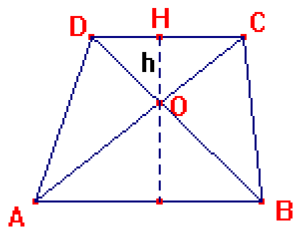
13ª GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA" - 21-3-1998

SOLUZIONI

1.- Con riferimento alla figura, scegliamo l'unità di misura delle lunghezze in modo che DC abbia misura 2, così AB avrà misura 3.
I due triangoli ABO e CDO risultano simili (hanno gli angoli ordinatamente congruenti): se h=OH è l'altezza di CDO, quella di ABO risulta quindi 3/2 h e le aree dei due triangoli sono allora h e 9/4 h.



I triangoli AOD e BOC hanno area uguale perché differenza di triangoli aventi area uguale : AOD = ABD – ABO, BOC = ABC – ABO (infatti ABD e ABC hanno stessa base e stessa altezza).
Così l'area di AOD è uguale alla metà della differenza tra l'area del trapezio e la somma delle aree di ABO e CDO :

$$AOD = \frac{1}{2} \cdot \left[5 \cdot \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \frac{h}{2} - \left(1 + \frac{9}{4} \right) h \right] = \frac{3}{2} h$$

I seguenti numeri rispondono quindi alla richiesta :

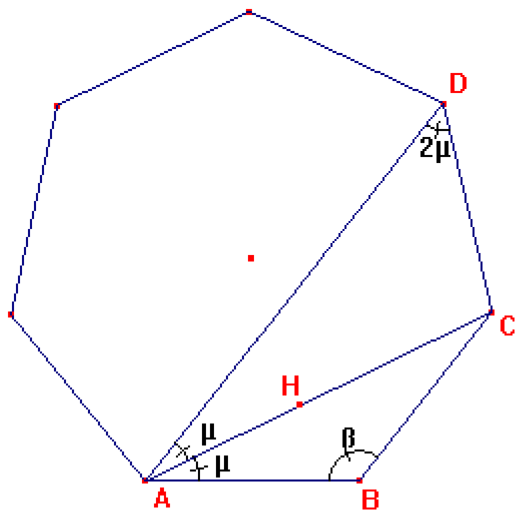
$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{9}{4}$$

2.- Sia V la velocità di esecuzione del primo dei due amici, sia v quella dell'altro ed essi abbiano lavorato x ore sino a mezzogiorno. Allora :

Vx + vx = ½ staccionata (dipinta nella mattinata)
4V + 9v = ½ staccionata (dipinta nel pomeriggio)
Vx + 4V = ½ staccionata (dipinta dal primo amico).

Da cui :
Vx + vx = Vx + 4V → vx = 4V
4V + 9v = Vx + 4V → 9v = Vx
e dividendo membro a membro otteniamo x/9 = 4/x → $x^2 = 9 \cdot 4 = 36$ → x = 6.
I due amici hanno lavorato 6 ore al mattino e quindi hanno iniziato alle 6.
Il sole è sorto alle 6.

3.- La misura β dell'angolo interno di un ettagono regolare è $5/7\ \pi$ (poiché $7\beta + 2\pi = 7\pi$) : Indichiamo con μ la misura dell'angolo CAB; risulta ACB = μ per cui (dal triangolo ABC) : $2\mu + \beta = \pi$ e quindi $\mu = \pi/7$.



Sul segmento AC fissiamo il punto H tale che HC = AB = b. Gli angoli alla base del triangolo isoscele HBC misurano $(\pi - \mu)/2 = 3\mu$.
L'angolo HBA misura $\beta - 3\mu = 2\mu$.
Ma allora i due triangoli AHB e ACD sono simili e risulta AH : AC = AB : AD cioè $(c-b) : c = b : d \ \rightarrow\ bc = (c-b)d \ \rightarrow$ (dividendo per bcd) $1/d = 1/b - 1/c$ da cui l'asserto.

4.- 6^n per n intero >1 è divisibile per $6^2 = 36$ e quindi anche per 12.
Basta perciò dimostrare che $7^n + 5^n$ è divisibile per 12.
Ora se n è dispari si ha il seguente "prodotto notevole" :

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

che nel nostro caso diventa :

$$7^n + 5^n = (7 + 5)(7^{n-1} - 7^{n-1}\cdot 5 + \ldots - 7 \cdot 5^{n-2} + 5^{n-1})$$

e dunque $7^n + 5^n$ risulta divisibile per 12.

5.- Tutti i numeri di una delle cinquine richieste devono essere divisibili per 3 e devono perciò essere scelti tra i seguenti numeri :

3, 6, 9, 12, 15, 18, …,81, 84, 87, 90.

