10ª GARA MATEMATICA
"CITTÀ DI PADOVA"
25 MARZO 1995

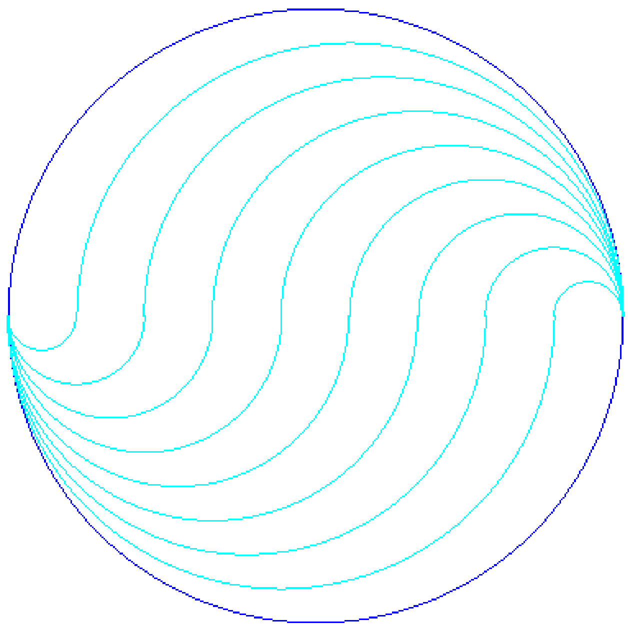
SOLUZIONI

1.- Nella somma 70 + 55 + 40 gli studenti che studiano almeno una lingua contano una volta, quelli che ne studiano almeno due un'altra volta, quelli che ne studiano tre ancora una volta.
Si ha dunque :
$A_1 = 90$, $T = 10$
$70 + 55 + 40 = A_1 + A_2 + T$
$70 + 55 + 40 = 165 = 90 + A_2 + 10$
perciò $A_2 = 65$.

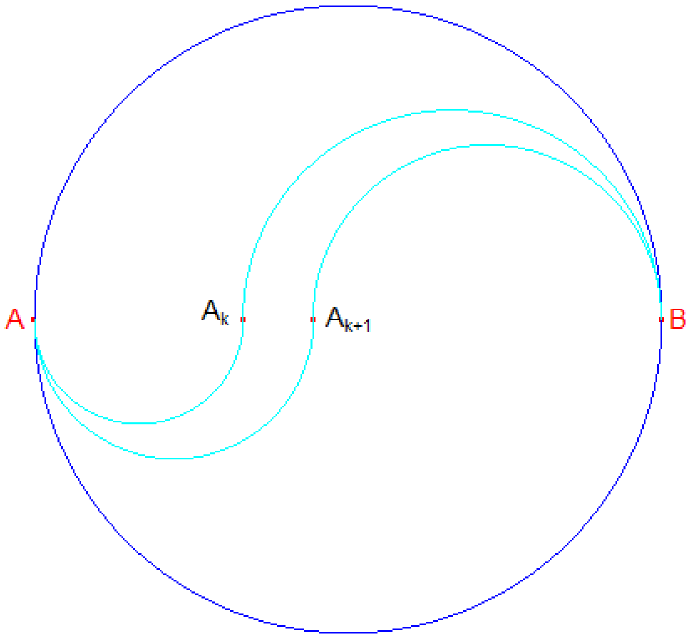
Se S_2 è il numero degli studenti che studiano solo due lingue :
$S_2 = A_2 - T = 65 - 10 = 55$.

Gli studenti che ne studiano una sola sono :
$S_1 = A_1 - A_2 = 90 - 65 = 25$
perciò al massimo 25 dei 55 allievi che studiano il tedesco, studiano solo il tedesco e, dunque, almeno 55 – 25 = 30 allievi studiano anche una delle altre lingue.

