12ª Gara Matematica 22 Marzo 1997
SOLUZIONI

1.- Le successioni di 4 lettere in stretto ordine alfabetico sono tante quanti i sottoinsiemi di quattro lettere (infatti basta scegliere quattro lettere e poi metterle in ordine alfabetico) e sono pertanto :

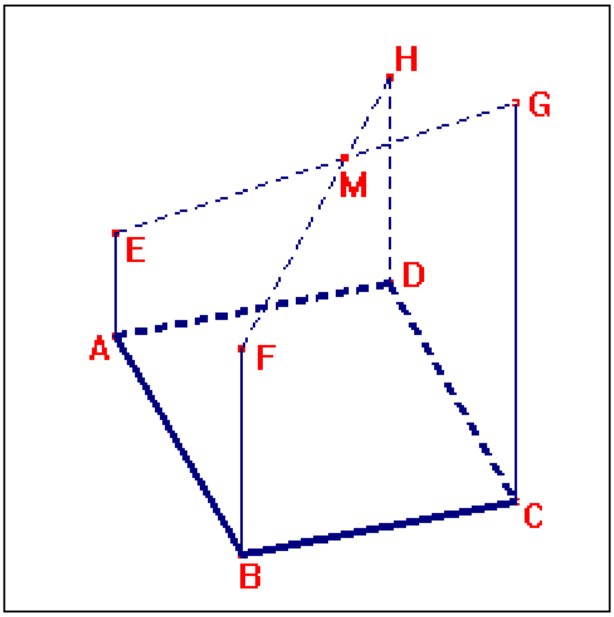
$$\binom{21}{4} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{4 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Analogamente le successioni di tre cifre in stretto ordine crescente sono :

$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2}$; cosicchè il numero delle targhe in questione risulta allora il prodotto dei due numeri ed è quindi :

$$\frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 718200.$$

2.- Affinchè EFGH sia un parallelogramma basta che il punto medio M di EG sia anche punto medio di FH. Ora M si proietta su Π nel punto medio di AC, che è il centro O del quadrato ABCD, ed essendo punto medio di EG ha per quota su Π la media delle quote di E e G, cioè 10 cm.



Anche il punto medio di FH si proietta su O, ed ha su Π quota uguale a 10 cm, quindi coincide con M.
Per vedere che il parallelogramma EFGH è un rombo, basta ora verificare che i quattro lati sono uguali, e lo sono in quanto tutti ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 10 e 5 cm.
Si ha :

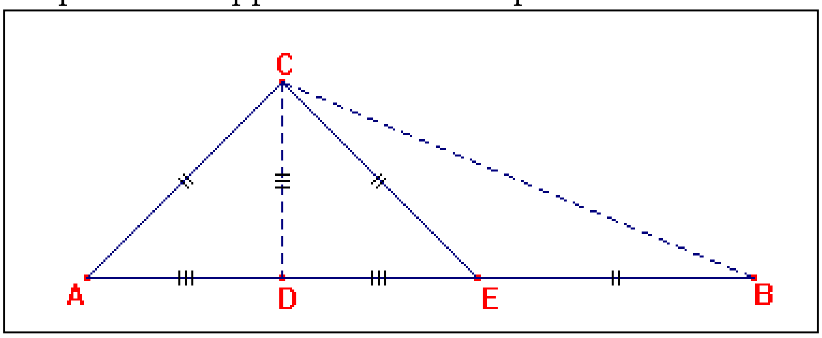
$$FH = BD = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$EG = \sqrt{AC^2 + 10^2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

e quindi l'area del rombo è $50\sqrt{6}$ cm^2.
Si vede facilmente che il poliedro in questione è la metà del parallelepipedo rettangolo che ha per base il quadrato e altezza 20 cm; il suo volume è 10^3 cm^3.

3.- Siccome A, D, E, B sono allineati uno dei vertici dei triangoli dovrà essere C, i triangoli saranno allora tanti quanti le coppie formate con quattro elementi :

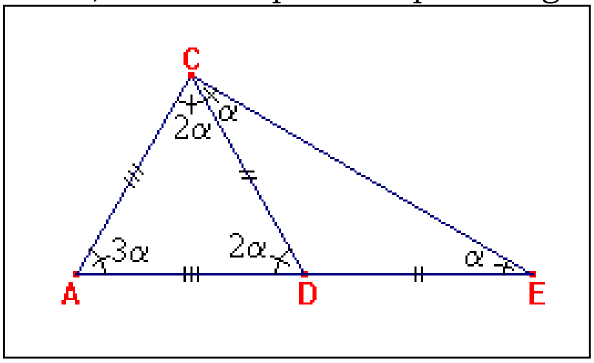
$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$



