20ª GARA MATEMATICA “CITTA' DI PADOVA” 19 MARZO 2005

1.- Si trovi il più piccolo numero di sei cifre, tutte diverse fra loro, divisibile sia per 11 che per 5 .

2.- Si consideri una piramide di base un quadrato ed altezza 8 .
Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi stanno tra loro come 7:1 ?
Si determinino le distanze di tali piani dal vertice della piramide .

3.- Si consideri su di un piano un insieme formato da un numero pari $2n$ di punti . Esistono rette del piano che lo dividono in due semipiani contenenti ciascuno precisamente n di tali punti ?
Analogamente, si abbia su una superficie sferica un numero pari $2n$ di punti . Esistono piani per il centro della sfera che dividono la superficie in due parti contenenti ciascuna n di tali punti ?

4.- Un corridore si allena su un percorso che non è mai piano . Quando corre in discesa ha una velocità costante doppia di quella (costante) che ha in salita .
Parte da un punto A e ritorna ad A per la stessa strada .
Qual è il rapporto tra la sua velocità media e la sua velocità in salita ?

5.- Al termine di un torneo di calcio all'italiana (in cui ogni squadra incontra ogni altra una sola volta), la somma dei punti totalizzati dalle quattro squadre partecipanti è 15 . Sapendo che le squadre hanno ottenuto punteggi tutti diversi e che la prima classificata ha vinto solo due degli incontri, si dica quale può essere la classifica finale .

6.- Dato un triangolo equilatero ABC, si divida il lato AB in due parti AA_1 e A_1B, tali che $AA_1 = 2\ A_1B$, e così il lato BC in due parti BB_1 e B_1C con $BB_1 = 2\ B_1C$, il lato CA in due parti CC_1 e C_1A, con $CC_1 = 2\ C_1A$.
Le tre rette AB_1 , BC_1 , CA_1 individuano un triangolo. Determinare il rapporto tra l'area di questo triangolo e quella di ABC .
Cosa si può dire se il triangolo di partenza non è equilatero ?

7.- Sia x un numero reale tale che il numero $x+\frac{1}{x}$ risulti intero. Si provi che allora $x^n+\frac{1}{x^n}$ è intero per ogni n intero .

8.- Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani del piano, chiameremo *razionale* un punto che abbia entrambe le coordinate razionali.
a) si trovi una spezzata chiusa, con i lati paralleli agli assi cartesiani, che non contenga alcun punto razionale;
b) esistono spezzate chiuse con i lati non paralleli agli assi e prive di punti *razionali* ?