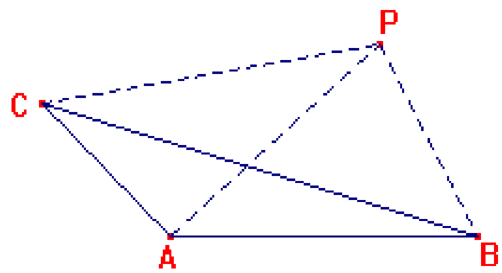
Soluzioni 11ª Gara Matematica "Città di Padova" 16 Marzo 1996.

1.- Supponiamo dapprima che il reticolato delle strade comprenda anche l'angolo in alto a sinistra : se i bambini sono A, B, C, D, A può mettersi in uno qualunque dei $4 \cdot 4 = 16$ incroci ; B allora non può mettersi in nessuno dei 7 incroci delle due strade che confluiscono in A , e può quindi scegliere uno qualunque dei rimanenti 16 - 7 incroci (che sono poi quelli di un reticolato $3 \cdot 3$ ottenuto dal precedente togliendo le due strade per A); C potrà scegliere uno dei $2 \cdot 2$ incroci rimasti, mentre la scelta per D rimane obbligata.
In tutto ci sono quindi $16 \cdot 9 \cdot 4$ modi diversi in cui i quattro bambini si possono disporre sul reticolato "completo". Se da questo numero tolgo il numero N delle disposizioni che coinvolgono il vertice aggiunto, ottengo il numero richiesto.
Quanti sono i casi in cui A si trova in quel vertice? Li abbiamo già calcolati, sono $9 \cdot 4$; ma in quel vertice può trovarsi anche B o C, o D . Si ha quindi
$N = 4 \cdot 9 \cdot 4$.
Il numero richiesto è allora $16 \cdot 9 \cdot 4 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 12 \cdot 9 \cdot 4 = 432$.

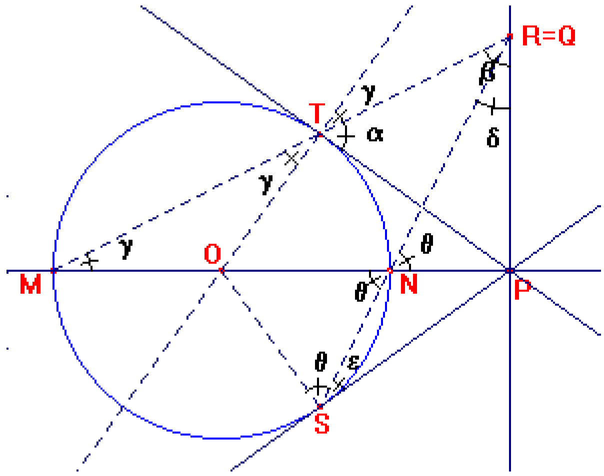
2.- AC + CP + PA = AP + PB + BA, cioè AC + CP = PB + BA .
Posto AC = a , si ha AB = 2a e si ottiene quindi a + PC = PB + 2a ,
cioè PC - PB = a .
Il punto P è dunque tale che la differenza delle sue distanze da C e da B è uguale ad a .
P descrive dunque un ramo *R* di iperbole di fuochi B e C (un solo ramo, poiché i punti Q



dell'altro sono caratterizzati dalla condizione QB - QC = a).
Il triangolo ABP ha per perimetro AP + PB + AB = AP + PB + 2a . Esso sarà minimo quando la somma AP + PB sarà minima . Tale somma è minima quando P appartiene al segmento AB ed è quindi l'intersezione del ramo *R* di iperbole col segmento AB ; infatti in tal caso AP + PB = AB , mentre se P non appartiene al segmento AB per la proprietà triangolare si ha
AP + PB > AB .

3.- $A(x) - B(x) = -2(x - 2)$ (1)
$(x - 2)\, A(x^2) = B(x)\, (x - 1)\, (x^2 - 2)$ (2)
Per la (2) $A = 0 \leftrightarrow B = 0$, ma allora non è soddisfatta la (1) ; se A o B sono costanti = 0 la (2) non è soddisfatta . Ma allora m = grado di A ≥ 1 ,
n = grado di B ≥ 1 , e , per la (1) , m = n . Per la (2) si ha allora
$1 + 2m = n + 1 + 2$, per cui $m = n = 2$.
La (2) dice poi che B(x) è divisibile per (x - 2) , e $A(x^2)$ per (x - 1) . Il teorema del resto dà allora $A(1^2) = 0$, cioè A(1) = 0, cioè A(x) divisibile per
(x - 1) . D'altra parte, per la (1), essendo B(x) divisibile per (x - 2) , lo è anche A(x) e dunque, tenuto conto che il grado di A(x) è 2 , si ha :
$$A(x) = a\,(x - 2)\,(x - 1) .$$
La (2) , con la (1), dà allora :
$$(x - 2)\, a\, (x^2 - 2)\, (x^2 - 1) = [a\,(x - 2)\,(x - 1) + 2(x - 2)]\,(x - 1)\,(x^2 - 2) ,$$
da cui, semplificando per $(x - 2)\,(x^2 - 2)\,(x - 1)$, si ottiene
$a\,(x + 1) = a\,(x - 1) + 2$, cioè $a = -a + 2$, $a = 1$.
Risulta quindi $A(x) = (x - 2)\,(x - 1)$, $B(x) = (x - 2)\,(x + 1)$.
Si verifica poi facilmente che questa coppia di polinomi fornisce una soluzione del problema.