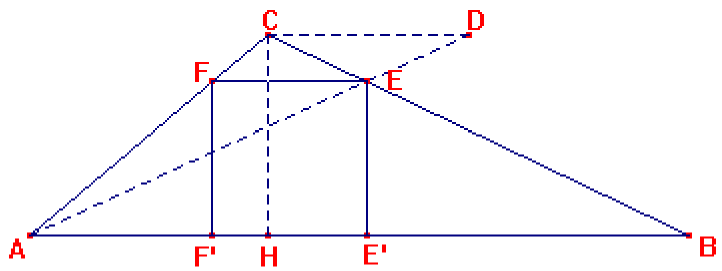
Le cinquine fatte con questi numeri sono $\binom{30}{5}$. Da queste devo levare quelle i cui numeri hanno MCD = 6, 9, 12, 15, 18.
Le cinquine con MCD = 6 o un multiplo di 6 sono formate dai numeri 6, 12, 18, 24, 30, … , 84, 90 e sono $\binom{15}{5}$; quelle con MCD = 15 son formate dai numeri 15, 30, 45, 60, 75, 90 e sono $\binom{6}{5}$; quelle con MCD = 9 o 18 son formate dai

numeri 9, 18, 27, ... , 81, 90 e sono $\binom{10}{5}$; perciò le cinquine richieste sarebbero:

$\binom{30}{5}-\binom{15}{5}-\binom{6}{5}-\binom{10}{5}$ salvo che così abbiamo tolto due volte la cinquina (18, 36, 54, 72, 90) che compare sia tra quelle formate coi multipli di 6 che tra quelle formate dai multipli di 9; perciò il numero richiesto è :

$$\binom{30}{5}-\binom{15}{5}-\binom{6}{5}-\binom{10}{5}+1$$

6.- Un eventuale quadrato inscritto dovrà avere due vertici appartenenti ad un medesimo lato del triangolo.



Riportiamo sulla parallela ad AB per C, un segmento CD uguale a CH, come in figura. La retta AD interseca CB in un punto E che è uno dei vertici del quadrato cercato, infatti, detta F l'intersezione con CA della parallela ad AB per E, si ha :

(1) CD : FE = CA : FA

(2) CH : FF' = CA : FA

e quindi CD : FE = CH : FF' e poiché CD = CH ne viene FE = FF'.
Se l'angolo in B è ottuso, il punto E' non appartiene al segmento AB, analogamente se l'angolo in A è ottuso F' non appartiene ad AB ; in questi casi il quadrato prima costruito non è "inscritto" nel triangolo : se il triangolo è ottusangolo c'è un unico quadrato inscritto, che si appoggia al lato maggiore ; se ABC è acutangolo ci sono tre quadrati inscritti e se ABC è rettangolo due.

7.- Trasformiamo i tre logaritmi in logaritmi aventi la stessa base (usando la nota formula $\log_c a = \log_b a \cdot \log_c b$) e scegliamo per esempio base 5 :

(1) $$\log_{\sqrt{5}} 2 = \log_5 2 \cdot \log_{\sqrt{5}} 5 = 2\log_5 2$$

(2) $$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_5\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \log_{\frac{1}{5}} 5 = -1 \cdot \log_5\left(\frac{1}{2}\right) = \log_5 2$$

(3) $$\log_{25} 3 = \log_5 3 \cdot \log_{25} 5 = \frac{1}{2}\log_5 3 = \log_5 \sqrt{3}$$

Si tratta ora di vedere se :

$$2\log_5 2 > \log_5 2 + \log_5 \sqrt{3}$$

cioè se $\log_5 2 > \log_5 \sqrt{3}$ che (poiché il logaritmo in base 5 è funzione crescente) si traduce nella $2 > \sqrt{3}$ che è vera e di conseguenza è vera la disuguaglianza di partenza.

8.- Consideriamo due delle sfere in questione, di centro, rispettivamente P e P' . Siano R e S le intersezioni (≠ O) della prima sfera con r e s, R' e S' le analoghe intersezioni relative alla seconda sfera.
L' omotetia di centro O e rapporto OP'/OP manda la prima sfera nella seconda, ed ha r e s come rette unite (passano per O). Perciò tale omotetia trasforma il segmento RS nel segmento R'S'. I due segmenti sono quindi paralleli (rette corrispondenti in una omotetia sono parallele).

II Soluzione : Il circolo intersezione di un piano con una sfera ha come centro la proiezione ortogonale del centro della sfera sul piano intersezione, perciò il piano α che contiene le due rette r e s sega le varie sfere per O con centro sulla retta t in circoli che passano per O e hanno centro sulla retta t' proiezione ortogonale di t sul piano α.
La precedente osservazione permette di ridurre il nostro problema spaziale al seguente problema piano : Date sul piano α tre rette r, s, t' per un punto O, si consideri un punto P su t' ed il circolo C per O di centro P. Siano R e S le ulteriori intersezioni del circolo con r ed s rispettivamente.
E' vero che al variare di P su t' i vari segmenti RS che così si ottengono son tutti paralleli ?
Si consideri un altro circolo C' passante per O e avente il centro P' sulla retta t' .
Siano R' ed S' le intersezioni (≠ O) di C' con r ed s.
Verifichiamo che RS e R'S' sono paralleli : perché sia così basta (per esempio) che i triangoli ORS e OR'S' siano simili o che (per il I° criterio di similitudine) valga :
OR : OR' = OS : OS'.
Indichiamo con D e D' le ulteriori intersezioni di t' con C, C' allora i triangoli rettangoli ORD e OR'D' risultano simili e così pure i triangoli rettangoli OSD e OS'D' , si ha quindi : OR : OR' = OD : OD' = OS : OS' e da qui il risultato.