2.- Della figura :



Consideriamo una porzione :



Indichiamo con A_0 = A, A_1, A_2 , … , A_n = B i punti che suddividono il diametro A in n parti uguali .
Indichiamo con 2λ la lunghezza dei segmenti A_kA_{k+1} : ciascuno di tali segmenti individua una "striscia ondulata"detta **pelecoide** [dal greco : *dall'aspetto di scure*] il cui perimetro vale come la circonferenza di diametro AB :
$\pi\cdot\lambda\cdot k + \pi\lambda\cdot(k + 1) + \pi\lambda(n - k) + \pi\lambda(n - k - 1) = \pi\lambda(k + k + 1 + n - k + n - k - 1) = 2\pi\lambda n$
che è proprio la lunghezza della circonferenza :

Tutti i perimetri delle "pelecoidi" sono uguali alla lunghezza della circonferenza che li contiene

L'area A della pelecoide è uguale alla somma dell'area della parte inferiore I e dell'area della parte superiore S , ma :
I = semicerchio(diametro AA_{k+1}) – semicerchio(diametro AA_k)
S = semicerchio(diametro A_kB) – semicerchio(diametro $A_{k+1}B$)
e con un po' di algebra :

$$A = \frac{\pi}{2}\lambda^2(k+1)^2 - \frac{\pi}{2}\lambda^2k^2 + \frac{\pi}{2}\lambda^2(n-k)^2 - \frac{\pi}{2}\lambda^2(n-k-1)^2$$

$$A = \frac{\pi}{2}\lambda^2[(k+1)^2 - k^2 + (n-k)^2 - (n-k-1)^2]$$

$$A = \frac{\pi}{2}\lambda^2[(k+1)^2 - k^2 + n^2 - 2kn + k^2 - n^2 + 2n(k+1) - (k+1)^2]$$

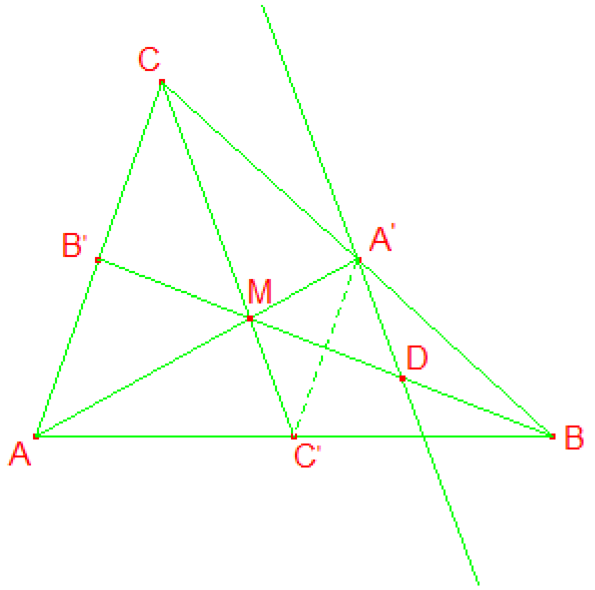
$$A = \frac{\pi}{2}\lambda^2[-2kn + 2kn + 2n] = \pi\lambda^2 n$$

Dunque tutte le pelecoidi hanno la stessa area .

Oss.

Se le pelecoidi hanno medesima area, ciascuna di esse è l' n-esima parte dell'area del cerchio . (modo singolare di dividere un cerchio in n parti uguali)

3.- Tre segmenti sono congrui a lati di un triangolo se e solo se verificano la "disuguaglianza triangolare" : *la somma di due di essi è maggiore del terzo .*
Costruiamo le mediane del triangolo ABC e osserviamo che AB' = A'C' :



Dai triangoli AA'C e BB'C otteniamo :
AA' + A'C > AC
BB' + B'C > BC
e sommando membro a membro :
AA' + A'C + BB' + B'C > AC + BC
e da questa :
AA' + BB' > AC – B'C + BC – A'C = AB' + CA' (*)

Dal triangolo CC'A otteniamo :
CC' < CA' + C'A' = CA' + AB'
quest'ultima relazione unita a (*) dà :
AA' + BB' > AB' + CA' > CC'
cioè una delle disuguaglianze triangolari .
Le altre due si ricavano in modo analogo .