4.- Siccome OT e PT sono ortogonali, si ha (vedi la figura) $\alpha + \gamma = 90°$,
e dal triangolo MPR rettangolo in P si ha : $\beta + \gamma = 90°$, da cui $\alpha = \beta$ e quindi PT = PR .



Analogamente, (facendo intervenire il punto N al posto del punto M, e il punto S al posto del punto T) detto Q il punto intersezione della retta SN
con la retta PR , risulta (confronta la figura), essendo OS e PS ortogonali,
$\varepsilon + \theta = 90°$ e dal triangolo NPQ rettangolo in P : $\delta + \theta = 90°$ per cui $\varepsilon = \delta$ e quindi PS = PQ .
Ma allora PR = PT = PS = PQ , e da PR = PQ , visto che R e Q stanno su di una stessa semiretta di origine P , si ottiene $R \equiv Q$, e quindi R appartiene alla retta SN , c.v.d.

5.- Distinguiamo i tre casi 1) $A_1 = 0$ 2) $A_1 > 0$ 3) $A_1 < 0$.
1) Se $A_1 = 0$ si ha $A_2 = A_3 = A_4 = \ldots = A_n = \ldots = 0$
e la successione è periodica (il suo periodo è 0).
2) $A_1 > 0$. Si vede che , in questo caso, tutti i termini della successione sono > 0 , e che, inoltre, se A_1 è pari, $A_2 < A_1$, se A_1 è dispari (= 2r+1),
$A_2 = 2r+8$, $A_3 = r+4$ e risulta (se $r > 3$) $A_3 < A_1$. Ma allora, se $A_1 > 7$, o dopo un passo o dopo due trovo un numero minore di quello da cui sono partito, per cui, siccome la situazione si ripete, ci sarà un indice i tale che
$0 < A_i < 8$. Proseguendo, dopo alcuni passi, ritroverò un numero compreso tra 0 e 8 , e poi di nuovo, e poi di nuovo, ... , così certamente due di questi numeri, diciamo A_m e A_{m+p} saranno uguali, ma allora a partire dal secondo la situazione si ripeterà e quindi la successione risulterà periodica.
3) Se A_1 è un numero negativo, in ogni caso si ha $A_2 > A_1$ (se A_1 è pari
$A_2 = A_1/2 > A_1$, se A_1 è dispari $A_2 = A_1 + 7 > A_1$); perciò, essendo tutti gli A_n interi, ci sarà un indice j per cui $A_j \geq 0$, e si ricade in uno dei casi precedenti.
Troviamo ora i periodi: oltre al caso A_1 (o A_j) = 0 , possono presentarsi i seguenti casi

I)	$A_i = 1$	. . . . . 1, 8, 4, 2, 1, 8, 4, ...	periodo 1, 8, 4, 2
II)	$A_i = 2$	. . . .	stesso periodo
III)	$A_i = 3$	. . . . 3, 10, 5, 12, 6, 3, ...	periodo 3, 10, 5, 12, 6
IV)	$A_i = 4$	. . . .	come al I
V)	$A_i = 5$	. . . .	come al III
VI)	$A_i = 6$	. . . .	come al III
VII)	$A_i = 7$	. . . . . , 7, 14, 7, 14, ...	periodo 7, 14

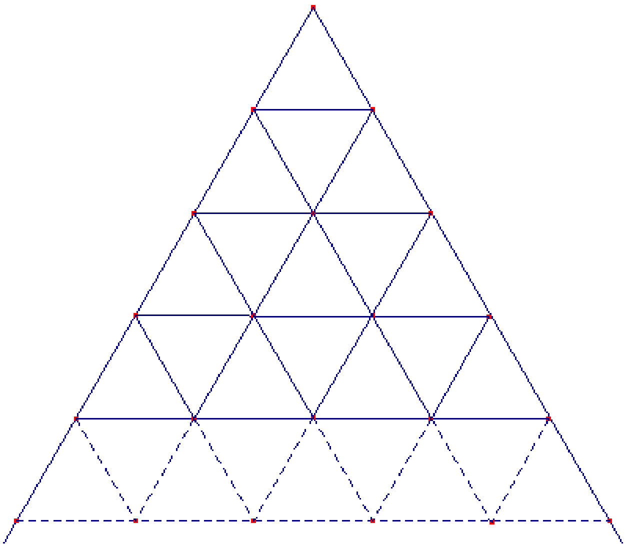
I periodi essenzialmente diversi sono dunque quattro.