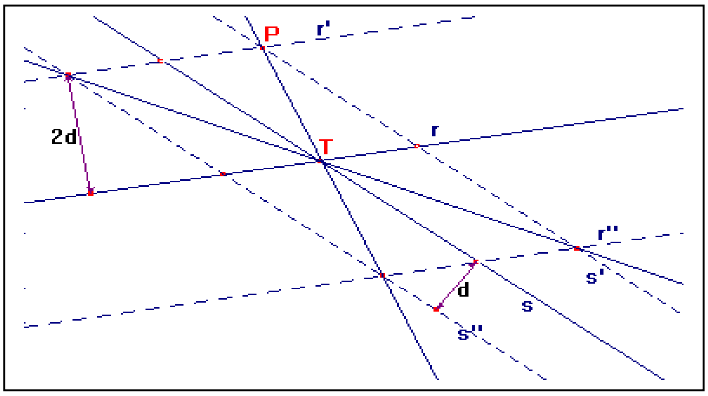
Scelgo ora ADC rettangolo in D ed isoscele AD = DC, poi E tale che AD = DE, ed ho così tre triangoli isosceli ADC, CDE, ACE ; scelgo ora B in modo che

CE = EB ed ho il quarto triangolo isoscele CEB.
Il triangolo ABC così costruito è scaleno in quanto i suoi angoli misurano rispettivamente : 45°, 22.5°, 112.5° .

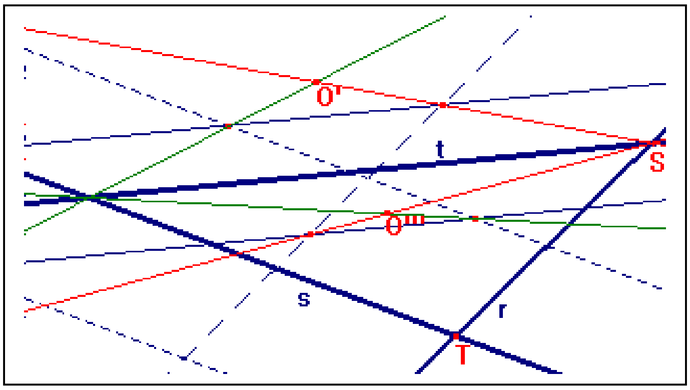
Questa non è l'unica soluzione del problema, un'altra è per esempio la seguente : scegliamo i punti A, D, E, C in modo che AD = AC, DE = DC, AE = EC. Si vede che questo è possibile, infatti basta scegliere (vedi fig.) α in modo che $7\alpha = \pi$. Completiamo poi la figura prendendo B in modo che EB = EC. Il triangolo ABC così costruito risulta Scaleno poiché i suoi angoli sono rispettivamente 3/7, 1/14, 1/2 di un angolo piatto.



4.- Fissiamo una distanza d ; i punti del piano che hanno distanza d dalla retta s sono quelli di due rette, s' ed s", parallele ad s e giacenti in semipiani opposti rispetto a s; analogamente i punti che hanno distanza 2d dalla retta r sono quelli di due rette, r' ed r", parallele a r e giacenti in semipiani opposti rispetto a r.
Il punto P intersezione (p.e.) di s' con r' ha allora distanza d da s e distanza 2d da r e quindi soddisfa alla condizione richiesta d(P,r) = 2d(P,s) = 2d. Ciascuno dei quattro punti intersezione delle due coppie di rette s' – s", r' – r" soddisfa a questa condizione e, per ragioni di proporzionalità, si ha che ogni punto delle due rette che congiungono questi quattro punti a T ha da r distanza doppia di quella che ha da s.



In maniera analoga si vede che i punti del piano che hanno da r distanza tripla di quella che hanno da t, sono quelli di due rette per S . Intersecando una di tali rette per S con una delle due per T precedentemente trovate otteniamo un punto O la cui distanza da r è doppia della sua distanza da s e tripla di quella che ha da t. I punti richiesti sono quindi i quattro punti intersezione delle due coppie di rette, le due rette per S e le due per T.