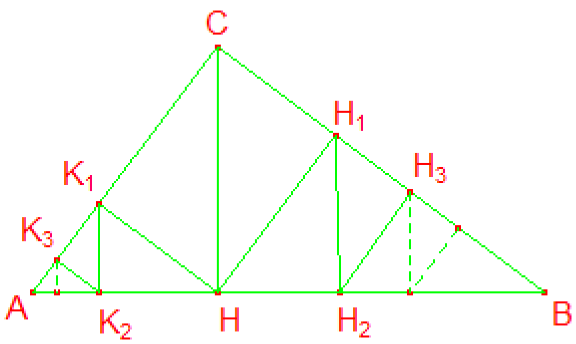
Se due delle mediane, ad esempio AA' e BB' si incontrano nel baricentro M formando un angolo retto, allora M appartiene al circolo di centro C' e diametro AB e risulta perciò MC' = C'B ed il triangolo AMB (rettangolo in M) ha i lati uguali ai 2/3 delle tre mediane :

AM = 2/3 AA' ,
BM = 2/3 BB' ,
AB = 2MC' = 2/3CC' .

Una similitudine di rapporto 3/2 trasforma allora il triangolo AMB in un triangolo rettangolo avente i lati congrui alle tre mediane .

Altra soluzione
Si tracci da A' la parallela a CC' fino ad incontrare BB' nel punto D :
il triangolo MDA' ha i lati uguali alla terza parte delle mediane e gli angoli uguali tra le mediane .
Si trae così risposta sia alla prima che alla seconda domanda .

4.- L'altezza relativa all'ipotenusa divide un triangolo rettangolo in due triangoli rettangoli simili a quello di partenza (e quindi tra loro) .
Nel nostro caso i rapporti di similitudine valgono per uno 3/5, per l'altro 4/5 , che non sono altro che i rapporti tra le rispettive ipotenuse..



Se indichiamo con *h* l'altezza del triangolo ABC , ossia *h* = CH , le altezze dei due triangoli derivati saranno rispettivamente 3/5*h* e 4/5*h* e continuando la suddivisione otterremo triangoli aventi altezze 3/5 e 4/5 di quella del triangolo precedente .

In definitiva le altezze dei triangoli via via ottenuti sono :

$$\left(\frac{4}{5}\right)^r \left(\frac{3}{5}\right)^s h$$

Con r, s = 0, 1, 2 , 3, 4, ….

Ci chiediamo ora se è possibile che due di queste altezze siano una doppia dell'altra :

$$\left(\frac{4}{5}\right)^r \left(\frac{3}{5}\right)^s h = 2\left(\frac{4}{5}\right)^p \left(\frac{3}{5}\right)^q h$$

In definitiva $5^{p+q} \cdot 4^r \cdot 3^s = 5^{r+s} \cdot 2 \cdot 4^p \cdot 3^q$.

Ma vediamo subito che non è possibile poiché a sinistra 2 compare un numero pari di volte come fattore, mentre a destra compare un numero dispari di volte .

5.- Indichiamo con $\underline{n}$ il numero degli italiani e con $\underline{g}$ quello dei giapponesi :
il primo giapponese che arriva dà $\underline{n}$ strette di mano ,
il secondo giapponese dà $\underline{n} + 1$ strette di mano ,
il terzo dà $\underline{n} + 2$ strette di mano ,
……..
l’ultimo giapponese dà $\underline{n} + \underline{g} – 1$ strette di mano .

Si ha quindi che :
$55 = \underline{n} + \underline{n} + 1 + \underline{n} + 2 + \ldots.. + \underline{n} + \underline{g} – 1 = \underline{g} \cdot (2\underline{n} + \underline{g} – 1)/2$

$110 = \underline{g} \cdot (2\underline{n} + \underline{g} – 1)$

Ma allora $\underline{g}$ è uno dei divisori di 110 , ossia 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55 .

Vanno scartati 1 e 2, mentre in corrispondenza degli altri troviamo :

$\underline{g} = 5 \rightarrow 2\underline{n} + \underline{g} – 1 = 22 \rightarrow \underline{n} = 9$

$\underline{g} = 10 \rightarrow 2\underline{n} + \underline{g} – 1 = 11 \rightarrow \underline{n} = 1$ ma si sa che gli italiani sono più di uno ;

D’altra parte quando $\underline{g}$ cresce $\underline{n}$ cala e quindi l’unica soluzione è $\underline{g} = 5$, $\underline{n} = 9$.

