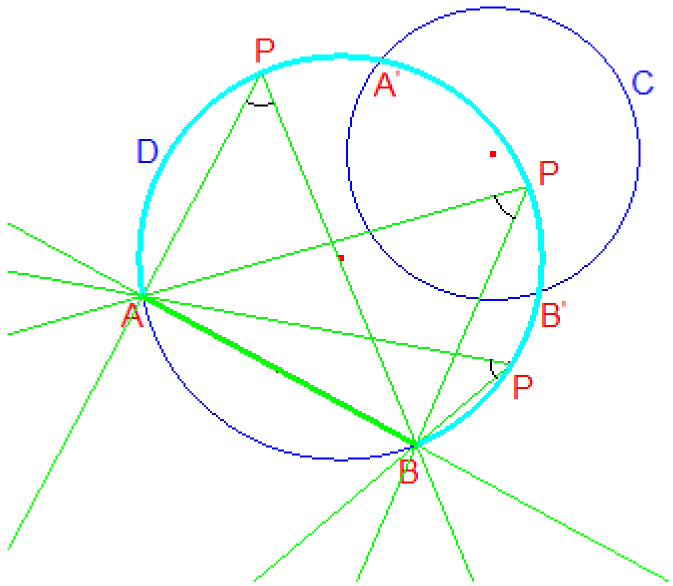
L'area del poligono :

$$\frac{\sqrt{3}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{12}\right]}{1-\frac{3}{4}} = 4 \cdot \sqrt{3}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{12}\right) \cong 6.7$$

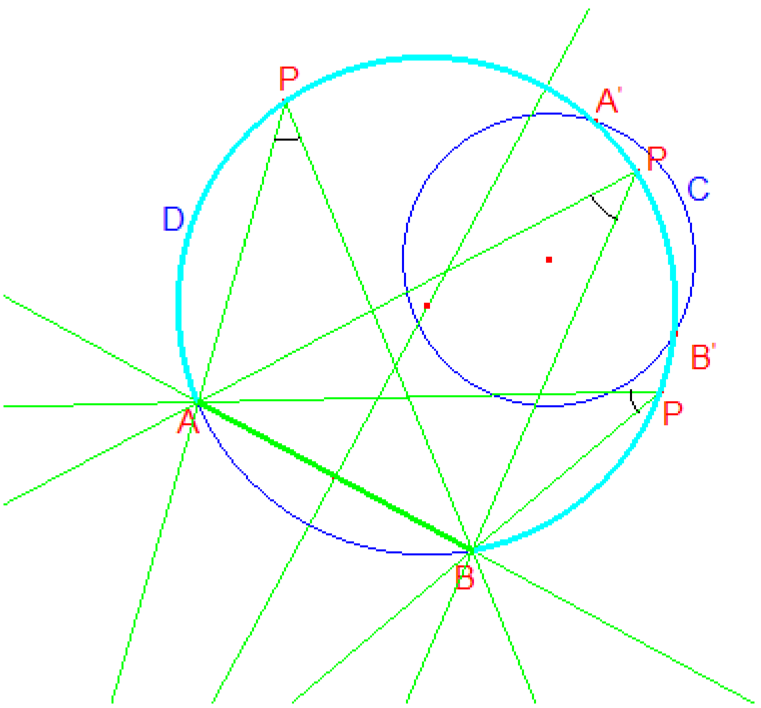
Oss.
ricordiamo che la somma dei primi *n* termini di una progressione geometrica di ragione *q* e di primo termine a_1 vale :

