14ª GARA MATEMATICA 20 MARZO 1999
SOLUZIONI

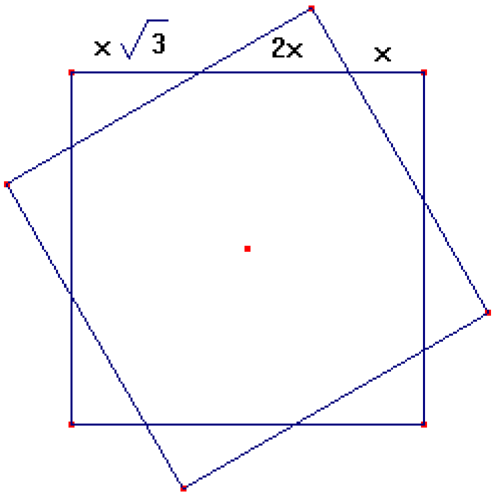
1.- E = 0 poiché il doppio di una cifra $\neq 0$ è un numero che non finisce con quella cifra. A + O ≠ A perché lo 0 è già impegnato; l'unica possibilità allora è che O = 9 ed L + L = 1R da cui L = 6, o L = 7, o L = 8.
Il 9 è già occupato e il 5 darebbe R = 0 (già occupato); in corrispondenza di questi valori di L si ha rispettivamente, R = 2, R = 4, R = 6.
Consideriamo separatamente i tre casi :
a) L=6, R=2;
b) L=7, R=4;
c) L=8, R=6.
S è una cifra <5 (il suo doppio +1 è numero di una sola cifra) nel caso a) S=1 oppure S=3 (il 2 è già occupato ed il 4 darebbe M=9 già occupato); in corrispondenza M= 2S+1 oppure 7, rispettivamente nel caso b) S=1 oppure S= 2 (il 3 darebbe M=7 già occupato e il 4 è occupato) nel caso c) S=1 oppure 2 oppure 3 , per cui M= 3 o 5 o 7 rispettivamente.
Si hanno dunque due possibilità nel caso a) , due nel caso b), tre nel caso c) : in tutto sette possibilità. Per ciascuna di queste possiamo scegliere A tra le quattro rimaste, in tutto si hanno quindi 7 · 4 = 28 modi distinti di risolvere il problema.

2.- Indichiamo con E la somma dei cinque numeri da mettere nelle caselle esterne, con I la somma di quelli delle caselle interne. Tenuto conto che ogni numero esterno è somma di due numeri interni, si ha E = 2I ; d'altra parte
E + 1 = 1+2+3+….+9+10=55. Risulterebbe quindi 2I+I=3I=55, ma ciò non è possibile perché 55 non è divisibile per 3.
La risposta è NO.

3.- Si ha $\sqrt{3} = \log_5 5^{\sqrt{3}}$, per cui essendo $\log_5$ una funzione crescente si tratta di verificare che $5^{\sqrt{3}} > 7$ e siccome $\sqrt{3} > 1.5$ si ha $5^{\sqrt{3}} > 5^{1.5} = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{125} > 11 > 7$.

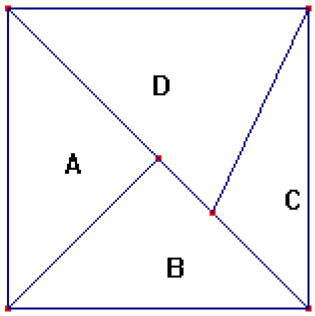
4.- Sia N il premio individuale dapprima promesso. Ciascuno dei tre operai lo si vide decurtare del 100-55=45 per cento Avanzò quindi una somma di
3N · 45/100 da aggiungere al premio complessivo degli altri nove, ciascuno dei quali ebbe in più (3N · 45/100) : 9 = 15 N/100 = 15% N.
Il loro premio aumentò quindi del 15 %.