6.- Dire che $\log_b a = c$ è equivalente a dire che $b^c = a$.
Possiamo scrivere :

$[\log_x(x+1)]^2 = \log_{x+1} x^8$

Se ricordiamo che $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ avremo :

$$[\log_x(x+1)]^2 = 8\log_{x+1} x = \frac{8}{\log_x(x+1)}$$

E quindi :

$[\log_x(x+1)]^3 = 8$

$\log_x(x+1) = 2$

$x^2 = x + 1$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

La soluzione negativa va scartata e resta unica $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

7.- Consideriamo lo schema :

```
               C
            C  A
         C  A  R
      C  A  R  I
   C  A  R  I  C
C  A  R  I  C  A
A  R  I  C  A
R  I  C  A
I  C  A
C  A
A
```

Che possiamo ruotare in questo modo :

```
          C   C   C   C   C   C
        A   A   A   A   A   A
      R   R   R   R   R   R
    I   I   I   I   I   I
  C   C   C   C   C   C
A   A   A   A   A   A
```

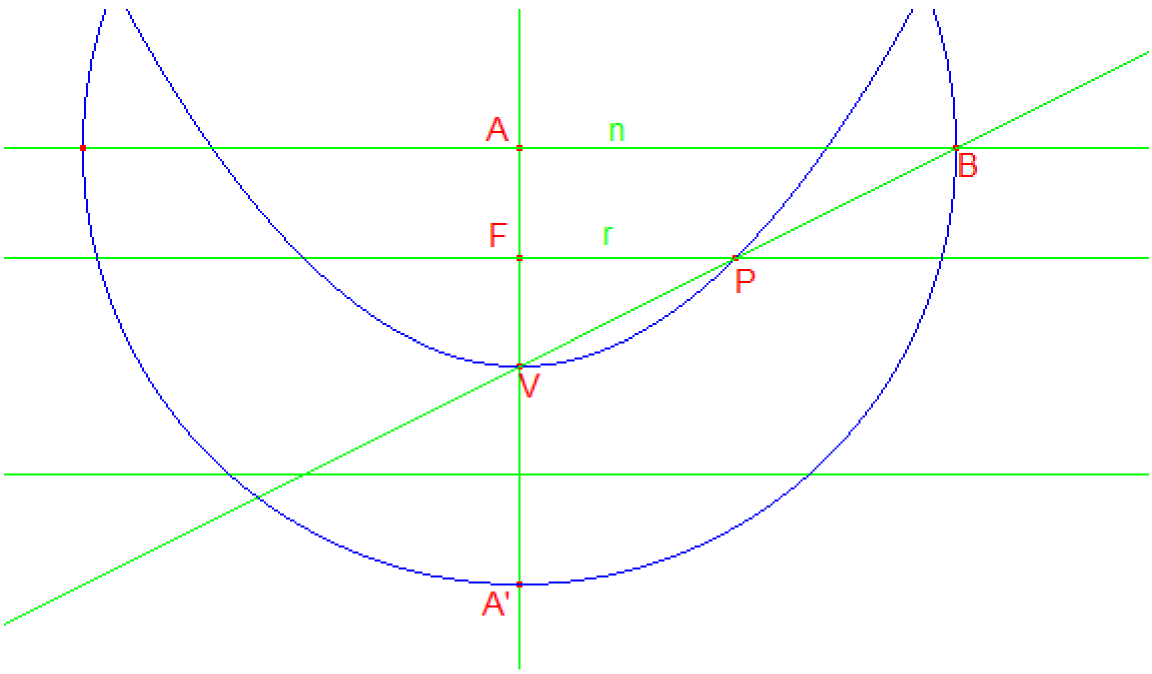
Osserviamo che per leggere la parola CARICA i trattini vanno percorsi sempre dall'alto verso il basso e, a scelta, destra o sinistra :
così consideriamo la seconda riga : nella prima A arriva un solo percorso, nella seconda A ne arrivano due e così pure negli altri ;
ora consideriamo la terza riga : nella prima R arriva un solo percorso, nella seconda R arrivo 1 + 2 = 3 modi (o passando per la prima A o passando per la seconda), nella terza R arrivo in 2 + 2 modi e così per gli altri ;
similmente al triangolo di Tartaglia possiamo costruire lo schema :

					1		1		1		1		1		1
				1		2		2		2		2		2	
			1		3		4		4		4		4		
		1		4		7		8		8		8			
	1		5		11		15		16		16				
1		6		16		26		31		32					

Il numero che trovo in ogni posto è somma dei due numeri immediatamente al di sopra e "conta" i modi per arrivare in quel posto a partire dalla prima riga.
Il numero totale dei percorsi è la somma dei termini dell'ultima riga :
1 + 6 + 16 + 26 + 31 + 32 = 112.