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$$

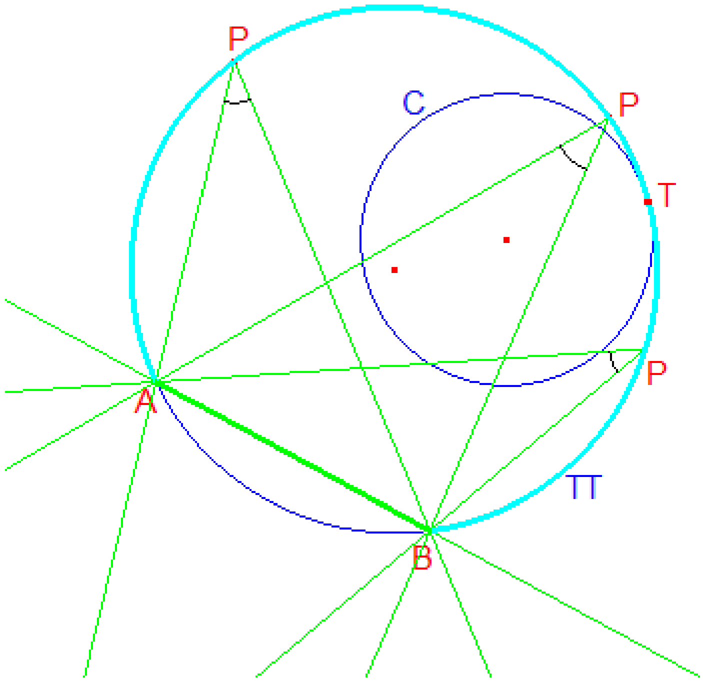
5.- Consideriamo un circolo D per AB e tale da intersecare C in due punti A' e B' .
Per tutti i punti P dell'arco AA'B'B , l'ampiezza dell'angolo APB è la stessa perché insistono sulla stessa corda AB.



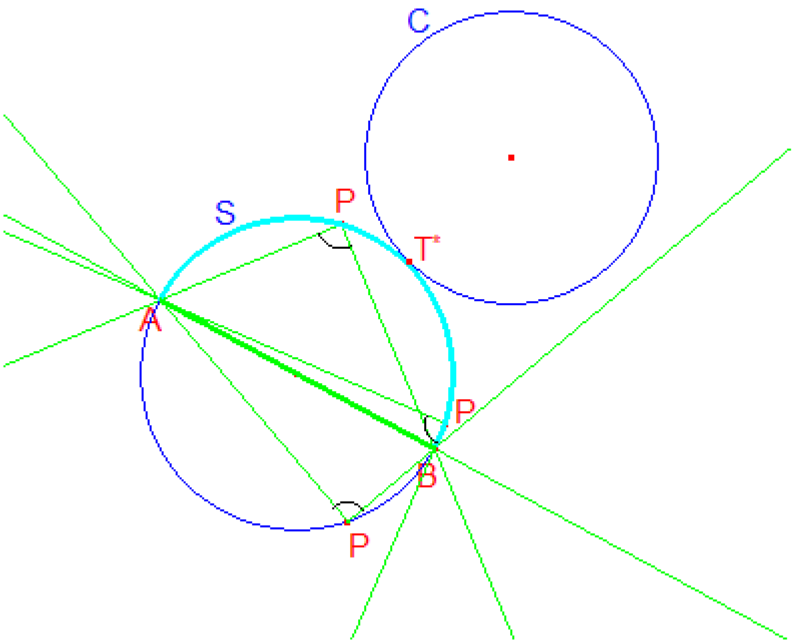
L’ampiezza di APB diminuisce al crescere del raggio del circolo D e, viceversa, cresce al diminuire del raggio :



di conseguenza l’angolo minimo si avrà in corrispondenza del più grande circolo per AB che abbia qualche punto in comune con il circolo C.
Tale circolo, indicato con TT, passa per A, B ed è tangente C nel punto T :