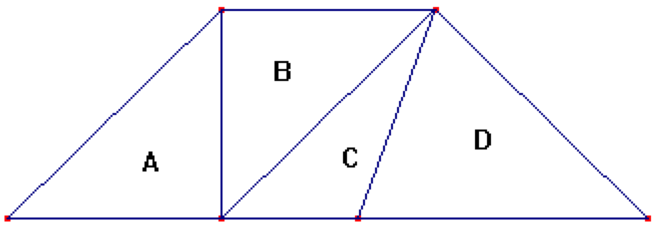
5.- Per la simmetria della figura, gli otto triangoli rettangoli sono tutti tra loro congruenti, inoltre il loro angolo interno minore è di 30°; ciascuno di essi è quindi metà triangolo equilatero. Detto x il cateto minore, l'ipotenusa è allora 2x e il cateto maggiore $x\sqrt{3}$. Risulta quindi $x+2x+x\sqrt{3}=10$ cm, da cui $x=10/(3+\sqrt{3})$ la regione comune ai due quadrati è un ottagono non regolare con i lati tutti lunghi 2x, ottagono che è circoscritto al circolo di centro il centro dei due quadrati e raggio = 5 cm.



La sua area è perciò uguale al prodotto del suo semiperimetro per il raggio del circolo $A = 8x \cdot 5 = \dfrac{400}{3+\sqrt{3}} = 200\ (1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3})\,\mathrm{cm}^2$.

6.- C'è più di una soluzione, proponiamo la seguente :





Sia il triangolo A che il B sono isosceli, si possono perciò appoggiare su entrambe le facce ottenendo a piacere una figura bicolore oppure monocolore.

7.- Il circolo ha equazione $x^2 + y^2 = 5$. Si vede subito che (1, 2) ne è una soluzione intera. Per simmetria allora (±1, ±2) , (±2, ±1) sono ancora soluzioni (otto) e sono tutte le soluzioni intere : se x=0 allora $y = \sqrt{5}$, se $x \geq 3$ allora $x^2 > 5$.
Consideriamo ora una retta per il punto A(1, 2) :

(1) $\qquad y-2 = m(x-1)$

questa retta interseca il circolo in due punti, il punto A ed un ulteriore punto B.
Troviamo le coordinate di B :
poniamo a sistema l'equazione della retta e quella del circolo ed eliminando la y otteniamo l'equazione :

(2)
$$x^2 + 4 + 4m(x-1) + m^2(x-1)^2 = 5 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; x^2 - 1 + 4m(x-1) + m^2(x-1)^2 = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; (x-1)(x+1) + 4m(x-1) + m^2(x-1)^2 = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; (x-1)[x + 1 + 4m + m^2(x-1)] = 0$$

che ha ovviamente una soluzione per $x = 1$ (l'ascissa del punto A) e l'altra (ascissa del punto B) soluzione della equazione di primo grado

$$x + 1 + 4m + m^2(x - 1) = 0$$

soluzione che risulta razionale se prendiamo m razionale.
Per la (1) poi l'ordinata del punto B è $y = 2 + m(x - 1)$ (dove x è l'ascissa di B) ed anch'essa risulta razionale.
Per ogni m razionale troviamo sul circolo un punto B a coordinate razionali. Di tali punti ce ne sono infiniti, poiché a razionali diversi corrispondono rette diverse e quindi punti B diversi.

8.- Per definizione c è il quoziente di a /b qualora :

$$a = b \cdot c + r \qquad \text{con } 0 \le r < b$$

Ora se $r<c$ allora b è il quoziente di a/c , altrimenti no e il quoziente è maggiore di b.
La condizione richiesta è pertanto : $c \le a - bc < b$.
Se $b = 10$ e $c= 7$ otteniamo $7 \le a - 70 < 10 \rightarrow 77 \le a < 80$ e quindi
$a = 77$, oppure $a = 78$, oppure $a = 79$.
Verifiche :
(1) 77 : 10 = 7 (resto r = 7);
(2) 78 : 10 = 7 (resto r = 8);
(3) 79 : 10 = 7 (resto r = 9)
mentre :
(1') 77 : 11 = 7 (resto r = 0);
(2') 78 : 11 = 7 (resto r = 1);
(3') 79 : 11 = 7 (resto r =2).