(In figura abbiamo soltanto O' e O''' essendo gli altri al di fuori del riquadro, costruzione : due parallele a t a distanza d, due parallele a r a distanza 3d, due parallele a s a distanza 2d; due vertici del triangolo sono centri di un parallelogramma avente diagonali colorate, le reciproche intersezioni sono i punti cercati)

5.- Posso intanto scegliere le sei tinte con cui colorare le facce del cubo; ho in tutto $\binom{10}{6}$ possibilità. Vedo ora, per ciascuna di queste scelte, quanti modi ho per dipingere il cubo, cioè in quante maniere diverse posso dipingere un cubo, disponendo di sei colori, in modo che ogni faccia abbia colore diverso da quelli delle altre cinque.
Dipingo una delle facce e disporrò il cubo in modo che sia p.e. quella superiore, con un certo colore, la faccia opposta con uno degli altri cinque colori (5 scelte possibili); mi rimangono le quattro facce laterali : dovrò dipingere una di queste e disporrò il cubo in modo che sia p.e. quella frontale, con uno dei quattro colori che mi rimangono, indi quella opposta con uno degli altri tre (3 scelte), una laterale con uno qualunque dei due colori rimasti (2 scelte), ed infine l'altra laterale con l'ultimo colore rimasto.
Ho quindi complessivamente $5 \cdot 3 \cdot 2$ scelte.
La risposta è dunque $(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2) : (4 \cdot 3 \cdot 2) = 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5 = 6300$.

6.- Si tratta di provare che dati due numeri interi x, y ne esistono altri due u, v tali che :

$$7 \cdot (2x^2 + 2y^2) = 2u^2 + 2v^2$$

poniamo $u = x + s$; $v = y + t$ e sostituiamo, ottenendo così :

$$14x^2 + 21y^2 = 2x^2 + 4sx + 2s^2 + 3y^2 + 6ty + 3t^2$$

$$12x^2 + 18y^2 = 4sx + 2s^2 + 6ty + 3t^2$$

Se scegliamo $s = 3y$ spariscono due dei quadrati, l'equazione si semplifica e si ottiene :

$$12x^2 = 12xy + 6ty + 3t^2$$

$$4x^2 – t^2 = 2y \cdot (2x + t)$$

Scegliamo allora $t = -2x$ e l'equazione è soddisfatta.
La coppia di numeri $u = x + 3y$, $v = y – 2x$ fornisce quindi un numero "allegro" che è sette volte quello individuato dalla coppia x, y.

7.- Le 5 gomme possono percorrere in totale $50000 \cdot 5 = 250000$ km. Ma un chilometro percorso dall'automobile significa quattro chilometri percorsi dalle gomme. Perciò l'automobile può percorrere al più :

$$250000 : 4 = 62500 \text{ km}$$

Dette A, B, C, D, E le cinque ruote, ogni 12500 km l'automobilista cambia una ruota seguendo p.e. lo schema :

				Di scorta
A	B	C	D	E
E	B	C	D	A
E	A	C	D	B
E	A	B	D	C
E	A	B	C	D

Per percorrere con l'automobile 70000 km deve avere a disposizione $70000 \cdot 4$ cioè 280000 km di gomme, deve avere allora un numero N di gomme tale che $50000 \cdot N \geq 280000$, cioè $5N \geq 28$.
Il più piccolo numero intero N che va bene è : 6.
Rifacendo il ragionamento precedente si vede che con 6 gomme si possono anzi percorrere $(50000 \cdot 6) : 4 = 75000$ km, cambiando le gomme ogni 25000 km secondo (p.e.) il seguente schema :

				Di scorta
A	B	C	D	E, F
E	F	C	D	A, B
E	F	A	B	C, D

8.- Consideriamo $(1+\sqrt{2})^n$ con $n > 0$.
Tenendo conto della formula dello sviluppo della potenza di un binomio :

$$(x + y)^n = x^n + a_1x^{n-1} y + \dots + a_ix^{n-i}y^i + \dots + y^n$$

dove i coefficienti a_i sono interi (coefficienti binomiali), si vede che per $x = 1$ e per $y = \sqrt{2}$ ogni termine è :

(i) o un numero intero se l'esponente di $\sqrt{2}$ è pari,

(ii) o un numero intero moltiplicato per $\sqrt{2}$ se l'esponente di $\sqrt{2}$ è dispari.

Sommando tutti i termini interi e poi quelli che contengono $\sqrt{2}$ si ottiene il risultato.

Se $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$

allora $(1 + \sqrt{2})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2}$.

Un fattore k comune a $a_n + 2b_n$ e ad $a_n + b_n$ divide :

(i) sia $a_n + 2b_n - (a_n + b_n) = b_n$,

(ii) sia $2(a_n + b_n) - (a_n + 2b_n) = a_n$

e allora divide anche a_n e b_n … e così via … divide $a_0 = 1$ e $b_0 = 0$, ed è quindi 1 : ogni coppia a_n, b_n è dunque formata da due numeri primi tra loro.

Sia ora $n < 0$ e poniamo $-n = r > 0$; osserviamo che :

$$(1 + \sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} - 1 .$$

Si ha pertanto :

$$(1 + \sqrt{2})^n = (1 + \sqrt{2})^{-r} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^r} = (\sqrt{2} - 1)^r .$$

Si conclude allora con un ragionamento analogo al precedente.