6.- Consideriamo dapprima un tetraedro regolare di lato 1 e, per ogni faccia, consideriamo il piano ad essa parallelo equidistante dalla faccia e dal vertice opposto; tale piano taglia i tre spigoli concorrenti nel vertice nei rispettivi punti medi. Di tali piani ce ne sono quattro e suddividono il tetraedro in cinque parti, e precisamente in quattro tetraedri regolari di lato 1/2 e un ottaedro "centrale" di lato 1/2.
Analogamente se suddividiamo ogni spigolo del tetraedro ***T*** in 10 parti di

2 cm ciascuna mediante 9 punti per ogni spigolo, e consideriamo i piani per tali punti e paralleli alle facce di ***T***, questi piani suddividono ***T*** in tetraedri e ottaedri regolari col lato di 2 cm. I tetraedri piccoli che si appoggiano ad una faccia F di ***T*** sono allora 1+2+3+4+. . .+9+10 == 11 · 5 = 55 (i triangoli tratteggiati in figura sono facce di ottaedri).
Il piano F parallelo alla faccia F e passante per i vertici (che non appartengono a F) di tali tetraedri piccoli taglia ***T*** in due pezzi : un tetraedro di lato 18 cm e un tronco di piramide composto dai tetraedri piccoli in questione e dagli ottaedri della suddivisione che si appoggiano alla faccia F (e che sono 45). Similmente segando il tetraedro ottenuto con l'analogo piano G parallelo ad un'altra faccia G si ottiene un tetraedro di lato 16 cm , poi si prende in considerazione una terza faccia e operando come prima si ottiene un tetraedro di lato 14 cm , e finalmente, a partire dalla quarta faccia, si ottiene un tetraedro S avente il lato di 12 cm , che è formato da tutti gli ottaedri e i tetraedri piccoli che non hanno punti in comune con la superficie del tetraedro ***T***.
La risposta alla seconda domanda sarà quindi il numero dei tetraedri piccoli di S . Contiamoli : suddividiamo in 6 "fette" S con 5 piani paralleli ad una sua faccia (p.e. F) e passanti per i 5 punti che dividono uno spigolo di S ,
incidente a F , in sei segmenti di lunghezza 2 cm. La fetta più piccola è formata da un unico tetraedro piccolo, la successiva ne contiene due di più, la terza tre di più, la quarta quattro di più, e così di seguito; in totale abbiamo

1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + (1+2+3+4+5) + (1+2+3+4+5+6)

tetraedri piccoli che appartengono a S .
Ci sono quindi 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 tetraedri piccoli di ***T*** che non hanno punti in comune con la superficie del tetraedro stesso.



7.- Si ha $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ (scomposizione in fattori primi). I divisori di 1995 sono allora tutti e soli i numeri $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ dove x, y, z. t
valgono 1 oppure 0 . Per ognuno dei quattro esponenti ci sono dunque due scelte possibili, ed ogni scelta dà luogo a divisori diversi. Così il numero dei divisori è $4 \cdot 2 = 8$.
I divisori di a(a+1) sono i prodotti uv , con u divisore di a e v divisore di
a+1 . Poiché a , a+1 sono primi tra loro, scelte diverse per i fattori u , v
producono divisori uv diversi. Allora il numero dei divisori di a(a+1) è il prodotto $m \cdot n$.

8.- Con riferimento ad un sistema di coordinate cartesiane nel piano, le coppie ordinate di numeri reali (x, y) che soddisfano la condizione
$x^2 + y^2 \leq 8$ sono tutte e sole le coordinate dei punti che appartengono al disco di centro l'origine e raggio = $2\sqrt{2}$.
Per i punti della retta di equazione $x + y = k$ (che passa per il punto K(k, 0)), la somma delle due coordinate è costante (= k) ed è positiva se K appartiene al semiasse positivo delle x , ed è tanto più grande quanto più lontano dall'origine e' il punto K.
Ma allora se consideriamo le due tangenti al circolo parallele alla retta $x + y = 0$ di equazioni, rispettivamente, $x + y = 4$ e $x + y = -4$, ed i relativi punti di

tangenza S(2, 2) e T(-2, -2), risulta che ogni punto del disco ha coordinate (x, y) tali che $-4 \le x + y \le 4$, ed il punto S è l'unico punto del disco le cui coordinate (2, 2) rendono massima la somma.

Con un ragionamento analogo si risponde anche alla seconda domanda; ora la regione piana da considerare non è più tutto il disco, ma solo la parte per cui $y \ge -1$; inoltre ora il ruolo già tenuto dalla tangente in T è tenuto dalla retta per R($-\sqrt{7}$, -1) parallela alla retta di equazione $x + y = 0$.

Si ha quindi, per tutti i punti della regione

$- 7 -1 \le x + y \le 4$, e quindi a fortiori (essendo $3{,}9 > 1 + 7$)

$-3{,}9 < x + y < 4{,}1$.