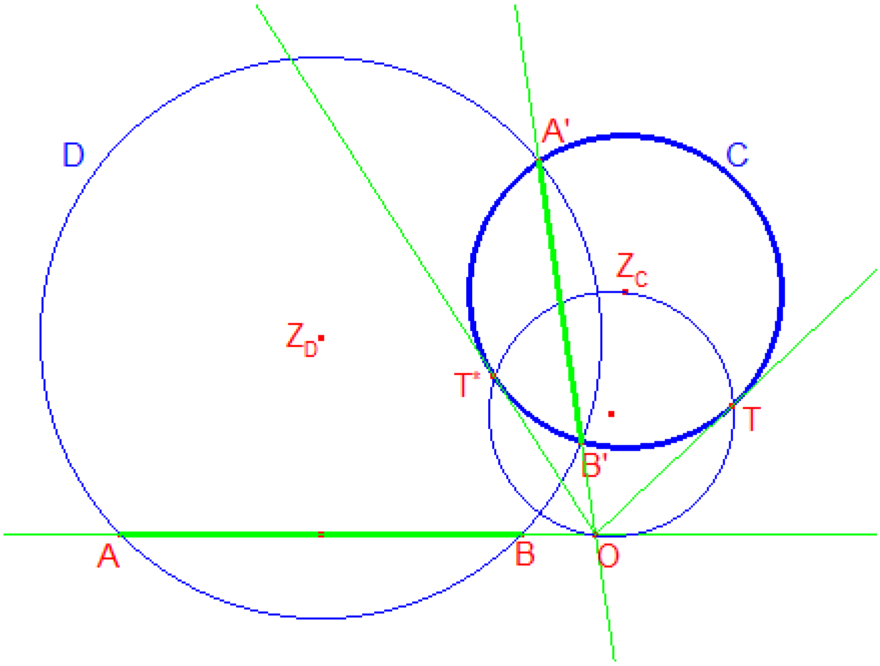
Mentre l'angolo massimo si ha in corrispondenza del più piccolo circolo passante per AB e che incontri C : il circolo S per AB e tangente esternamente C in T^*



Costruzione :

i. dato il circolo C e un segmento AB ad esso esterno, sull'asse di AB scegliamo un punto Z_D centro di un circolo D che interseca C nei punti A' e B';

ii. prolunghiamo i segmenti AB e A'B' in modo che si intersechino in O :



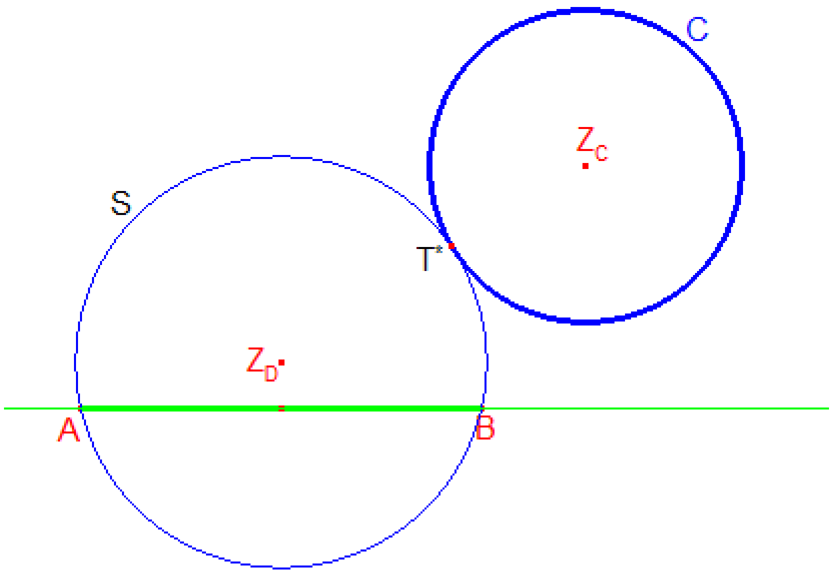
iii. la potenza di O rispetto al circolo C è uguale alla potenza di O rispetto al circolo D :