8.- Una costruzione è la seguente :

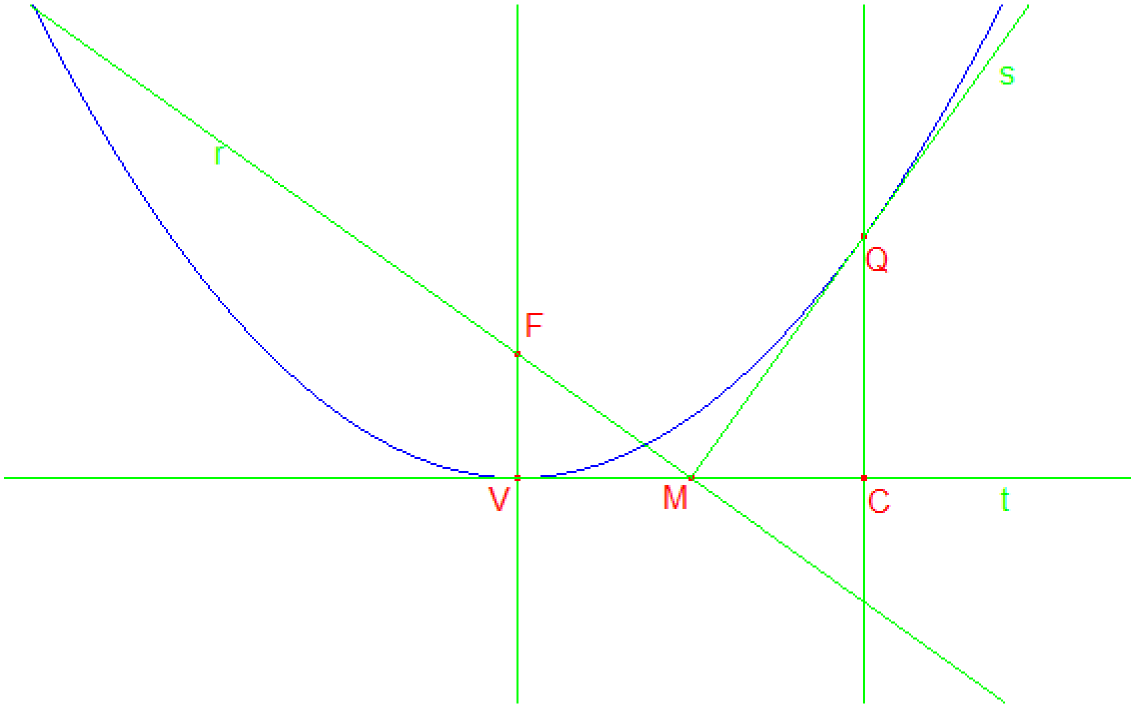
i) indichiamo con V il vertice della parabola <u>*P*</u> e scegliamo un punto A sull'asse di <u>*P*</u> ,
ii) consideriamo sulla retta *n* ortogonale all'asse e passante per A, un segmento AB di lunghezza doppia di AV ;
iii) la retta VB interseca la parabola in un altro punto P ;
iv) si tracci da P la retta *r* ortogonale all'asse : tale retta interseca l'asse nel fuoco F della parabola <u>*P*</u> .



Giustificazione

se consideriamo la parabola Γ di fuoco F e di vertice V, la sua direttrice è la retta *d* simmetrica di F rispetto a V ; il punto P appartiene a Γ poiché FP = 2FV (essendo simili i due triangoli ABV e FPV) e quindi FV = distanza di P da *d* ;
ma una parabola è individuata da : asse , vertice e un ulteriore punto allora Γ coincide con la parabola <u>*P*</u> .

Un’altra costruzione :



i) si tracci la retta *t* per il vertice V di <u>*P*</u> ortogonale all’asse (*t* è tangente <u>*P*</u> nel vertice V) ;

ii) scelto un punto Q su <u>*P*</u> , si tracci per Q la parallela all’asse e sia C la sua intersezione con *t* ;

iii) sia M il punto medio del segmento VC : tracciamo la retta MQ e sia *r* la sua perpendicolare per il punto M :
r interseca l’asse di <u>*P*</u> nel suo fuoco F .