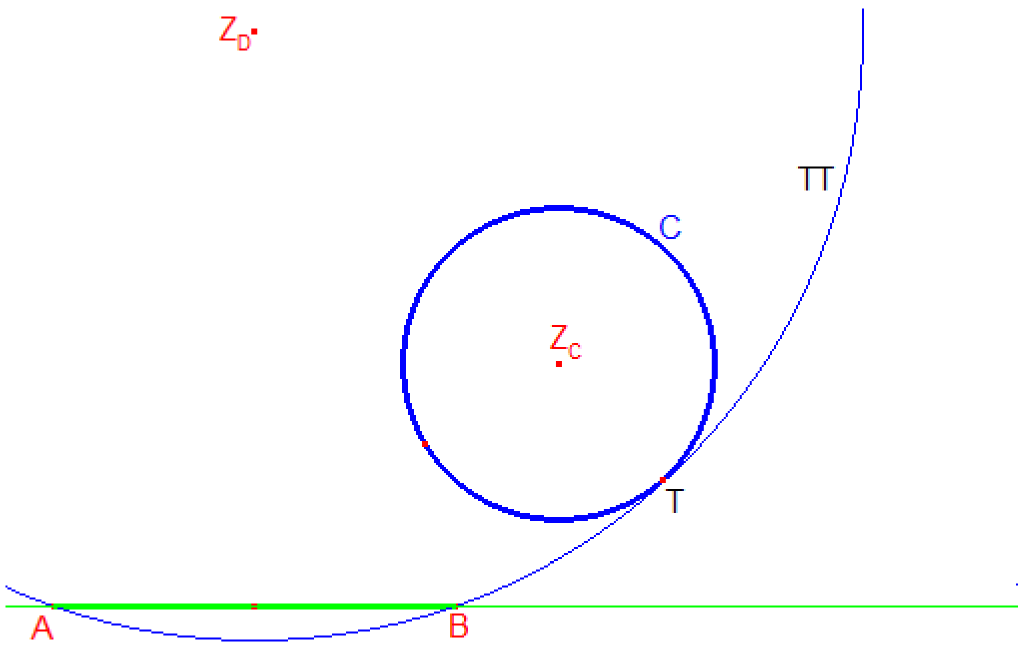
$$p_{C(O)} = OB' \cdot OA' = p_{D(O)}$$

iv. se da O tracciamo le tangenti al circolo C nei punti T e T^* avremo :

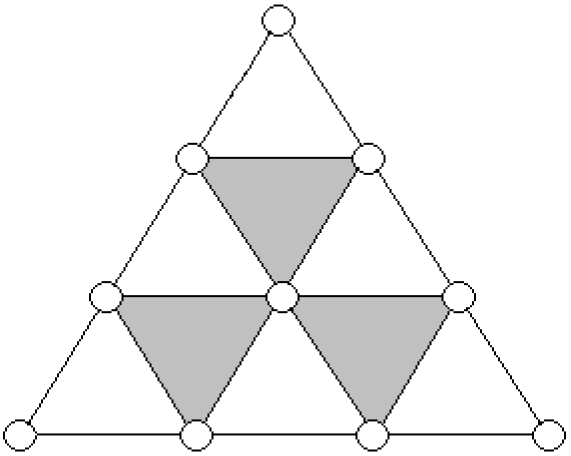
$$p_{C(O)} = OB' \cdot OA' = p_{D(O)} = (OT)^2 = (OT^*)^2$$

v. il circolo per ABT sarà quello che abbiamo chiamato TT, mentre quello per T^* sarà quello che abbiamo chiamato S :





6.- Si possono disporre nelle caselle tutti i numeri naturali da 1 a 10 in 10! modi diversi :
10! = 3628800 .



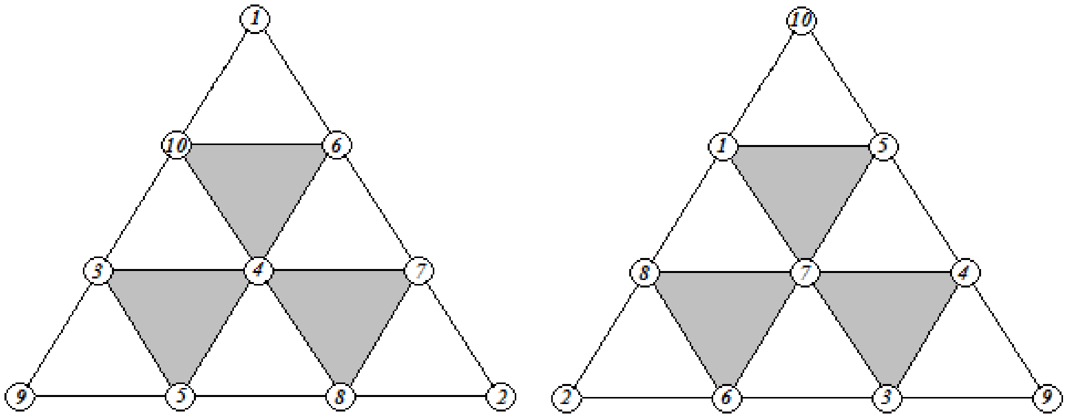
Proviamo a mettere il 5 nella casella centrale : la somma dei numeri che si trovano nelle altre caselle vale
1 + 2 + 3 +4 + 6 +7 + 8 + 9 + 10 = 50
ma questo numero è anche la somma dei tre numeri che stanno ai vertici del triangolino bianco in alto più i tre numeri del triangolino bianco di sinistra, più i tre del triangolino bianco di destra ma allora queste tre somme non possono uguali perché 50 non è divisibile per 3.
Analogamente si vede che nel centro non ci può essere nessuno dei numeri : 2, 3, 6, 8, 9 .
Mettiamo 10 nella casella centrale :

in questo caso i numeri rimanenti danno per somma 45 e quindi la somma k dei numeri presenti nei triangolino dovrebbe essere 15 , ma ciò non è possibile perché per i triangolino aventi un vertice nel centro si dovrebbe avere :

$10 + a + b = 15$ cioè per esempio $a = 1$, $b = 4$; oppure $a = 2$, $b = 3$ e … basta

Con un ragionamento analogo si scarta anche il numero 1 .

Invece se mettiamo 4 al centro risulta $k = 17$ e si trova una possibile sistemazione, lo stesso per 7 al centro e , in questo caso, $k = 16$:



7.- Si sa che nel triangolo di Tartaglia ogni elemento è somma dei due a lui più vicini della riga precedente.

Se indichiamo con

$A , A_1 , A_2 , \dots , A_n = B$

i numeri del segmento considerato e con :

$(*) = C_0 , C_1 , C_2, \dots , C_{n+1} = (*)$

quelli del corrispondente segmento delimitato dai due asterischi e in base alla proprietà ora ricordata si ha :

$C_0 + A = C_1 \;\rightarrow\; A = C_1 - C_0$

$C_1 + A_1 = C_2 \;\rightarrow\; A_1 = C_2 - C_1$

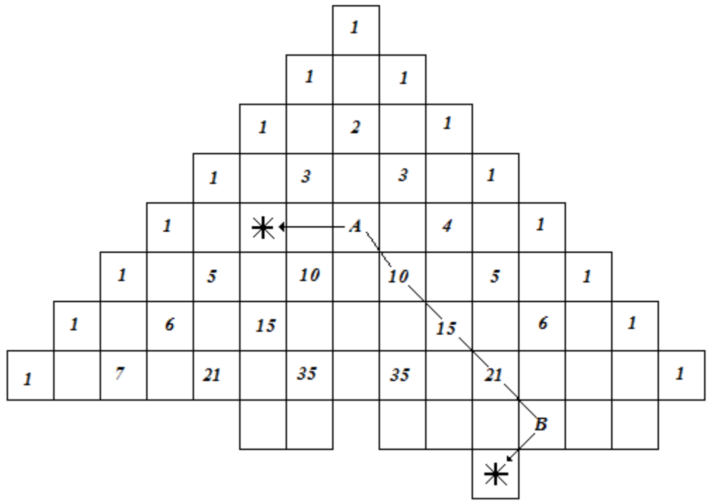
….. ….$\rightarrow$ ………..

$C_{n-1} + A_{n-1} = C_n \;\rightarrow\; A_n = C_n - C_{n-1}$

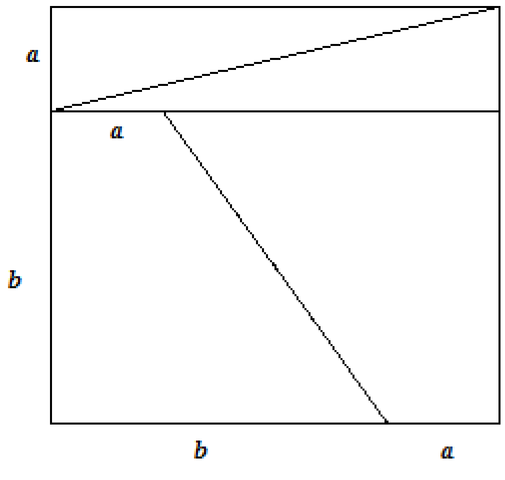
$C_n + A_n = C_{n+1} \;\rightarrow\; A_n = C_{n+1} - C_n$

e sommando membro a membro otteniamo :

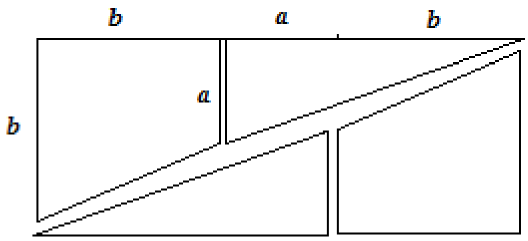
$A + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + B = C_{n+1} - C_0$



8.- Questo problema deriva da un gioco-paradosso [cfr. 1.) I. Ghersi, *Matematica dilettevole e curiosa* , Hoepli ; 2.) M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici (vol. 2)* , Sansoni ; per qualche curiosità storica 3.) M. Gardner, *I misteri della magia matematica* , Sansoni]



Si ritaglia il quadrato ricavando due triangoli e due trapezi che si ridispongono come in figura :



La piccola area "oblunga" sembra nulla ma non lo è . Curioso che se usiamo tre numeri consecutivi della successione di Fibonacci, il quadrato del centrale è diverso di una unità dal prodotto dei due ai suoi lati (alternativamente in più e in meno) , in tal caso l'area "oblunga" risulterebbe una striscia sottile di misura 1 e visivamente ingannevole.
In effetti si ricostruisce un rettangolo se e solo se la pendenza del lato obliquo del trapezio è uguale a quella della ipotenusa del triangolo , cioè :

$$\frac{b+a}{a} = \frac{b}{b-a}$$

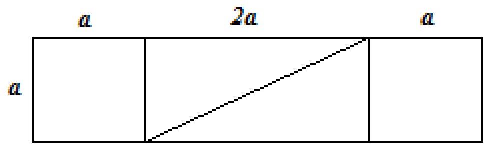
$$b^2 - a^2 - ab = 0$$

$$b = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Osservare la presenza di $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Verifica

le due aree sono eguali quando :
$(2b + a) \cdot b = (a + b)^2 \quad \rightarrow \quad 2b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 - a^2 - ab = 0$;
oltre a questa soluzione c'è il caso banale a = b :
i due trapezi diventano due quadrati e i quattro pezzi si ricompongono così :



Il secondo quesito ha infinite soluzioni, una tra le più semplici è :